大学

数学系

自学丛书

微分几何



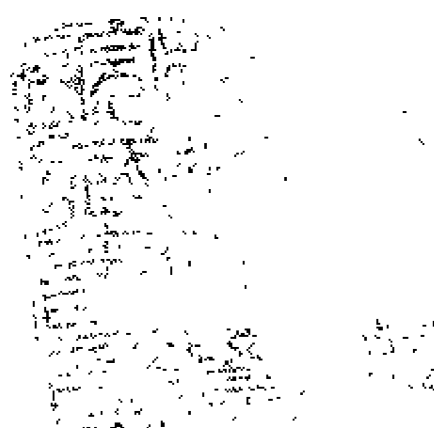
WEIFEN JIHE

大学数学系自学丛书

微分几何

东北师范大学

王家彦　主编



辽宁人民出版社

一九八四年·沈阳

大学数学系自学丛书

微 分 几 何

Weifen Jihe

王家彦 主编

辽宁人民出版社出版　辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号)　沈阳市第一印刷厂印刷

字数：440,000 开本：850×1168 1/32 印张：19½ 插页：2
印数：1—19,000
1984年10月第1版　1984年10月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　封面设计：安今生

统一书号：7090·265　定价：2.55元

出版说明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言 BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。



目　录

第一部分 微分几何

第一章 曲线论

曲线是微分几何研究的基本对象之一。在这一章里，我们主要讨论光滑曲线在某点邻域内的形状和性质。

§1 简单曲线弧及其解析表示

为了给出曲线的概念，我们先介绍一下关于从空间中任意点集到另一点集的映射知识。

设M，N是任意二点集，当它们之间存在某种对应关系f，使得M里的每个点X都有N中的一点$f(X)$与其对应时，我们就说给定了从集M到集N的一个映射f(*)，记作$f: M\to N$。点$f(X)$称为点X的象。集M中所有点的象$\{f(M)\}$称为M在N中的象。

如果给定N的一个映射f^{-1}，使集合N中的点$f(X)$与M里的点X相对应，则称映射f^{-1}为f的逆映射。

如果两个点集M和N，满足下列条件：

(i) 单值映射：M里的不同点，在N里有不同的象（同样，N里的不同点，在M里也有不同的象），即f（f^{-1}）是单值映射。若f，f^{-1}都是单值映射，这时，说M与N是一对一

(*) 是指一个变换或一种对应。

的。

(ii) 连续映射：对于M中的任意两点X，Y及任意的一个正数$\varepsilon>0$，总存在正数$\delta>0$，如果M中两点X，Y的距离$|X-Y|<\delta$，使得N中的两点$f(X)$，$f(Y)$的距离$|f(X)-f(Y)|<\varepsilon$，则称映射f为**连续映射**。

【定义】已给两个集合M和N，它们之间如果存在映射f，满足条件：

（1）f是一对一的；

（2）f和它的逆f^{-1}都是连续的。这时称M与N**同胚**。

例如，我们最熟悉的平移变换和旋转变换就是单值的连续映射，所以变换前后的两个点集$M=\{X\,|X=(x,\ y);\,x,y\in R\}$与$f(M)=\{f(X)\,|f(X)=(x+h,\ y+k)\}$是同胚的（$h$、$k$为常数）；$M=\{X|\,X=(x,y);\,x,y\in R\}$与$f(M)=\{f(X)|f(X)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ \ x\sin\theta+y\cos\theta);\ x,y,\ \theta\in R\}$也是同胚的（$\theta$为已知常数）。

下面，我们定义简单曲线弧。

【定义】已给一曲线弧L和一开直线段S，若L满足下列条件：

(i) L与S同胚；

(ii) L上每个点都存在切线，而且当切点沿L移动时，切线也随之连续转动。

这时，称L为**简单曲线弧**。简单曲线弧上的点叫**正常点**。由条件(ii)知简单曲线弧是光滑的。

假设线段S上点的坐标用参数$t(a<t<b)$表示，它在映射f下的象是曲线弧L，并设$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$是与线段S上的点t相对应的曲线弧上点的坐标，则函数组

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)\ \ (a<t<b)$$

称为曲线 L 的**参数方程**。

那么，在什么情况下，参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (a<t<b)$$

表示的是简单曲线弧呢？

【定理 1】已给曲线弧 L 的参数方程

$$L:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (t_1<t<t_2)\qquad(1\cdot1)$$

如果满足下列条件：

(a) 函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 是单值且C^1类（一阶导数存在且连续）的；

(b) $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 中，至少有一个一阶导数不为0，即 $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)>0$；

则方程(1·1)确定简单曲线弧。

（证明）只须证明满足定理条件 (a)，(b) 的方程 (1·1) 所确定的曲线弧 L 满足简单曲线弧定义的条件(i)，(ii)即可。

先证条件 (i)：取一线段 $\overline{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$同胚。设实数 t 是此线段上点M的坐标，即

$$M=M(t)$$

由方程(1·1) 给出了线段$\overline{AB}$ 与曲线弧 L，即 $\overset{\frown}{A'B'}$上点的对应关系。由定理条件(a)知函数$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$是单值连续的。所以对于给定任意的$\varepsilon>0$，

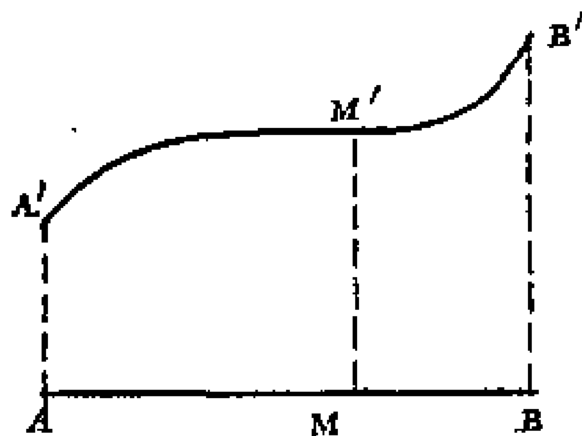


图 1 — 1

则有$\delta>0$，当 $|\overline{M_0(t_0)M_1(t_1)}|<\delta$时，便得 $|\overset{\frown}{M'_0M'_1}|<\varepsilon$，即 M_1' 在以M'_0为中心的ε球内。由此函数联系着的从线段 $\overline{AB}$ 到曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$上的对应是单值连续的。

要满足简单曲线弧定义中的同胚条件，尚须证明：从曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$到线段$\overline{AB}$上的对应也是单值连续的。为此，我们通过(1·1) 利用隐函数存在定理寻找一个从$\overset{\frown}{A'B'}$到$\overline{AB}$上的对应关系（函数），并且是单值连续的。

由定理条件(b)，我们设 $\dot{x}(t)\neq 0$ 并不失一般性，为利用隐函数定理来反解（1），我们做C^1类函数

$$F(x,\ t)=x(t)-x \qquad (1\cdot 2)$$

并且取 $t=t_0$ 时，对应的 $x(t)$ 值为x_0做为初始值（即$x(t_0)=x_0$）。这时，显然有下式成立

$$F(x_0,\ t_0)=x(t_0)-x_0=0$$

由定理条件 (a)，(b) 可知：$x(t)$是C^1类的，且导数

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{d}{dt}x(t)-\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t)\neq 0$$

所以(1·2) 式满足隐函数存在定理，故必存在一函数

$$t=\varphi(x)$$

并且当 $x=x_0$ 时，取 $\varphi(x_0)=t_0$。此函数在x_0点的邻域内是单值连续的。在这种情况下，一个x就确定一个t值，这个 t 值又确定一组 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，这时$\overset{\frown}{A'B'}$上的点$M'(x(t),y(t),z(t))$就对应$\overline{AB}$上唯一的$M(t)$ 点。所以，从曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$到线段$\overline{AB}$上点的对应也是单值连续的。

即由（1）式确定的曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$与线段$\overline{AB}$是同胚的。

其次，证明条件(ii)。

为方便起见，我们把 (1·1) 式写成向量式

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3 \quad (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3 \text{ 是基底})$$

由定理条件(b)可知

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_3\neq 0$$

从向量函数导数的几何意义来解释，即切向量存在。又由定理条件(a) 知，不仅导数存在，而且连续（C^1类）．所以，当点沿曲线L移动时， 切向量也随之连续转动， 故满足定义条件(ii)。

由此证得，满足条件 (a)，(b) 的参数方程 (1·1) 所确定的曲线弧是简单曲线弧．

从解析几何我们知道，空间曲线还可由两个曲面的交来确定，此时，它的方程可写做：

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$$

下面，我们再给出这样方程所表示的曲线是简单曲线弧的条件．

【定理 2】 设 $\varphi(x,y,z)$，$\psi(x,y,z)$ 都是变量x，y，z的正则函数（即它们存在连续偏导数），而空间曲线L上点是满足方程

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}\tag{1.3}$$

的点集．$M_0(x_0, y_0, z_0)$是这个点集里的任意一点，在该点矩阵

$$\begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}\tag{1.4}$$

的秩等于2．则点 M_0 (x_0, y_0, z_0) 存在一个邻域，使L上所有属于这个邻域的点，构成一条简单曲线弧．

（证明） 由已知条件，在点M_0矩阵(1·4)的秩为 2，就是说，它的二阶子式中至少有一个不等于0．设

$$\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} \neq 0$$

并不失一般性。由数学分析中的隐函数存在定理（多变数的）可知，在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的邻域中，存在一对单值可微函数

$$y = F(x), \quad z = \Phi(x) \qquad (1.5)$$

且当 $x = x_0$时，$y_0 = F(x_0)$，$z_0 = \Phi(x_0)$。

实际上，(1·5) 式就是 (1·3) 式在点M_0 邻域内的参数表示，这里只不过是取参数 $t = x$。

为求曲线(1·5)在M点的切向量，将方程组(1·3)关于 x求导，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \end{aligned}\right\}$$

即是

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x + \varphi_y F'(x) + \varphi_z \Phi'(x) = 0 \\ \psi_x + \psi_y F'(x) + \psi_z \Phi'(x) = 0 \end{aligned}\right\}$$

解方程组，得切向量坐标为 $\{1, F'(x), \Phi'(x)\}$(*)，显然它是 x 的连续函数，所以当点M沿曲线移动时，切向量也随之连续转动，即曲线弧是光滑的。

简单曲线弧的上述两种解析表示是可以互化的，其中最常用的还是参数表示式。

当给出曲线的一般表示式

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(*) 参看数学分析中偏导数的应用。

时，我们总可以把它化为参数表示。

〔例 1〕 将曲线方程：$x^3=3a^2y$，$2zx=a^2$ 化为参数表示式。

（解）设 $x=t$，由原方程解得

$$y=\frac{t^3}{3a^2},\quad z=\frac{a^2}{2t}$$

所以曲线的参数表示式为：

$$\boldsymbol{r}=\left\{t,\ \frac{t^3}{3a^2},\ \frac{a^2}{2t}\right\}$$

由于参数选取方法的不同，因此曲线的参数表示式并不唯一。

§2 曲线的弧长，微分不变量

§2.1 曲线的弧长

对于简单曲线弧，我们先引入弧长的概念。

【定义】 假设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 所确定的简单曲线弧为 $\overset{\frown}{AB}$，其中 $\boldsymbol{r}(a)$，$\boldsymbol{r}(b)$ 对应端点A、B，在A、B之间，按 t 值的增加顺序，取$n-1$个分点P_1, P_2，……，P_{n-1}，这样把曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 段小弧，把A 点记作 P_0，B点记作 P_n. 当把相邻的分点用直线段连结起来，就得到一条折线，其长度为

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$$

当分点无限加细（即 $\overline{P_{i-1}P_i}\to 0$）时，折线长$s_n$趋于一个确定的

极限，这个极限值叫做曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长.

下面，我们给出关于弧长的计算公式.

【定理 1】若已知曲线的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

则从 $t=a$ 到 $t=b$ 的弧长为

$$s=\int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt \qquad \left(\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \tag{2.1}$$

（证明）在数学分析中，我们已经证明过：当函数$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 具有连续的导数，且满足不等式 $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)>0$ 时，由此而确定的曲线从 $t=a$ 到 $t=b$的弧长由积分

$$s=\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

来计算.

又因为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$

所以 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}(t)\boldsymbol{e}_1+\dot{y}(t)\boldsymbol{e}_2+\dot{z}(t)\boldsymbol{e}_3$

而 $|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$

所以

$$s=\int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt$$

若以 $s(t)$ 表示从 $t=0$ 到 $t=t$ 的弧长，则本节(2·1)式可写作

$$s=\int_0^t |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt \tag{2.2}$$

此式表明s是t的单值连续函数.

对上式求导，得

$$\dot{s}(t)=|\dot{\boldsymbol{r}}|$$

因为简单曲线弧上的点都是正常点，即 $\dot{\boldsymbol{r}}\neq 0$，所以 $|\dot{\boldsymbol{r}}|>0$，

因此，弧长s又是t的连续的单调增函数。由反函数定理可知，$s(t)$ 存在连续的反函数 $t(s)$，只要把 $t(s)$ 代入曲线方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，便得以弧长为参数的曲线方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))$$

这样，每条曲线都存在弧长，因此总可以用 s 作为它的参数，所以把弧长 s 叫做曲线的自然参数．

引入弧长为参数后，由于曲线上的点与弧长的值之间建立一种一对一的连续对应，因此，借助此参数方程来研究曲线，会带来许多特殊的方便，其中最突出的特点是在曲线上引进了坐标。

【定理 2】已给曲线L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的参数t是自然参数 s 的充分必要条件是 $|\dot{\boldsymbol{r}}|=1$.

（证明）必要性：已知L的参数为自然参数．对于本节(2·1) 式取 $a=0$ $b=t$ 时，进行微分，则有

$$ds=|\dot{\boldsymbol{r}}|\,ds$$

所以 $$|\dot{\boldsymbol{r}}|=1$$

充分性：若 $|\dot{\boldsymbol{r}}|=1$，即是 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=1$，则 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=dt$.

积分上式，左端 $\displaystyle\int_0^t\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=s$

右端 $\displaystyle\int_0^t dt=t$

即 $$s=\int_0^t|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt=\int_0^t dt=t$$

故参数为自然参数．

注意：今后向径$\boldsymbol{r}$对自然参数s的导向量用$\boldsymbol{r}'$来表示，而对于非自然参数的导向量用$\dot{\boldsymbol{r}}$来表示．

现在，我们举例说明如何将曲线的一般参数 t换为自然参

数 s。

〔例 1〕试将圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ 的参数 t 换为自然参数 s.

（解）先求出从 $t=0$ 到任意点t的弧长：

因为 $\dot{\boldsymbol{r}}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

于是 $$s=\int_0^t|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

所以 $$t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

将上式代入原螺旋线方程，得

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

它就是以弧长s为参数的圆柱螺旋线的方程.

这里值得注意的是，有时在换参数的过程中，带来一些计算上的繁项或困难。所以在处理具体问题时，究竟选取那个参数为好，需要根据问题而定.

§2.2 微分不变量

在解析几何里我们知道，曲线和曲而用方程来表示，这样就使得对几何图形性质的研究通过坐标系转化为代数运算，从而以代数为工具解决了几何中的很多问题，促进了几何的发展。但是由于坐标系选择的任意性，往往使表示几何图形的方程复杂化，其中有的量代表图形的基本特征，而有的纯属于由坐标系选择的任意性而派生出来的。为探讨上方便，我们研究了坐标变换下的不变量和不变式，即挑出能够表示图形特征的量而抛弃与图形无关的量，使解析几何转化为坐标变换群下的不变量理

论，而使几何向前迈进一大步.

微分几何也是一样，古典微分几何是以向量分析为工具研究曲线和曲面在某一点邻域中的性质和形状的. 因此，曲线和曲面的解析表示式大都是用以数量为参数的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 来表示的，而且对几何图形特征的表示式大都是向量函数的各阶导数来表出的，尤其是在讨论具体问题时，往往是借助于曲线上某一点处的相伴坐标系来进行讨论的。这样由参数选择的任意性和坐标系选择的任意性，常常在解析式中产生和图形无关的一些量，而使解析表示式复杂化. 为研究上的方便，迫使我们必须寻求与曲线直接有关的弧长为参数和在相伴坐标系变换下的微分不变量.

为此，我们先来讨论向径的各阶导向量与坐标变换的关系.

【定理 3 】 向径 $\boldsymbol{r}(s)$ 的任何阶导向量都是坐标变换下的微分不变量.

（证明） 定理证明，分为两部分进行：

(i) 在平移变换下，向径$\boldsymbol{r}(s)$的各阶导向量是不变量.

事实上，假设有两个坐标系，一个是以 O 为原点，而另一个以 O^* 为原点，对于空间每一点 M 都有两个向径，如图

$$\boldsymbol{r}(s)=\overrightarrow{OM} \quad \boldsymbol{r}^*(s)=\overrightarrow{O^*M}$$

而三角形 OO^*M，按向量和的定义，有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O^*M}+\overrightarrow{OO^*}$$

即 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}^*(s)+\overrightarrow{OO^*}$

这就是向径在平移变换时的变换式，此式说明在平移变

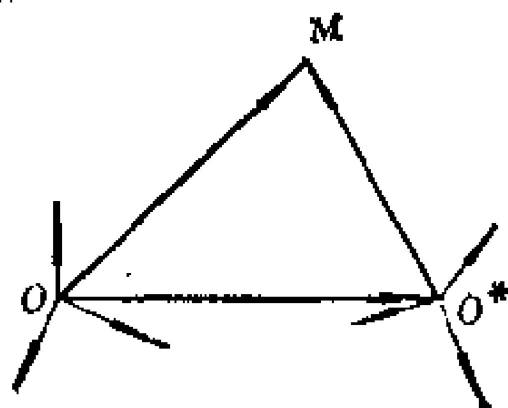


图 1—2

换下同一点M在不同坐标系中的向径只差一个常向量$\overrightarrow{OO^*}$．所以，它的导向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}$$

因此，在平移变换下导向量不变。

(ii) 在旋转变换下，向径的各阶导向量是不变量．

我们设向径 $\boldsymbol{r}(s)$ 的坐标为 $x(s)$，$y(s)$，$z(s)$，旋转后的坐标为 $\bar{x}(s)$，$\bar{y}(s)$， $\bar{z}(s)$，由解析几何知，二者之间有如下关系：

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}(s)=C_{11}x(s)+C_{12}y(s)+C_{13}z(s)\\ \bar{y}(s)=C_{21}x(s)+C_{22}y(s)+C_{23}z(s)\\ \bar{z}(s)=C_{31}x(s)+C_{32}y(s)+C_{33}z(s)\end{array}\right\}$$

其中 $C_{ij}(i,\ j=1,\ 2,3)$ 是坐标变换式的系数。此时，因为坐标原点没变，只是坐标轴的方向改变了；因此只引起它的坐标改变，而向径本身并不变．

由于 $\boldsymbol{r}(s)$ 的各阶导向量 $\boldsymbol{r}^{(n)}(s)$ 也随着向径 $\boldsymbol{r}(s)$ 所经过的旋转变换而变换，所以在两个坐标系中同一n阶导向量的坐标之间也满足上述的旋转变换公式，即

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}^{(n)}(s)=C_{11}x^{(n)}(s)+C_{12}y^{(n)}(s)+C_{13}z^{(n)}(s)\\ \bar{y}^{(n)}(s)=C_{21}x^{(n)}(s)+C_{22}y^{(n)}(s)+C_{23}z^{(n)}(s)\\ \bar{z}^{(n)}(s)=C_{31}x^{(n)}(s)+C_{32}y(s)^{(n)}+C_{33}z^{(n)}(s)\end{array}\right\}$$

如果这些导向量 $\boldsymbol{r}^{(n)}(s)$ 都看成是附着于曲线的对应点上，则它的长度和它与曲线相对位置，经旋转变换都是不变的。定理得证．

由上面定理可知，弧长

$$s=\int_{t_0}^{t}|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt$$

是坐标变换下的不变量。因此，引进弧长参数后，导向量 $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}''$, $\boldsymbol{r}'''$ 都是坐标变换下的不变量，并具有一定的几何意义。如 $|\boldsymbol{r}''| = \kappa$, $\dfrac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|^2} = \chi$, 就是以后要讲的曲率和挠率。它们都是由向径的各阶导数所构成的量，因此，都是坐标变换下的微分不变量。

§3 切 触 阶

若 (F) 和 $(\bar{F})$ 是空间中的两个图形，它们有一个公共点P_0，设P是 (F) 上P_0邻近的点，$h(P)$表示P点和图形$(\bar{F})$之间的距离，$d(P)$ 表示P_0 和P之间的距离，当 $P \to P_0$ 时，$h(P)/d^n(P)$ $(n \geqslant 1)$ 趋于零，而$h(P)/d^{n+1}(P) \neq 0$，则称这两个图形 (F) 和$(\bar{F})$ 在P_0 点具有 n 阶切触．切触阶可以衡量二图形在公共点P_0的邻域内互相贴近的程度．切触阶越高，二图形贴近程度越好．

研究二图形的接近程度是具有重要意义的，它不仅反映二图形几何位置的特点，更重要的是利用二图形在公共点具有n阶切触的条件可使讨论的某些问题简化．例如，曲线C_1是一条较复杂的曲线，我们要寻求C_1在某点P_0的性质时，可以取另一条与C_1有公共点P_0的熟知曲线C_2，使它与C_1 在P_0点有相同的精确程度，此时，C_2就可以代替C_1在所考虑点的性质，从而使问题得到简化．

下面，我们分别讨论曲线与曲线；曲线与平面的切触问题．

§3.1 曲线与曲线的切触

【定义】已给二曲线L_1与L_2有公共点P_0，在P_0点邻近，分别在L_1，L_2上取点P_1，P_2，且使$\overset{\frown}{P_0P_1}=\overset{\frown}{P_0P_2}=\Delta s$。显然$|\overrightarrow{P_1P_2}|$是一个无穷小量。如果以$\Delta s$为主无穷小，而$|P_1P_2|$为$\Delta s$的$n+1$阶无穷小时，即$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}|}{\Delta s^n}=0$，而$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}|}{\Delta s^{n+1}}\neq 0$，则称$L_1$与$L_2$在$P_0$点有$n$阶切触（图1—3）。

【定理1】已给二曲线L_1：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(s)$，$L_2$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(s)$它们有公共点$P_0(s)$，则$L_1$，$L_2$在$P_0$点有$n$阶切触的充分必要条件是

$$\boldsymbol{r}_1'=\boldsymbol{r}_2',\quad \boldsymbol{r}_1''=\boldsymbol{r}_2''\cdots,$$
$$\boldsymbol{r}_1^{(n)}=\boldsymbol{r}_2^{(n)},\ \boldsymbol{r}_1^{(n+1)}\neq\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}\quad(3.1)$$

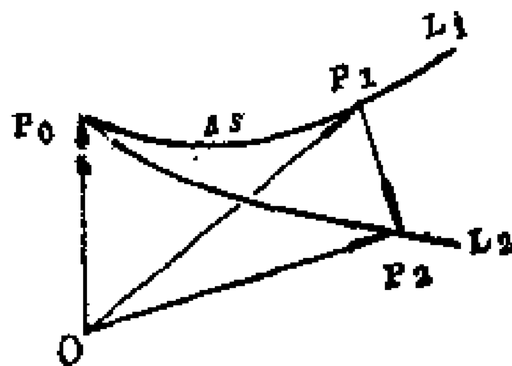


图1—3

（证明）将$\boldsymbol{r}_1(s)$，$\boldsymbol{r}_2(s)$在P_0点邻域按泰勒公式展开，得

$$\boldsymbol{r}_1(s)=\boldsymbol{r}_1(s_0)+\boldsymbol{r}_1'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}_1''(s_0)\Delta s^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}_1^{(n)}(s_0)\Delta s^n+\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(s_0)\Delta s^{n+1}+\cdots$$

$$\boldsymbol{r}_2(s)=\boldsymbol{r}_2(s_0)+\boldsymbol{r}_2'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}_2''(s_0)\Delta s^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}_2^{(n)}(s_0)\Delta s^n+\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(s_0)\Delta s^{n+1}+\cdots$$

作$\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s)$，则得

$$\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s)=(\boldsymbol{r}_2(s_0)-\boldsymbol{r}_1(s_0))+(\boldsymbol{r}_2'(s_0)-\boldsymbol{r}_1'(s_0))\Delta s$$

$$+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{r}_2''(s_0)-\boldsymbol{r}_1''(s0))\Delta s^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(\boldsymbol{r}_2^{(n)}(s_0)-\boldsymbol{r}_1^{(n)}(s_0))\Delta s^n+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(s_0)-\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(s_0))\Delta s^{n+1}+\cdots \tag{3.2}$$

必要性： 因为L_1，L_2在$P_0(s_0)$具有n阶切触，按定义，则

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}|}{\Delta s^{n+1}}\neq 0$$

即（3.2）式的第 $n+1$ 项

$$\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(s_0)-\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(s_0))\neq 0$$

而该项以前各项均为 0，所以必有

$$\boldsymbol{r}_1'(s_0)=\boldsymbol{r}_2'(s_0),\quad \boldsymbol{r}_1''(s_0)=\boldsymbol{r}_2''(s_0),\cdots,$$

$$\boldsymbol{r}_1^{(n)}(s_0)=\boldsymbol{r}_2^{(n)}(s_0),\quad \boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(s_0)\neq\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(s_0)$$

充分性： 如果对具有公共点P_0 的二曲线 L_1：$\boldsymbol{r}_1(s)$，L_2：$\boldsymbol{r}_2(s)$ 满足(3·1)式条件，则有

$$\boldsymbol{r}_2(s_0)-\boldsymbol{r}_1(s_0)\doteq\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(s_0)-\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(s_0))\Delta s^{n+1}\neq 0$$

于是

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\boldsymbol{r}_2(s_0)-\boldsymbol{r}_1(s_0)|}{\Delta s^{n+1}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}|}{\Delta s^{n+1}}\neq 0$$

按切触阶定义，$|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 是Δs的$n+1$阶无穷小，所以L_1与L_2在P_0点具有n阶切触。

§3.2 曲线与平面的切触

下面，我们研究曲线与平面有公共点时，它们在公共点处的接近程度。

【定义】已知一平面π和一曲线L，它们有公共点P_0，在L上P_0点的邻域中取一点P，使$\overset{\frown}{P_0P}=\Delta s$。以$\Delta s$为主无穷小，如果$P$点到平面$\pi$的距离$d$是对$\Delta s$的$n+1$阶无穷小，即$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{d}{\Delta s^n}=0$。而$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{d}{\Delta s^{n+1}}\neq 0$，则称曲线$L$与平面$\pi$在$P_0$点具有$n$阶切触（图1—4）

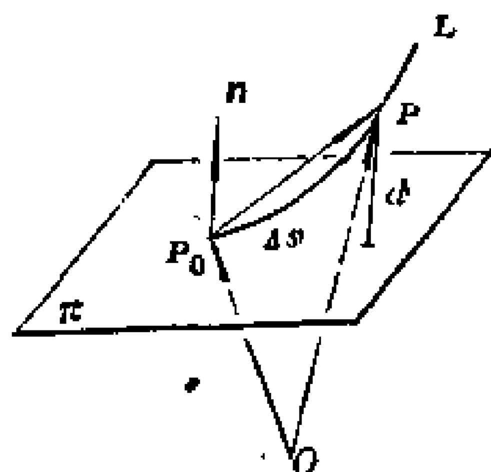


图1—4

【定理2】已知平面π：$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$，曲线$L$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，它们有公共点$P_0(s_0)$，则$L$与$\pi$在$P_0$具有$n$阶切触的充分必要条件是：

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'=0,\ \ \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}''=0,\cdots,\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}^{(n)}=0,$$

而$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}^{(n+1)}\neq 0$　　　　(3.3)

（证明）先将L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在$P_0$点按泰勒公式展开为

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(s_0)+\boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(s_0)\Delta s^2+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(s_0)\Delta s^n+\cdots\quad(3.4)$$

必要性：因为d是$\overrightarrow{P_0P_1}$在平面π的单位法向量$\boldsymbol{n}$上的射影的绝对值，$\therefore d=|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}|$，则得

$$d=|\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(s_0)\Delta s^2+\cdots)|$$

$$= \left| \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(s_0)\,\Delta s + \frac{1}{2!}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''(s_0)\,\Delta s^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n!}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^{(n)}(s_0)\,\Delta s^n + \frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^{(n+1)}(s_0)\,\Delta s^{n+1} + \cdots \right| \tag{3.5}$$

根据切触阶定义可知，如果L与π具有n阶切触，则必有

$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{d}{\Delta s^n}=0$，而 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{d}{\Delta s^{n+1}}\neq 0$，即 d是Δs 的 $n+1$ 阶无穷小。因此，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^{(n+1)}\neq 0$，它以前的各项均为0．即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''=0,\cdots,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^{(n)}=0,\ \text{而}\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^{(n+1)}\neq 0$$

充分性：设平面π和曲线L在公共点P_0有(3·3)式成立，则得

$$d=\left|\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^{(n+1)}\Delta s^{n+1}+\cdots\right|\neq 0$$

即 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{d}{\Delta s^n}=0$．而 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{d}{\Delta s^{n+1}}\neq 0$，所以$d$是$\Delta s$的$n+1$阶无穷小．由定义可知$L$与$\pi$在$P_0$点具有$n$阶切触．

〔例1〕求与已知曲线L：$\boldsymbol{r}(s)$ 在点 $P_0(s_0)$ 具有二阶切触的平面方程。

（解）设曲线L在P_0点按泰勒公式展开为

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(s_0)+\boldsymbol{r}'(s_0)\,\Delta s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(s_0)\,\Delta s^2+\cdots$$

设过P_0点的平面π的法向量为$\boldsymbol{n}$，因为π与L在点 P_0 处具有二阶切触，所以必有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'''\neq 0$$

即$\boldsymbol{n}$垂直于$\boldsymbol{r}'$与$\boldsymbol{r}''$所决定的平面．

设$\boldsymbol{\rho}$为平面上任一点的流动向径，$\boldsymbol{r}_0$为P_0点向径，则$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}''$是共面的，所以此平面方程为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'')=0$$

§4　曲线弧的相伴三棱形

在微分几何中，研究曲线上某一点邻域内的局部性质也是借助于坐标系来完成的，它是与曲线在给定各点具有较密切的几何关系的活动坐标系，曲线本身是这些坐标系的原点轨迹，其相当于x轴和 Oxy 坐标面的直线和平面，也是与曲线在该点贴近程度较好的直线和平面所构成的。因此，使用上述活动坐标系来讨论曲线上各点的局部性质是非常方便的。

下面，我们来定义上述坐标系——曲线相伴三棱形，并给出与其相关的概念。

【定义】已给曲线 $L: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，在它上面点$P$的单位向量

(i) $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau}$ 叫切向量（由§2 定理 2 可知$\boldsymbol{\tau}$是单位向量）。

(ii) $\dfrac{\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|}=\boldsymbol{\nu}$ 叫主法线向量。

(iii) $\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}$ 叫副法线向量。

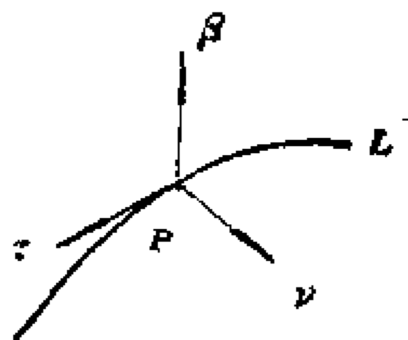


图 1—5

显然向量 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$满足条件.

(a) $|\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{\nu}|=|\boldsymbol{\beta}|=1$.

(b) $\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}$，

$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\nu}$.

满足条件 (a)，(b) 的向量组构成曲线L的基本向量组。这个基本向量组构成一个三棱形，由于这个三棱形在L上每个正常点都存在。这样的三棱形叫做相伴三棱形。曲线L在 $P(s)$ 点的相伴三棱形记作：$\{P(s);\ \boldsymbol{\tau}(s),\ \boldsymbol{\nu}(s),\ \boldsymbol{\beta}(s)\}$，在空间曲线弧的每一正常点 P 都有相应的相伴三棱形存在，当 P 点沿曲线运动时，这些三棱形可视为同一个三棱形随 P 点运动而处在

不同位置，因而又称相伴三棱形为曲线的活动标架。

如果，曲线L的参数不是自然数s时，那么，上面定义的相伴三棱形的基本向量 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的解析表示式又该怎样确定呢？

〔例 1〕求曲线L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 $P(t)$ 点的基本向量组$\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$。

〔解〕已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，由§2.1已知任意参数$t$与自然参数$s$的关系，于是我们设 $t=t(s)$，则L的方程可写作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s)) \tag{4.1}$$

(i) 求切向量$\boldsymbol{\tau}$：微分(4.1)式，得

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\dot{\boldsymbol{r}}t' \tag{4.2}$$

由切向量定义，$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$又由弧长公式，$s=\int|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt$。微分，得 $ds=|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt$

所以 $t'=\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$。于是切向量 $\boldsymbol{\tau}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$。

(ii) 求副法线向量$\boldsymbol{\beta}$：因$\boldsymbol{r}'=\dot{\boldsymbol{r}}t'$，所以$\boldsymbol{r}''=\ddot{\boldsymbol{r}}(t')^2+\dot{\boldsymbol{r}}t''$。又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''&=\dot{\boldsymbol{r}}t'\times(\ddot{\boldsymbol{r}}(t')^2+\dot{\boldsymbol{r}}t'')\\&=\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t')^3+\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}t't'' \qquad (\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}=0)\\&=\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t')^3\end{aligned}$$

由定义知 $\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|}$，而

$$|\boldsymbol{r}''|=|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\,(t')^3$$

所以
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{r}'\times\frac{\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t')^3}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\,(t')^3}\\=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}\end{aligned}$$

即 $$\boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}$$

(iii) 求主法线向量$\boldsymbol{\nu}$：因为$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}$，已知 $\boldsymbol{\tau}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$，

$\boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}$，所以

$$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}\times\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\ddot{\boldsymbol{r}}-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|\ |\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}$$

不难验证，这样求得的 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$，满足定义中条件 (a)，(b)，因此，它们构成L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 $P(t)$ 点的基本向量组.

【定义】过曲线上一点P，且以该点的

(i) 切向量为方向向量的直线，叫做曲线L 在点P 的**切线**.

(ii) 主法线向量为方向向量的直线，叫做曲线L在P点的**主法线**.

(iii) 副法线向量为方向向量的直线，叫做曲线L在P点的**副法线**.

【定理 1】若已给曲线 L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则在其上$P(s_0)$点的切线，主法线，副法线的方程分别为：

(i) 切线方程：$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s_0)+\lambda\boldsymbol{\tau}(s_0)$　(图1—6A)

(ii) 主法线方程：$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s_0)+\lambda\boldsymbol{\nu}(s_0)$　(图1—6B)

(iii) 副法线方程：$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s_0)+\lambda\boldsymbol{\beta}(s_0)$　(图1—6C)

其中，$\boldsymbol{\rho}$是直线（切线，主法线，副法线）上的流动向径，而$\boldsymbol{r}(s_0)$ 是$P(s_0)$ 点的向径，λ 为参数.

(证明) 这里只以切线为例，其余读者自己证明.

从切线的定义可知，它的方向向量是切向量，所以切线上任一点的流动向径$\boldsymbol{\rho}$与 $P(s_0)$ 点的向径$\boldsymbol{r}(s_0)$ 之差，即$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)$

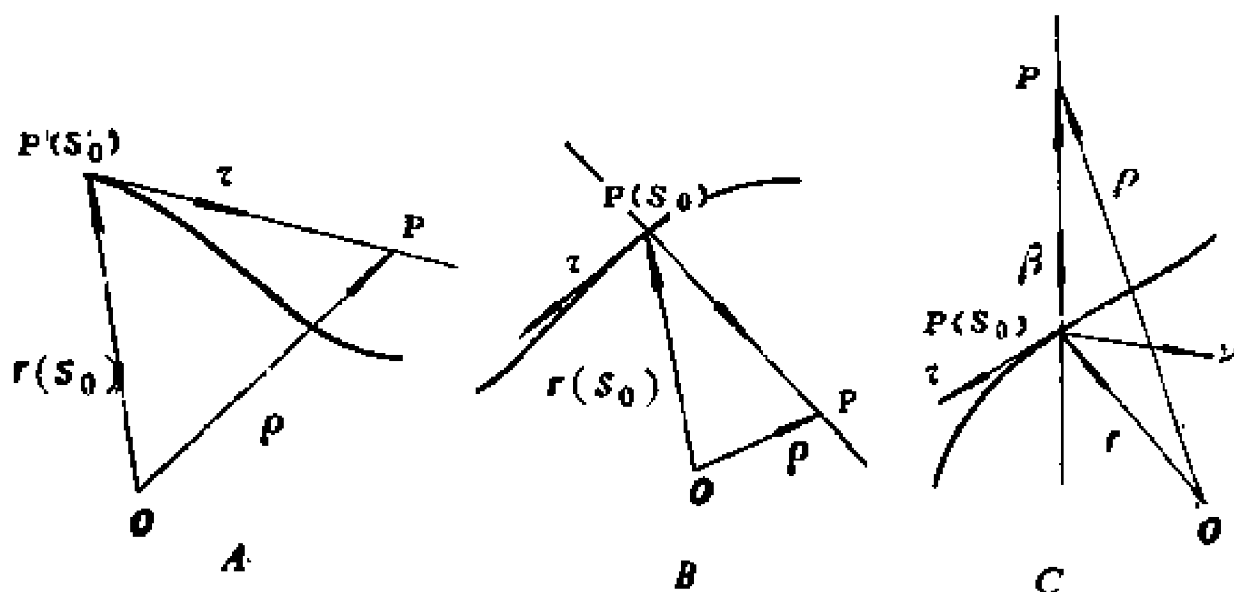


图 1—6

与 $\tau(s_0)$ 共线，所以

$$\rho - r(s_0) = \lambda\tau(s_0)$$

即

$$\rho = r(s_0) + \lambda\tau(s_0)$$

是曲线L在 $P(s_0)$ 点的切线的向量式方程.

为写出切线、主法线、副法线的坐标表示式，设流动向径ρ的坐标为 $\{x, y, z\}$，$r(s_0)$ 的坐标为 $\{x(s_0), y(s_0), z(s_0)\}$；$r'(s_0)$ 的坐标为 $\{x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0)\}$，$r''(s_0)$ 的坐标为 $\{x''(s_0), y''(s_0), z''(s_0)\}$ 则由上述方程可得

(i) 切线方程：

$$\frac{x - x(s_0)}{x'(s_0)} = \frac{y - y(s_0)}{y'(s_0)} = \frac{z - z(s_0)}{z'(s_0)}$$

(ii) 主法线方程：

$$\frac{x - x(s_0)}{x''(s_0)} = \frac{y - y(s_0)}{y''(s_0)} = \frac{z - z(s_0)}{z''(s_0)}$$

(iii) 副法线方程：

$$\frac{x - x(s_0)}{\begin{vmatrix} y'(s_0) & z'(s_0) \\ y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix}} = \frac{y - y(s_0)}{\begin{vmatrix} z'(s_0) & x'(s_0) \\ z''(s_0) & x''(s_0) \end{vmatrix}} = \frac{z - z(s_0)}{\begin{vmatrix} x'(s_0) & y'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) \end{vmatrix}}$$

【定义】在曲线L上一点P：

(i) 由切线和主法线所确定的平面叫做L在点P的**密切面**.

(ii) 由切线和副法线所确定的平面叫做L在P点的**从切面**.

(iii) 由主法线和副法线所确定的平面叫做L在点P的**法平面**（图1—7）

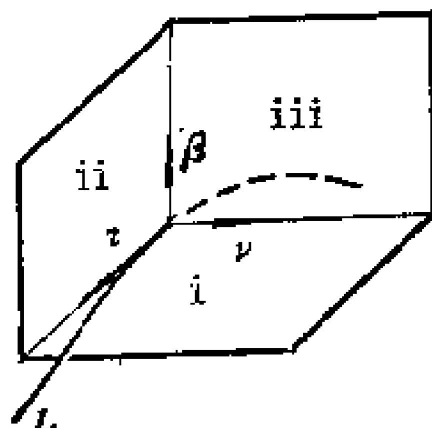


图1—7

【定理2】在曲线弧L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$上，点$P(s_0)$的法平面、从切面和密切面方程为：

$$
\begin{aligned}
&\text{(i) 法平面：}\ \boldsymbol{\tau}(s_0)\{\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)\}=0\\
&\text{(ii) 从切面：}\ \boldsymbol{\nu}(s_0)\{\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)\}=0 \qquad (4.4)\\
&\text{(iii) 密切面：}\ \boldsymbol{\beta}(s_0)\{\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)\}=0
\end{aligned}
$$

其中$\boldsymbol{\rho}$为平面上流动向径，而$\boldsymbol{r}(s_0)$为$P(s_0)$点的向径.

（证明）这里只证法平面，其余的留给读者自己证明.

设这个平面上流动点的向径为$\boldsymbol{\rho}$，由法平面定义可知，它是由主法线和副法线所确定的，所以此平面的法向量可取曲线的切向量. 又知它过L上点$P(s_0)$，因此，由解析几何知

$$\boldsymbol{\tau}(s_0)\perp\{\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)\} \quad \text{（如图1—8）}$$

即 $\boldsymbol{\tau}(s_0)\{\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)\}=0$

这就是所求曲线L在点$P(s_0)$的法平面的向量式方程.

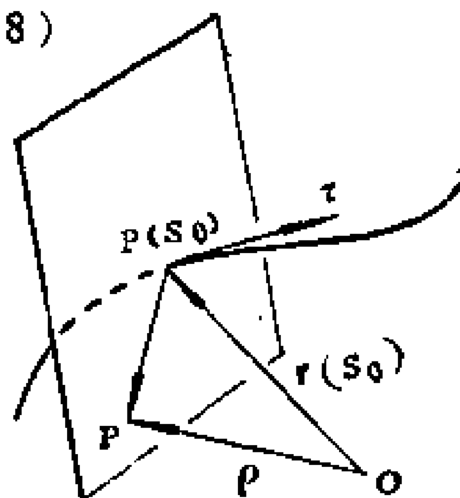


图1—8

为写出法平面、从切面、密切面方程的坐标表示式，设$\boldsymbol{\rho}$的坐标为$\{x, y, z\}$，$\boldsymbol{r}(s_0)$的坐标为$\{x(s_0), y(s_0), z(s_0)\}$，

$\boldsymbol{r}'(s_0)=\{x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0)\}$, $\boldsymbol{r}''(s_0)=\{x''(s_0), y''(s_0), z''(s_0)\}$，把它们代入（4）式，则上面三个平面的向量方程又可用坐标表示为：

（i）法平面：

$$x'(s_0)(x-x(s_0))+y'(s_0)(y-y(s_0))+z'(s_0)(z-z(s_0))=0$$

（ii）从切面：

$$x''(s_0)(x-x(s_0))+y''(s_0)(y-y(s_0))+z''(s_0)(z-z(s_0))=0$$

（iii）密切面：　　　　　　　　　　　　　　　　　　（4.5）

$$\begin{vmatrix} x-x(s_0) & y-y(s_0) & z-z(s_0) \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix}=0$$

〔例 2〕证明曲线 L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在$P(s_0)$ 的密切面，是过点 $P(s_0)$ 的切线和 $P(s_0)$ 的邻近点 $P(s_0+\Delta s)$ 的平面，当 $P(s_0+\Delta s)$ 沿曲线趋近于$P(s_0)$ 时，这个平面的极限位置的平面。

〔解〕已知L的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，点$P(s_0)$的向径为$\boldsymbol{r}(s_0)$，点 $P(s_0+\Delta s)$ 的向径为$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$．显然，过点$P(s_0)$ 的切线和L上$P(s_0)$邻近点 $P(s_0+\Delta s)$ 的平面方程为

$$(\boldsymbol{r}'(s)\times\overrightarrow{P(s_0)P(s_0+\Delta s)})\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0))=0 \quad (4.6)$$

其中$\boldsymbol{\rho}$是该平面的流动向径．由泰勒公式有

$$\overrightarrow{P_0(s_0)P(s_0+\Delta s)}=\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)$$

$$=\boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{r}''(s_0)+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta s^2$$

其中　$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$

面为过 $P(s_0)$ 的切线和邻近点 $P(s_0+\Delta s)$ 的平面的法向

量为：

$$\boldsymbol{r}'(s_0)\times\overrightarrow{P(s_0)P(s_0+\Delta s)}$$

$$\approx\boldsymbol{r}'(s_0)\times\left[\boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}''(s_0)+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta s^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'(s_0)\times(\boldsymbol{r}''(s_0)+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta s^2 \tag{4.7}$$

当$P(s_0+\Delta s)$ 沿L趋于 $P(s_0)$ 时，则$\Delta s\to 0$，这时(4.7)式的极限与 $\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0)$ 共线。

当 $\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0)\neq 0$ 时，可取它为L 上过 $P(s_0)$ 点切线和 $P(s_0+\Delta s)$ 点的平面的极限位置的平面的法向量，因此这个平面方程为

$$(\boldsymbol{r}'(s_0),\ \boldsymbol{r}''(s_0),\ \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0))=0$$

因为切线与主法线在这个平面上，根据密切面的定义可知，它是L在 $P(s_0)$ 点的密切面。

当 $\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0)=0$ 时，则 $P(s_0)$ 叫做曲线L 上的逗留点．一般地，在此点密切平面仍存在。这时L在点 $P(s_0)$ 的密切面的法向量可由 $\boldsymbol{r}(s)$ 的较高阶导向量与$\boldsymbol{r}'(s_0)$的外积：$\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\times\boldsymbol{r}^{(m)}(s_0)$ 来确定.

【推论】曲线L在点$P(s_0)$ 的密切面，是在点$P(s_0)$与L 至少具有二阶切触的平面.

（证明）设曲线L方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则它在点（$P'(s_0)$，的密切面方程为

$$(\boldsymbol{r}'(s_0),\boldsymbol{r}''(s_0),\ \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0))=0$$

其中法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0)$ （或 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}^{(m)}(s_0)$）.

因为是密切面，所以至少有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(s_0)=(\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0))\cdot\boldsymbol{r}'(s_0)=0$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''(s_0)=(\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0))\cdot\boldsymbol{r}''(s_0)=0$$

$$n\cdot r'''(s_0)=(r'(s_0)\times r''(s_0))\cdot r'''(s_0)\neq 0$$

又由曲线与平面在公共点 $P(s_0)$ 有n阶切触的充分必要条件可知，曲线L在点 $P(s_0)$ 的密切平面与L本身在该点至少具有二阶切触。

〔例 3〕求三次曲线L：$r\{t^3,\ t^2,\ t\}$ 在 $t=0$ 点的切线，主法线，副法线和密切平面方程。

（解）先求出L在 $t=0$ 点的基本向量：

因为 $\tau=\dfrac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$，而$\dot{r}=\{3t^2,\ 2t,\ 1\}$

所以 $\dot{r}_{t=0}=\{0,\ 0,\ 1\}$，$|\dot{r}|_{t=0}=1$

故在 $t=0$ 点切向量

$$\tau(0)=0i+0j+\kappa$$

$$\beta(0)=\frac{\dot{r}\times\ddot{r}}{|\dot{r}\times\ddot{r}|}=-i$$

$$\nu(0)=\beta(0)\times\tau(0)=-i\times\kappa=j$$

又 $r(0)=0$

所以L在 $t=0$ 点的

(i) 切线方程：$\rho=\lambda\kappa$；

(ii) 主法线方程：$\rho=-\lambda j$；

(iii) 副法线方程：$\rho=-\lambda i$；

(iv) 密切平面方程：$-i\rho=0$ 即 $X=0$。

§5 曲线的伏雷内—塞雷特(Frenet-Serret)公式

由上节知，在曲线 $r(s)$ 上每个正常点$P(s)$处，都存在互相正交的单位向量组 $\tau(s)$ $\nu(s)$，$\beta(s)$，而且构成右旋系。所

以当研究曲线在任意一点 $P(s)$ 的邻域内的性质时，可选取以 $P(s)$ 为原点的相伴三棱形为直角坐标系. 由于曲线上每一点都存在这样的坐标系，那么在$P(s)$的邻近点$P(s+\Delta s)$ 处的坐标系与 $P(s)$ 点的坐标系有什么关系呢？实质上，就是讨论：

当 $\Delta s\to 0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\tau}(s)}{\Delta s}$，　$\dfrac{\boldsymbol{\nu}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\nu}(s)}{\Delta s}$，

$\dfrac{\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\beta}(s)}{\Delta s}$ 与点 $P(s)$ 的基本向量 $\boldsymbol{\tau}(s),\boldsymbol{\nu}(s)$，$\boldsymbol{\beta}(s)$ 之间的关系. 即 $\boldsymbol{\tau}'(s)$，$\boldsymbol{\nu}'(s)$，$\boldsymbol{\beta}'(s)$ 与 $\boldsymbol{\tau}(s),\boldsymbol{\nu}(s)$，$\boldsymbol{\beta}(s)$ 的线性关系.

为此先证明一个引理.

【引理】：已知三个正交的单位向量 $\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t)$，则它们的导向量$\dot{\boldsymbol{e}}_1(t)$，$\dot{\boldsymbol{e}}_2(t)$，$\dot{\boldsymbol{e}}_3(t)$ 按 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的分解式为

(i) $$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\boldsymbol{e}_k(t)\qquad(i=1,\ 2,\ 3)\qquad(5.1)$$

(ii) 分解式的的系数阵是反对称阵，即

$$a_{ik}+a_{ki}=0$$

（证明）因为 $\boldsymbol{e}_1(t)$，$\boldsymbol{e}_2(t)$，$\boldsymbol{e}_3(t)$ 是三个正交的单位向量，所以可把它们看作三维空间中的一组基底. 因此对于三维空间的任何向量都可以按此基底分解，且分解式是唯一的. 也就是，$\dot{\boldsymbol{e}}_1(t)$，$\dot{\boldsymbol{e}}_2(t)$，$\dot{\boldsymbol{e}}_3(t)$ 可按 $\boldsymbol{e}_1(t)$，$\boldsymbol{e}_2(t)$，$\boldsymbol{e}_3(t)$ 分解. 即 (i) 式成立.

其次证明 (ii)：从 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 的单位、正交性可知，它们的内积为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k=\delta_{ik}\qquad(i,\ k=1,2,3)\qquad(5.2)$$

其中 $$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & 当\ i=k\\0 & 当\ i\neq k\end{cases}$$

因此，微分(5.2)式得

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\boldsymbol{e}_k+\frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt}\boldsymbol{e}_i=0 \tag{5.3}$$

将(5.1)式展开

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=a_{i1}\boldsymbol{e}_1+a_{i2}\boldsymbol{e}_2+a_{i3}\boldsymbol{e}_3$$

再与 $\boldsymbol{e}_k(k=1,2,3)$ 做内积，则得

当$k=1$，　$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\boldsymbol{e}_1=a_{i1}$

当 $k=2$，　$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\boldsymbol{e}_2=a_{i2}$

当 $k=3$，　$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\boldsymbol{e}_3=a_{i3}$

综上所述，则得

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\boldsymbol{e}_k=a_{ik} \tag{5.4}$$

对于(5.1)式再与 $\boldsymbol{e}_i$ 作内积

同理得：

$$\boldsymbol{e}_i\frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt}=a_{ki} \tag{5.5}$$

将(5.4)，(5.5)代入(5.3)，则得

$$a_{ik}+a_{ki}=0 \tag{5.6}$$

即以 $a_{ik}(i,\ k=1,2,3)$ 为元素所构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

是反对称阵。

【定理 1】设已给曲线L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的相伴三棱形为$\{P(s)$；

$\boldsymbol{\tau}(s)$, $\nu(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)\}$, 则它的导向量 $\boldsymbol{\tau}'$, ν', $\boldsymbol{\beta}'$ 接$\boldsymbol{\tau}$, ν, $\boldsymbol{\beta}$的线性分解式为：

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa \mathbf{v} \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta} \\ \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\chi\mathbf{v} \end{cases} \tag{5.7}$$

（证明）由前面引理可知，定理中的 $\boldsymbol{\tau}'$, $\mathbf{v}'$, $\boldsymbol{\beta}'$按$\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\beta}$的线性分解式的系数阵也必为反对称阵．现在计算阵的元素a_{ij}.

由于 $\boldsymbol{\tau}(s)$ 是曲线L的切向量，因此

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\cdot\boldsymbol{\beta} = a_{13}$$

又$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \boldsymbol{r}''(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|\mathbf{v}$ $\qquad \left(\mathbf{v} = \dfrac{\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|}\right)$

所以 $\qquad a_{13} = |\boldsymbol{r}''(s)|\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0$

因此，相伴三棱形 $\{P(s);\ \boldsymbol{\tau}(s),\ \mathbf{v}(s),\ \boldsymbol{\beta}(s)\}$ 的导向量 $\boldsymbol{\tau}'$, $\mathbf{v}'$, $\boldsymbol{\beta}'$ 的分解式的系数阵应当是

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

这里，令 $a_{12} = \kappa$, $a_{23} = \chi$, 则系数阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \chi \\ 0 & -\chi & 0 \end{pmatrix}$$

与此阵对应的方程組为

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\boldsymbol{\nu}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\chi\boldsymbol{\nu}$$

这个方程组首先由数学家伏雷内和塞雷特所提出，所以称为伏雷内—塞雷特公式．简记为F-S公式或曲线的基本公式．

特别是当L为平面曲线时，F-S公式为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}' = \kappa_r\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}' = -\kappa_r\boldsymbol{\tau}\end{cases} \tag{5.8}$$

其中κ_r表示相对曲率（详见学习指导）．

F-S 公式的基本意义，是表示相伴三棱形沿着曲线做微小运动时，它相对于原三棱形的转动状态．公式中系数κ，χ的几何意义在下节中给以说明．

〔例 1〕 试求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ b\theta\}$ 的F-S公式（其中 $a>0$，$a\cdot b\neq 0$）．

（解） 为计算方便，首先将参数θ换成自然参数s，由 2§ 例题已知

$$\boldsymbol{r}(s) = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\} \tag{5.9}$$

下面分别求出 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$ 并确定 κ，χ．

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\right\} \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{r}''(s) = \frac{a}{a^2+b^2}\left\{-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right\} \tag{5.11}$$

而 $|r''| = \frac{a}{a^2+b^2}$，所以

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|} = \left\{ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0 \right\} \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{ b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a \right\} \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{\beta}' = \frac{b}{a^2+b^2}\left\{ \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0 \right\} \tag{5.14}$$

比较(5.11) 与 (5.12)，得

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$$

比较 (5.12) 和 (5.14)，得

$$\chi = \frac{b}{a^2+b^2}$$

于是得圆柱螺线的F-S公式为

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dfrac{a}{a^2+b^2}\mathbf{v} \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{ds} = -\dfrac{a}{a^2+b^2}\boldsymbol{\tau} + \dfrac{b}{a^2+b^2}\boldsymbol{\beta} \\ \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\dfrac{b}{a^2+b^2}\mathbf{v} \end{cases}$$

而且，它的系数κ与χ都是常数．即$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$，　$\chi = \frac{b}{a^2+b^2}$．

§6　曲线的曲率和挠率

§6.1　曲率

对于两条不同的曲线或同一条曲线上两个不同点，一般说来，曲线的弯曲状态不一定是一样的，如直线没有弯曲；半径较大的圆弧弯曲程度较小；半径较小的圆弧的弯曲程度较大等，为给出曲线在已知点处弯曲程度的数值估计，我们先引入曲率的概念。

【定义】假设 $P(s)$ 为简单曲线L上的任一点，$P_1(s+\Delta s)$ 是曲线L上$P(s)$ 的一个邻近点。用$\Delta\theta$表示曲线在点$P(s)$ 和点 $P_1(s+\Delta s)$ 二切线间的夹角，而 $|\Delta s|$ 表示从$P(s)$到$P_1(s+\Delta s)$ 之间的弧长（如图1—9），当 $P_1\to P$ 时比值 $\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$ 的极限值，称为曲线L在P点的曲率。即

$$曲率=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

它的倒数叫L 在点 $P(s)$ 的曲率半径。

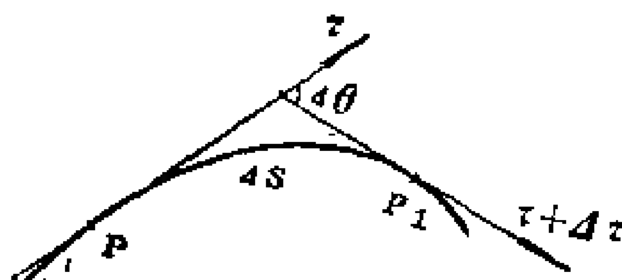


图1—9

【定理1】曲线 L在点P的曲率等于 F-S 公式中系数 $\kappa(s)$ 在该点的值。

（证明）由F-S公式中第一式得

$$\left|\frac{d\tau}{ds}\right|=|\kappa\nu|=|\kappa|=\kappa\quad(\because\kappa\geqslant 0)$$

将图1—9中的二单位切向量 $\tau(s)$，$\tau(s)+\Delta\tau$，移到单

位圆O（图1—10）上，并取$\overrightarrow{OA}=\tau(s)$，$\overrightarrow{OB}=\tau+\Delta\tau$，则$\angle AOB=\Delta\theta$，$\overrightarrow{AB}=\Delta\tau$。由于$P_1$点的变化，$P$与$P_1$二点间的弧长$\Delta S$也随之变化。因此，二切线的夹角$\Delta\theta$和切向量的增量$\Delta\tau$也随之变化。故$\Delta\tau$是$\Delta\theta$的函数，$\Delta\theta$又是$\Delta s$的函数。在单位圆

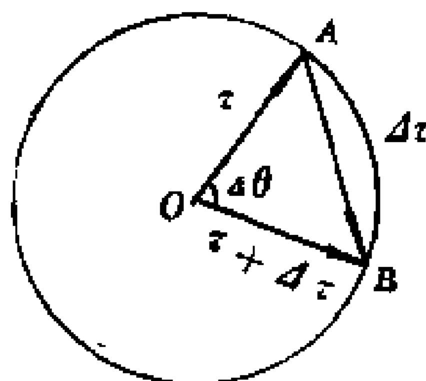


图1—10

上，$\overset{\frown}{AB}=\Delta\theta$，所以

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}\right|\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

而 $$\lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}\right|=\lim_{AB\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\overset{\frown}{AB}}\right|=1$$

所以 $$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

但 $$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\tau}{ds}\right|=|\kappa\mathbf{V}|=|\kappa|$$

又因为 $\kappa\geqslant 0$（根据定义），

所以 $$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

即L上点$P(s)$的曲率。

下面，我们来求出简单曲线弧在任意点的曲率计算公式。

【定理2】若简单曲线弧L的参数为自然参数s，则曲线$L:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在$P(s)$点的曲率计算公式为

$$\kappa = |\boldsymbol{r}''|$$

（证明）从F·S公式的第一式可知

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}'}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right| = |\boldsymbol{r}''| \qquad (6.1)$$

【推论1】若简单曲线弧 L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的参数为一般参数，则在 P 点的曲率计算公式为

$$\kappa = |\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}| / |\dot{\boldsymbol{r}}|^3$$

（证明）由上面定理2可知 $\kappa=|\boldsymbol{r}''|$，当取 $t=t(s)$ 时，L的方程变为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))$。由§4例1的计算过程中可知

$$|\boldsymbol{r}''| = |\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''| = |\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\,(t')^3, \quad 又 t'=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$

所以

$$\kappa = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3} \qquad (6.2)$$

从上述定理不难得到：若曲线L的表示式为$\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),\ y(s),\ z(s)\}$，或 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ 时，则曲率的计算公式的坐标表示式分别为

$$\kappa = |\boldsymbol{r}''| = \sqrt{x''^2(s)+y''^2(s)+z''^2(s)} \qquad (6.3)$$

$$\kappa = |\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}| / |\boldsymbol{r}|^3 = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{y} & \ddot{z}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dot{z} & \dot{x}\\ \ddot{z} & \ddot{x}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}^2}}{(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2})^3}$$

$$(6.4)$$

〔例1〕试证一曲线是直线的充分必要条件是 $\kappa\equiv0$。

（证明）必要性：如果 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是直线，则它的切向量$\dot{\boldsymbol{r}}$必为定向向量，从$\dot{\boldsymbol{r}}$为定向向量的条件可得 $\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\equiv0$。所以 $|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\equiv0$，从 $\kappa=|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|/|\dot{\boldsymbol{r}}|^3\equiv0$ 可知

$$\kappa\equiv0$$

充分性：如果 $\kappa\equiv 0$，因为 $\dot{\boldsymbol{r}}\neq 0$，所以由曲率公式可知，$|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\equiv 0$，即 $\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\equiv 0$，因此，$\dot{\boldsymbol{r}}$必为定向向量，即

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lambda\boldsymbol{e}\qquad(\boldsymbol{e}\text{ 为单位常向量})$$

积分上式得

$$\boldsymbol{r}=t\lambda\boldsymbol{e}+\mathbf{C}\qquad(\mathbf{C}\text{ 是积分常向量})$$

上式是直线方程，其中 t 为参数.

〔例 2〕求曲线 $\boldsymbol{r}=\{e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}t\}$ 在任意点$P(t)$ 的曲率。

（解）已知曲线在任意点的曲率公式为

$$\kappa=|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\,/\,|\dot{\boldsymbol{r}}|^3$$

因为 $\qquad\dot{\boldsymbol{r}}=\{e^t,\ -e^{-t},\ \sqrt{2}\}$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\{e^t,\ e^{-t},\ 0\}$$

所以 $\qquad\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\{-\sqrt{2}e^t,\ \sqrt{2}e^t,\ 2\}$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{2e^{-2t}+2e^{2t}+4}=\sqrt{2(e^{-t}+e^t)^2}$$
$$=\sqrt{2}\,(e^{-t}+e^t)$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|^3=(\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2})^3=(e^t+e^{-t})^3$$

代入曲率公式，则得

$$\kappa=\sqrt{2}\,(e^t+e^{-t})/(e^{t}+e^{-t})^3=\sqrt{2}/(e^t+e^{-t})^2$$

在许多问题的讨论中，我们把曲线L在所考虑的点P的邻近，用这样的一个圆来代替：这个圆与曲线L在P点相切，并且在此点与L有相同的曲率，其圆心在主法线正向上，半径长等于该点曲率的倒数，此圆称为曲线L在P点的**密切圆**．又名**曲率圆**．它的中心称为曲线L在点P的**曲率中心**．

由于密切圆与曲线L在P点相切，即它们有相同的切向量；又在切点处曲率相同，即二阶导向量也相等；所以密切圆

一定在曲线切点处的密切平面上，同时我们又可以从切触阶的观点，给出密切圆的性质：与曲线L在P点有至少二阶切触的圆为密切圆。

一般地，对曲线L上的非逗留点（$\kappa\neq0$）处，密切圆唯一地存在。对于曲线L上的一个逗留点($\kappa=0$)，密切圆不存在；此刻也可认为曲率中心在无穷远点，曲率半径等于无穷大的密切圆，即为直线。

〔例3〕求抛物线$y=x^2$在（0，0）点的密切圆的方程。

（解）因为抛物线$y=x^2$在（o，o）点的主法线正向为y轴正向，所以密切圆的中心坐标为（o，b），同时它的半径也是b。由此，我们设密切圆方程形如

$$x^2+(y-b)^2=b^2$$

并且设抛物线为L_1，密切圆为L_2，则

$$L_1:\ \boldsymbol{r}=\{t,\ t^2\}$$

$$L_2:\ \boldsymbol{r}=\{t,\ b\pm\sqrt{b^2-t^2}\}$$

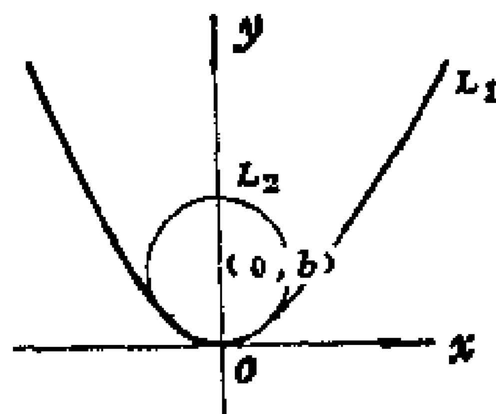


图 1—11

因为L_2与L_1在(o，o)点有二阶切触，所以，

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1=\{1,\ 2t\}_{t=0}=\{1,\ 0\}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=\{0,\ 2\}_{t=0}=\{0,\ 2\}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_2=\{1,\ \pm t(b^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\}_{t=0}=\{1,\ 0\}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\{0,\ \pm(b^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\pm t(b^2-t^2)^{-\frac{3}{2}}\}_{t=0}=\left\{0,\ \pm\frac{1}{b}\right\}$$

由 $\ddot{\boldsymbol{r}}_1=\ddot{\boldsymbol{r}}_2$，得，$b=\pm\dfrac{1}{2}$ $\left(b=-\dfrac{1}{2}\text{舍去}\right)$

从而得密切圆方程为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

或 $$x^2+y^2-y=0$$

§6.2 挠率

对于一般的空间曲线上的不同两点，不仅弯曲程度不同，而且曲线向空间扭曲程度也不一定一样。如平面曲线不向空间扭曲，在它上面的每一点处的副法线向量总是平行的（如图1—12）。当曲线离开平面扭向空间时（图1—13），L上不同两点 $P(s)$ 和$P(s+\Delta s)$ 处的二副法线向量构成一个角度，即是当点$P(s)$ 按着s增加的方向移动时，对应的绕曲线L的副法线向量旋转所转过的角度。我们利用此角对弧长的变化率来描述空间曲线的扭转程度.

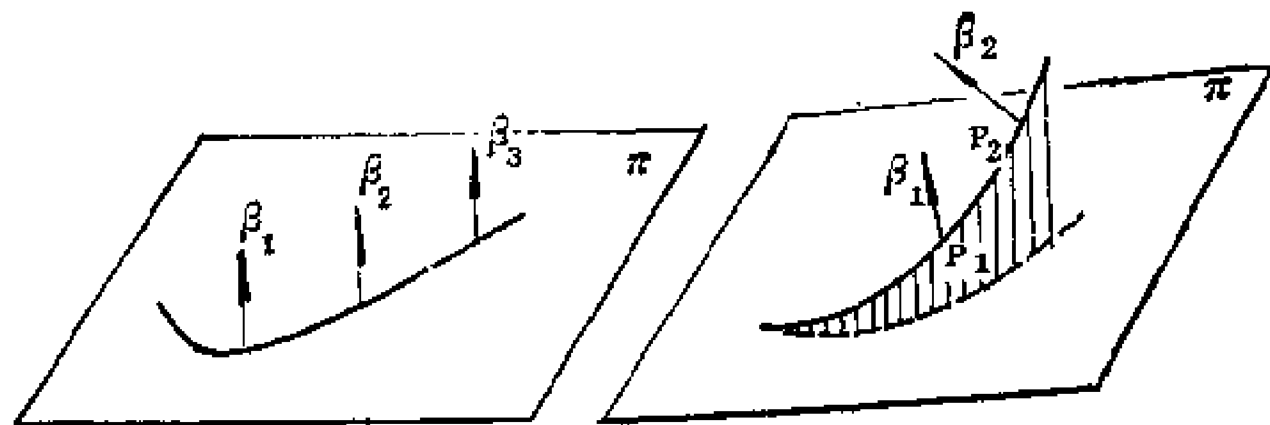


图 1—12　　　　图 1—13

为讨论问题的需要，这里先对二副法线向量夹角$\Delta\varphi$ 的方向做如下规定：若在L上$P(s)$ 点的相伴三棱形为 $\{P(s);\boldsymbol{\tau}(s),\boldsymbol{\nu}(s),\boldsymbol{\beta}(s)\}$，在 $P_1(s+\Delta s)$ 点的相伴三棱形为$\{P_1;\ \boldsymbol{\tau}_1,\ \boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1\}$，先使二相伴三棱形的顶点 $P(s)$，$P_1(s+\Delta s)$ 重合，$\boldsymbol{\tau}_1$ 与$\boldsymbol{\tau}$重合；然后从切向量$\boldsymbol{\tau}$的正向去看，如果由$\boldsymbol{\beta}$到$\boldsymbol{\beta}_1$ 的旋转方向为逆时针（顺时针）时，则$\Delta\varphi$为正（负），如图(1—14(a)) $\Delta\varphi>0$。(1—14(b)) $\Delta\varphi<0$。

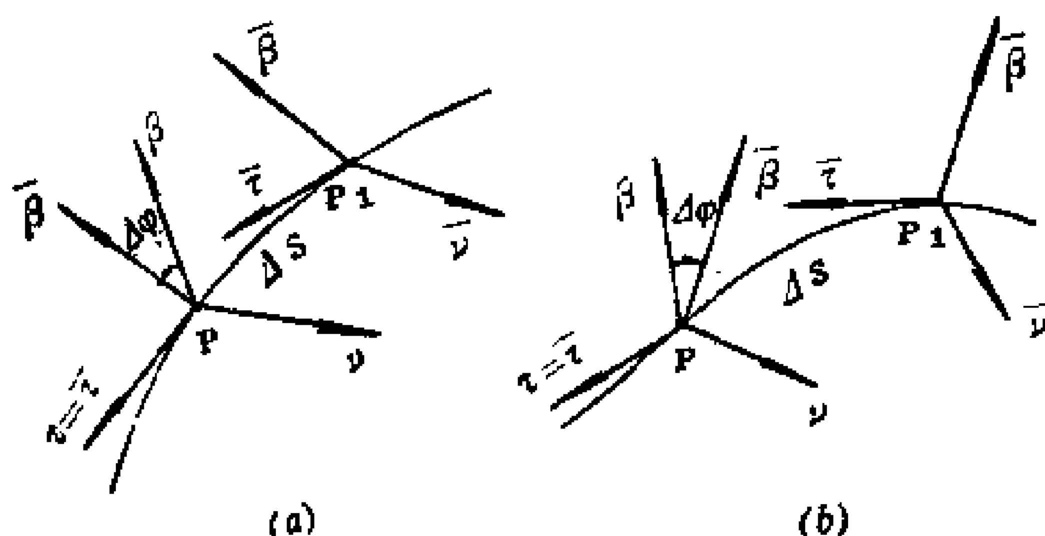


图 1—14

【定义】设 $P(s)$ 为曲线L上任一点，$P_1(s+\Delta s)$ 为 L 上 $P(s)$ 点的邻近点，$\Delta\varphi$表示 $P(s)$ 点副法线向量$\boldsymbol{\beta}$与$P_1(s+\Delta s)$点的副法线向量$\boldsymbol{\beta}_1$间的夹角，$|\Delta s|$ 表示P到P_1的弧长，当 P_1 沿着曲线趋近P 时，比值$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$的极限值称为曲线$L$在$P(s)$ 点的挠率．即

$$挠率=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

概括地说：挠率是曲线的副法线方向对弧长的变化率．

由 $\Delta\varphi$ 方向的规定，可知挠率有两种可能，即大于零或小于零，特殊地等于0 （平面曲线）．

下面，给出挠率与F-S公式的关系．

【定理 3 】简单曲线弧 L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 $P(s)$ 的挠率的绝对值等于F-S公式中第三式的系数χ在该点的绝对值．

（证明）设简单曲线弧L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在点 $P(s_0)$，$P_1(s_0+\Delta s)$的单位副法线向量为$\boldsymbol{\beta}(s_0)$和 $\boldsymbol{\beta}(s_0)+\Delta\boldsymbol{\beta}$．

我们把它们放在空间的某一单位圆O上，如图 1 —15，

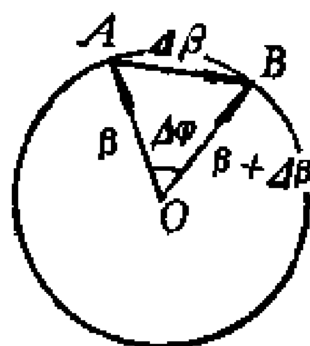
$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\beta}(s_0)$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}(s_0)+\Delta\boldsymbol{\beta}$．

$\overrightarrow{AB}=\Delta\boldsymbol{\beta}$，$\overset{\frown}{AB}=\Delta\varphi$，因此

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\Delta\varphi}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\Delta\varphi}\right|\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$



而 $$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\Delta\varphi}\right|=\lim_{AB\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\overset{\frown}{AB}}\right|=1$$

所以 $$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

但是 $$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|=|-\chi|$$

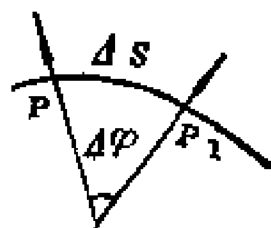


图 1 —15

所以 $$|-\chi|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\text{挠率的绝对值.}$$

【定理 4】若简单曲线弧 L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的参数为自然参数 s，则在点 $P(s_0)$ 的挠率计算公式为

$$\chi=(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')/|\boldsymbol{r}''|^2$$

（证明）将F-S公式中第三式与$\mathbf{v}$做内积，得 $\boldsymbol{\beta}'\cdot\mathbf{v}=-\chi$. 所以 $\chi=-\boldsymbol{\beta}'\cdot\mathbf{v}$，由此式看出，$\chi$值可由 $-\boldsymbol{\beta}'\cdot\mathbf{v}$ 求得. 为此须先说明由 $-\boldsymbol{\beta}'\cdot\mathbf{v}$求得的$\chi$值是符合挠率定义的.

因为$\boldsymbol{\beta}'$为单位向量$\boldsymbol{\beta}$的导向量，所以，$\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{\beta}=0$.

设 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 和$\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)$ 分别为L在$P(s)$和 $P_1(s+\Delta s)$ 点的副法线向量，它们的交角为$\Delta\varphi$，这时

$$\boldsymbol{\beta}'=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\beta}(s)}{\Delta s}$$

而由图 1 —15和挠率定义，有

$$|\beta'| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\beta(s+\Delta s)-\beta(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right|$$

$$= \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}}{\frac{|\Delta\varphi|}{2}}\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

而

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}}{\frac{|\Delta\varphi|}{2}} = 1$$

所以 $$|\beta'| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\beta}{ds}\right| = |-\chi| \qquad (6.5)$$

又由F—S公式 $\beta' = -\chi v$，得$\chi = -\beta' v$，所以β'与v共线，而$\beta' \perp \beta$，故β'总在v，β决定的法平面上，且β'与v的夹角θ只有两种可能 $\theta = 0°$ 或 $\theta = 180°$，所以

$$\chi = -\beta' v = -|\beta'| \cdot |v| \cos\theta = -|\beta'|\cos\theta$$

$$= \begin{cases} -|\beta'| & \text{当 } \theta = 0° \\ |\beta'| & \text{当 } \theta = 180° \end{cases} \qquad (6.6)$$

比较（6.5）和（6.6）式，得出，由$-\beta' \cdot v$所决定的χ值，正好表示曲线的副法线方向对弧长的变化率，由此证得，这两个χ值是等价的。

最后，由 $\chi = -\beta' \cdot v$ 导出以自然参数s为参数的曲线 L：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 在任意点的挠率计算公式，

已知 $$\boldsymbol{r}' = \tau$$

$$\boldsymbol{r}'' = \tau' = \kappa v$$

$$\boldsymbol{r}''' = \kappa' v + \kappa v' = \kappa' v + \kappa(-\kappa\tau + \chi\beta)$$

所以 $$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \tau \times \kappa v = \kappa(\tau \times v) = \kappa\beta$$

$$(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''=\kappa\boldsymbol{\beta}\cdot[\kappa'\boldsymbol{\nu}+\kappa\chi\boldsymbol{\beta}-\kappa^2\boldsymbol{\tau}]=\kappa^2\chi$$

由此得

$$\chi=\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''}{\kappa^2}=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}''|^2}$$

〔定理 5〕若曲线 L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的参数为一般参数 t，则它在某一点 $P(t)$ 的挠率为

$$\chi=(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})/|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|^2$$

（证明）设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))$，则

$$\boldsymbol{r}'=\dot{\boldsymbol{r}}t'$$

$$\boldsymbol{r}''=\ddot{\boldsymbol{r}}t'^2+\dot{\boldsymbol{r}}t''$$

$$\boldsymbol{r}'''=\dddot{\boldsymbol{r}}t'^3+3\ddot{\boldsymbol{r}}t't''+\dot{\boldsymbol{r}}t'''$$

所以 $(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')$

$$=[\dot{\boldsymbol{r}}t'\times(\ddot{\boldsymbol{r}}t'^2+\dot{\boldsymbol{r}}t'')]\cdot[\dddot{\boldsymbol{r}}t'^3+3\ddot{\boldsymbol{r}}t't''+\dot{\boldsymbol{r}}t''']$$

$$=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})t'^3\cdot[\dddot{\boldsymbol{r}}t'^3+3\ddot{\boldsymbol{r}}t't''+\dot{\boldsymbol{r}}t''']$$

$$=(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\cdot\dddot{\boldsymbol{r}}(t')^6$$

又 $|\boldsymbol{r}''|^2=|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2=|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|^2(t')^6$

所以 $\chi=(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})/|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|^2$

〔例 4〕试证一非直线的空间曲线 L 是平面曲线的充分必要条件是 $\chi\equiv0$。

（证明）必要性：如果 L 是平面曲线，则 L 的切向量必平行固定平面。从平行固定平面的向量函数的性质知

$$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})\equiv0$$

又因为 L 不是直线，所以

$$|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|\neq0$$

所以 $$\chi=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|^2}\equiv0$$

即 $\chi\equiv0$

充分性：已知L不是直线，因此 $|\dot{r}\times\ddot{r}|\neq 0$，又知 $\chi\equiv 0$，从挠率公式知 $(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r})\equiv 0$

所以 $\dot{r}$必为平行固定平面的向量函数。设这个固定平面的法向量为$\boldsymbol{n}$时，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

即
$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$$

积分上式，得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=c \quad (c\text{是积分常数})$$

即
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-c=0$$

从上式看出，曲线L的向径$\boldsymbol{r}$满足平面方程，所以曲线L是平面曲线。

从曲率和挠率的计算公式，容易得出：若两条曲线$\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$ 在公共点$t=t_0$处至少具有三阶切触，则在该点的曲率、挠率都相等。

§7 曲线在正常点邻域中的结构

利用F—S 公式，我们讨论曲线在正常点邻域中的形状。

【定理 1】 曲线 $L:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在正常点 $P(s_0)$ 的相伴三棱形中的展开式为

$$\begin{aligned}x&=s-\frac{1}{6}\kappa^2s^3+\cdots\\ y&=\frac{1}{2}\kappa s^2+\frac{1}{6}\kappa's^3+\cdots\\ z&=\frac{1}{6}\kappa\chi s^3+\cdots\end{aligned}\qquad(7.1)$$

（证明）设曲线L上在正常点$P(s_0)$的相伴三棱形为$\{P(s_0)$;

$\tau(s_0)$, $\boldsymbol{r}(s_0)$, $\boldsymbol{\beta}(s_0)\}$, $P_1(s_0+\Delta s)$ 为$P(s_0)$ 的邻近点，则 $\overrightarrow{PP_1}=\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)$。把向量函数$\boldsymbol{r}(s)$ 的增量$\overrightarrow{PP_1}$按Δs 的幂展成泰劳级数，得

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(s_0)\Delta s^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{r}'''(s_0)\Delta s^3+\cdots\cdots \tag{7.2}$$

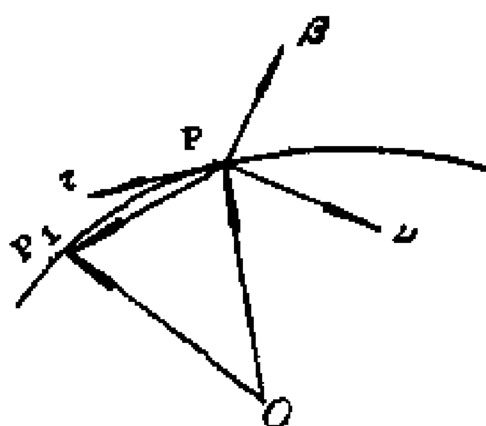


图1—16

又由 F—S 公式知

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau},\quad \boldsymbol{r}''=\kappa\boldsymbol{\nu},\quad \boldsymbol{r}'''=\kappa'\boldsymbol{\nu}-\kappa^2\boldsymbol{\tau}+\kappa\chi\boldsymbol{\beta}\cdots\cdots$$

将它们代入(7.2)式，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP_1}&=\boldsymbol{\tau}\Delta s+\frac{1}{2}\kappa\boldsymbol{\nu}(\Delta s)^2+\frac{1}{6}[\kappa'\boldsymbol{\nu}-\kappa^2\boldsymbol{\tau}+\kappa\chi\boldsymbol{\beta}](\Delta s)^3+\cdots\\&=\left(\Delta s-\frac{1}{6}\kappa^2(\Delta s)^3+\cdots\right)\boldsymbol{\tau}+\\&\quad+\left(\frac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2+\frac{1}{6}\kappa'(\Delta s)^3+\cdots\right)\boldsymbol{\nu}\\&\quad+\left(\frac{1}{6}\kappa\chi(\Delta s)^3+\cdots\right)\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{7.3}$$

因为讨论在正常点 $P(s_0)$ 附近的曲线形状，所以可以取P为计算弧长的初始点，即 $s_0=0$，则在点 $P(0)$ 有 $\boldsymbol{r}(0)=0$，再令$\Delta s=s$，这时（7．3）式可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(s)&=\left(s-\frac{1}{6}\kappa^2s^3+\cdots\right)\boldsymbol{\tau}+\left(\frac{1}{2}\kappa s^2+\frac{1}{6}\kappa's^3+\cdots\right)\boldsymbol{\nu}\\&\quad+\left(\frac{1}{6}\kappa\chi s^3+\cdots\right)\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{7.4}$$

若取曲线在P点的切线、主法线、副法线做为直角坐标系的 x，y，z轴，则

$$\boldsymbol{r}(s) = x\boldsymbol{\tau} + y\boldsymbol{\nu} + z\boldsymbol{\beta}$$

于是，得曲线的展开式：

$$\begin{aligned} x &= s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3 + \cdots \\ y &= \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\kappa' s^3 + \cdots \\ z &= \frac{1}{6}\kappa\chi s^3 + \cdots \end{aligned} \tag{7.5}$$

也称此式为波开特（Bouquet）公式。

假设 $\kappa \neq 0$，$\chi \neq 0$，那么，我们只取（7.5）式中第一项，就可得 $P(s_0)$ 点的近似曲线 L_1：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(s)$ 的展开式为

$$\begin{cases} x_1 \doteq s \\ y_1 \doteq \dfrac{1}{2}\kappa s^2 \\ z_1 \doteq \dfrac{1}{6}\kappa\chi s^3 \end{cases} \tag{7.6}$$

它与原曲线 L 在 $P(s_0)$ 处有相同的曲率和挠率，及相同的相伴三棱形，于是它们在 $P(s_0)$ 点处的密切面、法平面及从切面都一致。

【推论 1】 曲线 L：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 在正常点 $s = s_0$ 的密切平面、从切面、法平面上的投影曲线为

(i) 在密切平面上的投影：

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\kappa x^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{（抛物线）}$$

(ii) 在从切面上的投影：

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = \dfrac{1}{6}\kappa\chi x^3 \end{cases} \qquad \text{（立方抛物线）}$$

(iii) 在法平面上的投影：

$$\begin{cases} x=0 \\ z^2=\dfrac{2}{9}\dfrac{\chi^2}{\kappa}y^3 \end{cases}$$ （半立方抛物线）

（证明）从波开特公式仅保留第一项，略去其余各项，则得近似公式

$$x=s,\quad y=\frac{1}{2}\kappa s^2,\quad z=\frac{1}{6}\kappa\chi s^3$$

(i) L在密切平面上的投影，有 $z=0$。从（7.6）式的第一式解出 $s=x$ 代入第二式，得

$$y=\frac{1}{2}\kappa x^2$$

所以投影方程为

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\kappa x^2 \\ z=0 \end{cases}$$

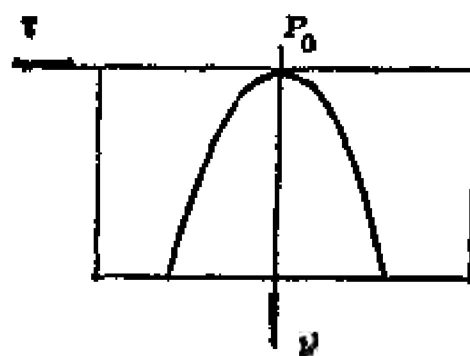


图 1—17

它表示顶点为 $P(s_0)$，以ν为对称轴，且开口向 ν 的正方向的抛物线（图 1—17）。

(ii) L在从切面上的投影，有 $y=0$。将 $x=s$ 代入公式（7.6）的第三式，得

$$z=\frac{1}{6}\kappa\chi x^3$$

所以L在 $P(s_0)$ 的从切面上的投影为

$$\begin{cases} y=0 \\ z=\dfrac{1}{6}\kappa\chi x^3 \end{cases}$$

它表示以$P(s_0)$ 为拐点的立方抛物线。当$\chi>0$是实线，$\chi<0$时是虚线所表示的曲线（图 1—18）

(iii) L 在法平面上的投影，有$x=0$。将(7.6)式的第二式解出s代入第三式，则得

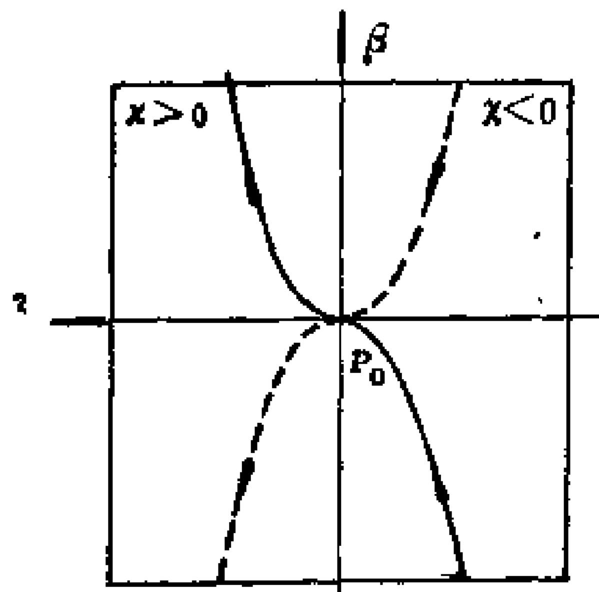


图 1—18

$$z^2=\frac{2}{9}\frac{\chi^2}{\kappa}y^3$$

所以L在法平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x=0 \\ z^2=\dfrac{2}{9}\dfrac{\chi^2}{\kappa}y^3 \end{cases}$$

它表示以$P(s_0)$为尖点的半立方抛物线（图1—19）。

【定理2】曲线L在正常点$P(s_0)$的邻域中的结构为：

(i) L上的点都在$P(s_0)$点的从切面的同侧；

(ii) L凹向点$P(s_0)$的主法线向量v的正方向；

(iii) 如果挠率$\chi>0$（$\chi<0$），则随s的增加，曲线上点以右（左）螺旋方式从第六（二）卦限通过密切面上点$P(s_0)$到第一（五）卦限。

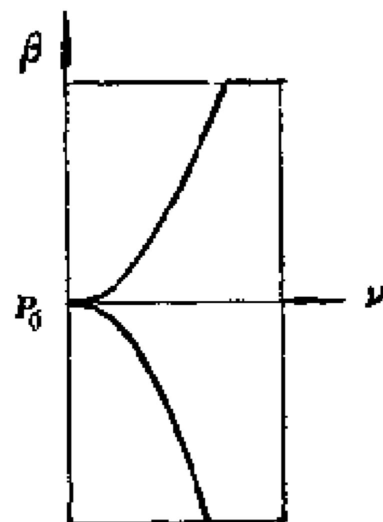


图 1—19

(iv) 曲率κ愈大，则曲线离开点$P(s_0)$的从切平面的速度愈快；挠率χ愈大，则曲线离开密切平面的速度愈快。

（证明）(i) 曲线L在点$P(s_0)$的密切平面上的投影方程为

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\kappa x^2 \\ z=0 \end{cases}$$

它是以 $P(s_0)$ 为顶点，以ν为对称轴且开口向ν的正方向的抛物线．所以，它总在密切平面上以τ为界的 ν 的正方向一侧（图 1—20）．因此，可以断定曲线L不穿过从切平面，即在以从切面为界的ν 正指向一侧的半空间中，所以L上点都在过 $P(s_0)$ 点的从切面的一侧．

(ii) 因为密切面上的抛物线是凹向ν 的正方向的，所以L也是凹向ν的正方向．

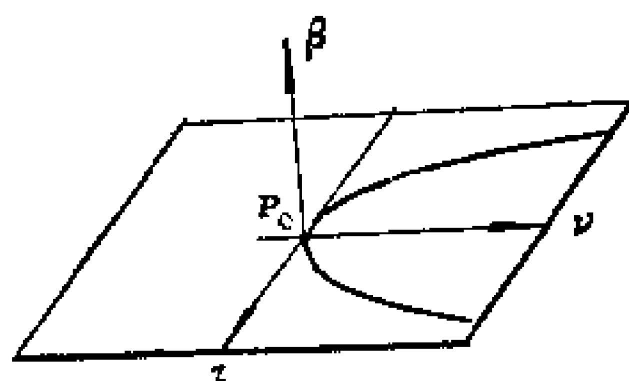


图 1—20

(iii) 由于曲线在从切面上的投影是

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{6}\kappa\chi x^3 \\ y=0 \end{cases}$$

所以它是以 $P(s_0)$ 为拐点，以τ,β 为坐标向量的立方抛物线．

另方面，若以曲线L上点 $P(s_0)$ 的 τ，ν，β 为基本向量组的坐标系，设它的坐标为 (x, y, z)，则曲线L上点的坐标可通过公式 (7.6) 给出．

(a) 当 $\chi>0$ 时，若x值从$x<0$变到 $x>0$时，则曲线L上点的坐标从$(x<0, y>0, z<0)$ 经点 $P(s_0)$ $(x=0, y=0, z=0)$ 变到 $(x>0, y>0, z>0)$，即随s的增加，L上点从第六卦限经点 $P(s_0)$ 按右螺旋方式进入第一卦限（图 1—21）．

(b) 当 $\chi<0$ 时，若x值从$x<0$变到$x>0$时，则曲线 L上点的坐标应$(x<0, y>0, z>0)$ 变到 $(x>0, y>0, z<0)$，即L从第二卦限按左螺旋方式过$P(s_0)$点进入第五卦限（图 1—22）．

(iv) 从投影曲线

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\kappa x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

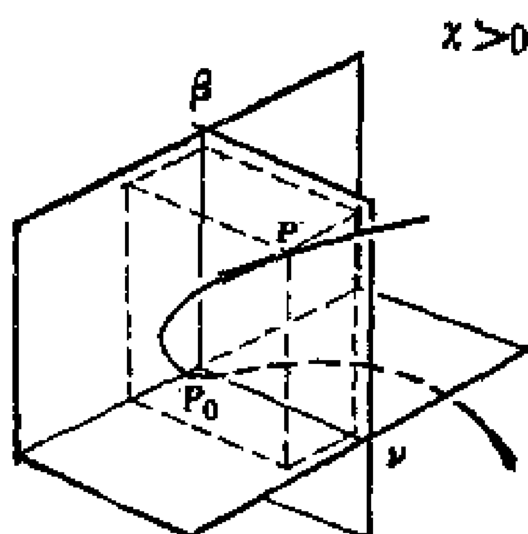


图 1—21

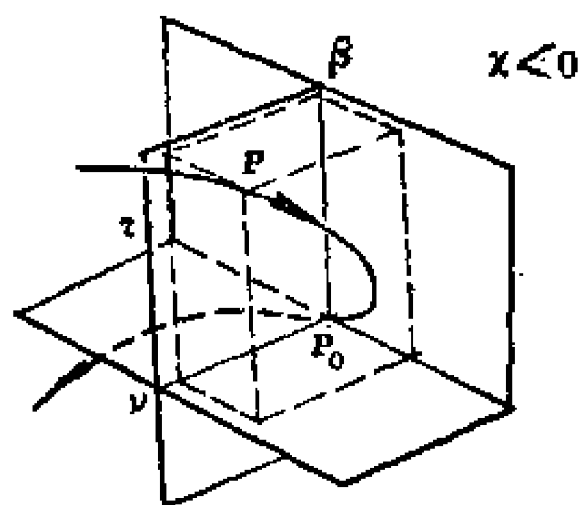


图 1—22

可以看出，曲率κ的值愈大则对于同一的$x=s$的值，y的值也愈大，即投影曲线离开切向量τ的速度也愈快，因此可以断定，随曲率κ值愈大，则曲线弧离开从切面的速度也愈快。

又从投影曲线

$$\begin{cases} x = 0 \\ z^2 = \frac{2}{9}\cdot\frac{\chi^2}{\kappa}y^3 \qquad (\kappa>0) \end{cases}$$

是半立方抛物线。当对于同一的 y 值 $|\chi|$ 愈大，则 z 值也随之增大，即投影曲线离开ν 的速度也愈快。因此，可以断定随挠率值愈大，则曲线弧L离开密切面速度也愈快。

从上面的一些结论可以看到，曲线弧L在正常点 P 的邻域结构，相当于螺旋线，只是当 $\chi>0$ 时是右螺旋线，$\chi<0$ 时是左螺旋线。

§8 曲线的基本定理

从上节讨论可知，由方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 给定的曲线 L，在正常点邻域的形状可通过它的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\chi(s)$ 两个不变量明确地描述出来，由此，使我们自然地考虑到它的相反情形：如果给定 $\kappa(s)$、$\chi(s)$ 是连续可微函数，是否能由它们确定一条空间曲线，且使其曲率和挠率刚好是已给的两个函数？本节我们就来回答这一问题。

【定理 1】给出任意两个在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续可微函数 $\kappa=\kappa(s)>0$，$\chi=\chi(s)$，则除空间的位置差别外，唯一地存在一条空间曲线，以 s 为弧长，以 $\kappa=\kappa(s)$ 为曲率，以 $\chi=\chi(s)$ 为挠率。

（证明）先证明存在性：

假设以弧长 s 为参数，$\kappa=\kappa(s)>0$ 为曲率，$\chi=\chi(s)$ 为挠率，$\kappa(s)$ 和 $\chi(s)$ 是 s 的可微函数，则由 F—S 公式，它的单位切向量 $\boldsymbol{\tau}(s)$，单位主法线向量 $\boldsymbol{\nu}(s)$ 和单位副法线向量 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 应当满足下列常微分方程组。

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\kappa\boldsymbol{\nu} \\[2ex]
\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}=-\kappa\boldsymbol{\tau}+\chi\boldsymbol{\beta} \\[2ex]
\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=-\chi\boldsymbol{\nu}
\end{cases}
\tag{8.1}
$$

因而，为寻求以 $\kappa(s)$ 为曲率，$\chi(s)$ 为挠率的曲线问题，归结为求这个方程组的解 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$，然后通过对 $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 的一次

积分，就可得所求曲线。

对于常微分方程组（8.1），当 $s=s_0$ 时，它的初始条件为：

$$\mathbf{\tau}(s_0)=\mathbf{\tau}_0,\quad \mathbf{\nu}(s_0)=\mathbf{\nu}_0,\quad \mathbf{\beta}(s_0)=\mathbf{\beta}_0 \tag{8.2}$$

并且是单位的、正交的右旋向量组。从常微分方程组的解的存在定理可知，方程组（8.1）存在唯一一组解

$$\mathbf{\tau}=\mathbf{\tau}(s),\quad \mathbf{\nu}=\mathbf{\nu}(s),\quad \mathbf{\beta}=\mathbf{\beta}(s) \tag{8.3}$$

且当 $s=s_0$ 时，它们的值满足初始条件（8.2）。现在

(i) 先证明 $\mathbf{\tau}$，$\mathbf{\nu}$，$\mathbf{\beta}$是正交右旋的向量组。设，

$$\mathbf{\tau}^*=\mathbf{\nu}\times\mathbf{\beta},\quad \mathbf{\nu}^*=\mathbf{\beta}\times\mathbf{\tau},\quad \mathbf{\beta}^*=\mathbf{\tau}\times\mathbf{\nu} \tag{8.4}$$

对（8.4）求导，由于（8.3）是（8.1）的解，所以

$$\begin{aligned}
\mathbf{\tau}^{*\prime}&=\mathbf{\nu}'\times\mathbf{\beta}+\mathbf{\nu}\times\mathbf{\beta}'=-\kappa\mathbf{\tau}\times\mathbf{\beta}=\kappa\mathbf{\beta}\times\mathbf{\tau}=\kappa\mathbf{\nu}^*\\
\mathbf{\nu}^{*\prime}&=\mathbf{\beta}'\times\mathbf{\tau}+\mathbf{\beta}\times\mathbf{\tau}'=-\chi\mathbf{\nu}\times\mathbf{\tau}+\kappa\mathbf{\beta}\times\mathbf{\nu}\\
&=-\kappa\mathbf{\nu}\times\mathbf{\beta}+\chi\mathbf{\tau}\times\mathbf{\nu}=-\kappa\mathbf{\tau}^*+\chi\mathbf{\beta}^* \qquad (8.5)\\
\mathbf{\beta}^{*\prime}&=\mathbf{\tau}'\times\mathbf{\nu}+\mathbf{\tau}\times\mathbf{\nu}'=\chi\mathbf{\tau}\times\mathbf{\beta}=-\chi\mathbf{\beta}\times\mathbf{\tau}=-\chi\mathbf{\nu}^*
\end{aligned}$$

又当 $s=s_0$ 时，

$$\begin{aligned}
\mathbf{\tau}^*(s_0)&=\mathbf{\nu}(s_0)\times\mathbf{\beta}(s_0)=\mathbf{\nu}_0\times\mathbf{\beta}_0=\mathbf{\tau}_0\\
\mathbf{\nu}^*(s_0)&=\mathbf{\beta}(s_0)\times\mathbf{\tau}(s_0)=\mathbf{\beta}_0\times\mathbf{\tau}_0=\mathbf{\nu}_0\\
\mathbf{\beta}^*(s_0)&=\mathbf{\tau}(s_0)\times\mathbf{\nu}(s_0)=\mathbf{\tau}_0\times\mathbf{\nu}_0=\mathbf{\beta}_0 \qquad (8.6)
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{\tau}^*$，$\mathbf{\nu}^*$，$\mathbf{\beta}^*$也是(8.1)的解，而且满足初始条件(8.2)。根据常微分方程组解的唯一性和连续性可知

$$\mathbf{\tau}^*=\mathbf{\tau},\quad \mathbf{\nu}^*=\mathbf{\nu},\quad \mathbf{\beta}^*=\mathbf{\beta} \tag{8.7}$$

将（8.7）代入（8.4），得

$$\mathbf{\tau}=\mathbf{\nu}\times\mathbf{\beta},\quad \mathbf{\nu}=\mathbf{\beta}\times\mathbf{\tau},\quad \mathbf{\beta}=\mathbf{\tau}\times\mathbf{\nu}$$

上式表明 $\mathbf{\tau}$，$\mathbf{\nu}$，$\mathbf{\beta}$满足正交右旋关系式，所以它是正交右旋向量组。

(ii) 求出以解 $\mathbf{\tau}$，$\mathbf{\nu}$，$\mathbf{\beta}$ 为相伴三棱形的曲线，并证明它

的参数为自然参数s，并且以 $\kappa(s)$ 和$\chi(s)$ 分别为该曲线的曲率和挠率。

从（8.1）的解中第一式得

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

将上式积分，得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{s0}^{s}\boldsymbol{\tau}ds \tag{8.8}$$

此式确定空间曲线。

因为 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\tau}$，而 $\dot{\boldsymbol{r}}^2=(\boldsymbol{\tau})^2=1$，所以此曲线的参数为自然参数。

为了证明（8.8）式所确定曲线的曲率和挠率为 $\kappa(s)$ 和 $\chi(s)$。我们设它的基本向量为 $\boldsymbol{\tau}^*$，$\boldsymbol{\nu}^*$，$\boldsymbol{\beta}^*$。它的曲率和挠率各为 $\kappa^*(s)$，$\chi^*(s)$，则由（8.8）式得

$$\boldsymbol{\tau}^*=\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau} \tag{8.9}$$

再由（8.1）的第一式得

$$\kappa^*\boldsymbol{\nu}^*=\boldsymbol{\tau}^{*\prime}=\boldsymbol{\tau}'=\kappa\boldsymbol{\nu}$$

由于 $\kappa^*>0$，$\kappa>0$，且 $\boldsymbol{\nu}^*$，$\boldsymbol{\nu}$都是单位向量，

所以 $$\kappa^*=\kappa,\quad \boldsymbol{\nu}^*=\boldsymbol{\nu} \tag{8.10}$$

由（8.9）式和（8.10）式得

$$\boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\tau}^*\times\boldsymbol{\nu}^*=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta} \tag{8.11}$$

又由（8.1）式的第三式得

$$-\chi^*\boldsymbol{\nu}^*=\boldsymbol{\beta}^{*\prime}=\boldsymbol{\beta}'=-\chi\boldsymbol{\nu}$$

从而可知

$$\chi^*=\chi$$

即由（8.8）式所确定的曲线弧是以自然参数为参数以（8.1）的解为相伴三棱形且以 $\kappa(s)$，$\chi(s)$ 为曲率和挠率的曲线弧。

现在再证明空间曲线的唯一性.

由于 (8.8) 式有一个积分常向量r_0, 因此, (8.8) 式在空间可以确定若干条曲线. 我们现在证明它们只有在空间中的位置差别, 如果经过适当的运动完全可以迭合.

假定 (8.8) 确定两条曲线 C_1, C_2. 且对应点的曲率和挠率相等. 现在把C_2经过运动, 使M_1 重合于M_0且使对应的相伴三棱形

$(M_1; \tau^*, \nu^*, \beta^*)$与

$(M_0; \tau, \nu, \beta)$ 重合.

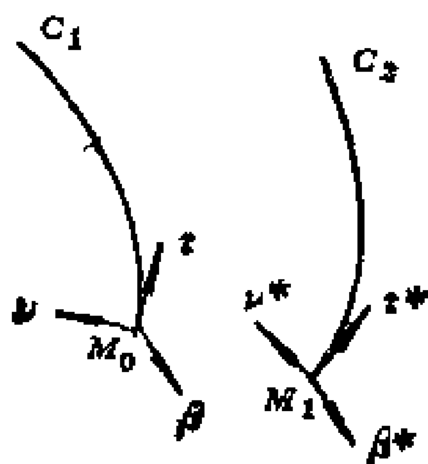


图 1—23

即 $\tau(s_0) = \tau^*(s_0)$,

$\nu(s_0) = \nu^*(s_0), \beta(s_0) = \beta^*(s_0)$,

则在 $M_0(s_0)$ 点, 有

$$\sigma(s_0) = \tau(s_0)\tau^*(s_0) + \nu(s_0)\nu^*(s_0) + \beta(s_0)\beta^*(s_0) = 3 \tag{8.12}$$

所以 $\sigma'(s_0) = 0$

再作

$$\sigma(s) = \tau(s)\tau^*(s) + \nu(s)\nu^*(s) + \beta(s)\beta^*(s) \tag{8.13}$$

对 (8.13) 式微分, 则得

$$\begin{aligned}\sigma'(s) &= \tau'\tau^* + \tau\tau'^* + \nu'\nu^* + \nu\nu^{*\prime} + \beta'\beta^* + \beta\beta'^* \\ &= \kappa\tau\tau^* + \kappa\tau\tau^* + (-\kappa\tau + \chi\beta)\nu^* + \nu(-\kappa\tau^* + \chi\beta^*) \\ &\quad - \chi\nu\beta^* - \chi\beta\tau^* = 0\end{aligned}$$

因此 $\sigma'(s) = 0$

即 $\sigma(s) =$ 常数. 但是 $\sigma(s_0) = 3$, 所以

$$\sigma(s) = 3$$

即对任意的 s 有

$$\tau(s) = \tau^*(s), \quad \nu(s) = \nu^*(s), \quad \beta(s) = \beta^*(s) \tag{8.14}$$

成立。从（8.14）式的第一式可得

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}$$

积分上式得

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}^*(s)+\boldsymbol{C} \qquad (\boldsymbol{C}\text{为积分常向量})$$

但是在 $s=s_0$ 时，$\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}^*(s_0)$，从而，$\boldsymbol{C}=0$. 所以对任意的 s，必有

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}^*(s)$$

即二曲线 C_1 与 C_2 重合。

从上述定理看出，给定区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 上的两个连续可微函数 $\kappa(s)>0$，$\chi(s)$，则这组函数能确定空间曲线。

又因为，s，κ，χ 都是与坐标系选择无关的微分不变量，所以把这组函数

$$\kappa=\kappa(s)>0 \quad \chi=\chi(s)$$

叫**自然方程**。

§9 定倾曲线与贝特朗（Bertrand）曲线

由曲线的基本定理可知，曲线的曲率、挠率与弧长之间的两个方程 $\kappa=\kappa(s)$，　$\chi=\chi(s)$ 完全决定了曲线。当曲率和挠率之间满足各种不同的关系，显然就会得到不同类型的曲线，例如 $\kappa=0$ 决定直线，$\chi=0$ 决定平面曲线。

下面我们讨论两种特殊类型的曲线。

§9.1 定倾曲线（一般螺旋线）

【定义】一曲线 L 上各点的切线与固定方向成定角的曲线叫**定倾曲线**。

【定理 1】一曲线L是定倾曲线的充分必要条件是曲率κ与挠率χ的比为常数.

（证明）必要性：设定倾曲线L的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，它的切向量为$\boldsymbol{\tau}(s)$，某固定方向为 $\boldsymbol{a}$，$(|\boldsymbol{a}|=1)$ 则

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\theta \quad（常数）$$

对上式求导得 $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即主法线与$\boldsymbol{a}$垂直，所以

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{a}=\cos(90^\circ\pm\theta)=\pm\sin\theta$$

微分 $\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 得

$$\boldsymbol{\nu}'\cdot\boldsymbol{a}=(-\kappa\boldsymbol{\tau}+\chi\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{a}=0$$

所以

$$\frac{\kappa}{\chi}=\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{a}}=\frac{\pm\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\operatorname{tg}\theta \quad（常数）$$

充分性：已知

$$\frac{\kappa}{\chi}=\pm\operatorname{tg}\theta \quad（常数）$$

因为

$$\boldsymbol{\tau}'=\kappa\boldsymbol{\nu}=\pm\chi\operatorname{tg}\theta\boldsymbol{\nu}=\mp\operatorname{tg}\theta\boldsymbol{\beta}'=\mp\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\boldsymbol{\beta}'$$

即 $\quad \cos\theta\boldsymbol{\tau}'\pm\sin\theta\boldsymbol{\beta}'=0$

积分上式有

$$\cos\theta\boldsymbol{\tau}\pm\sin\theta\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a}$$

因为 $\quad |\boldsymbol{a}|=1$

所以 $\quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\theta$

表明曲线切向量与定方向成定角，即曲线L为定倾曲线.

从上面定理，我们不难得到定倾曲线具有下列特征：

(i) 曲率与挠率之比为一常数.

(ii) 它的主法线方向与固定方向垂直.

(iii) 它的副法线与固定方向成定角。

§9.2 贝特朗曲线

【定义】若曲线C_1和C_2的点之间可以建立这样的一种对应关系，使得在对应点的主法线重合，则C_1和C_2都称为**贝特朗曲线**。每一条称为另一条的**共轭曲线**。

若C_1的方程为：$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(s)$，则$C_2$的方程为

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\nu}_1(s)$$

（如图1—24）其中$\lambda(s)$为纯量函数，其绝对值表示一对对应点间的距离，$\boldsymbol{\nu}_1(s)$ 为公共主法线上的单位向量。

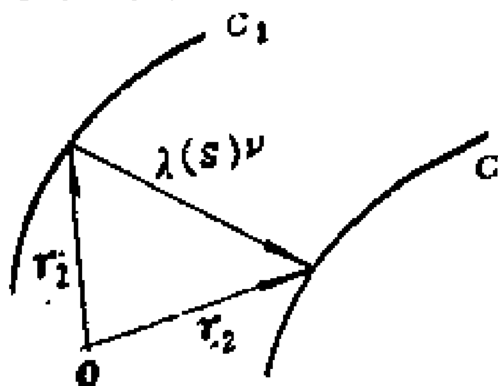


图1—24

【定理2】一曲线弧为贝特朗曲线的充分必要条件是

$$\lambda\kappa+\mu\chi=1 \qquad （其中\lambda,\ \mu为常数，且\ \lambda\neq0）$$

（证明）必要性：设C_1为一条贝特朗曲线，其方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$（其中$s$为$C_1$的弧长）。若$C_2$为$C_1$的共扼曲线，其方程可写作

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\nu}(s) \tag{9.1}$$

将上式对于s微分，再利用F-S公式，设C_2的弧长为$\bar{s}$有

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}\frac{d\bar{s}}{ds}=\boldsymbol{\tau}+\lambda'\boldsymbol{\nu}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\nu}'(s)$$

$$=\boldsymbol{\tau}+\lambda'\boldsymbol{\nu}(s)+\lambda(s)(-\kappa\boldsymbol{\tau}+\chi\boldsymbol{\beta})$$

$$=(1-\lambda(s)\kappa)\boldsymbol{\tau}+\lambda'(s)\boldsymbol{\nu}(s)+\lambda(s)\chi\boldsymbol{\beta}$$

即

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}=[(1-\lambda(s)\kappa)\boldsymbol{\tau}+\lambda'(s)\boldsymbol{\nu}(s)+\lambda(s)\chi\boldsymbol{\beta}]\frac{ds}{d\bar{s}} \tag{9.2}$$

因为 C_1，C_2 有共同的主法线，所以$\bar{\tau}\cdot\mathbf{v}=0$，即

$$[(1-\lambda(s)\kappa)\boldsymbol{\tau}+\lambda'(s)\mathbf{v}(s)+\lambda(s)\chi\boldsymbol{\beta}]\cdot\mathbf{v}\frac{ds}{d\bar{s}}=0$$

整理得 $\lambda'\cdot\dfrac{ds}{d\bar{s}}=0$，但是显然 $\dfrac{ds}{d\bar{s}}\neq0$，所以

$$\lambda'=0,\ \text{即}\ \lambda=\text{常数}$$

于是 (9.2) 变为

$$\bar{\tau}=[(1-\lambda\kappa)\boldsymbol{\tau}+\lambda\chi\boldsymbol{\beta}]\ \frac{ds}{d\bar{s}} \tag{9.3}$$

又设在对应点两切线间夹角为 θ（如图 1—25），则有 $\boldsymbol{\tau}\cdot\bar{\tau}=\cos\theta$，$\boldsymbol{\beta}\cdot\bar{\tau}=\sin\theta$

于是有 $\bar{\tau}=\boldsymbol{\tau}\cos\theta+\boldsymbol{\beta}\sin\theta$ (9.4)

比较 (9.3) 与 (9.4) 得

$$1-\lambda\kappa=\frac{d\bar{s}}{ds}\cos\theta$$

$$\lambda\chi=\frac{d\bar{s}}{ds}\sin\theta \tag{9.5}$$

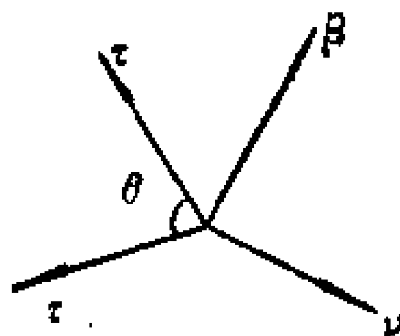


图 1—25

另一方面，由于

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}=\bar{\tau}'\frac{d\bar{s}}{ds}=(\kappa\mathbf{v})\frac{d\bar{s}}{ds} \tag{9.6}$$

将 (9.4) 关于 s 求导，又得

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\boldsymbol{\tau}'\cos\theta-\boldsymbol{\tau}\sin\theta\frac{d\theta}{ds}+\boldsymbol{\beta}'\sin\theta+\boldsymbol{\beta}\cos\theta\frac{d\theta}{ds}$$

$$=\kappa\mathbf{v}\cos\theta-\boldsymbol{\tau}\sin\theta\ \frac{d\theta}{ds}+(-\chi\mathbf{v})\sin\theta+\boldsymbol{\beta}\cos\theta\ \frac{d\theta}{ds}$$

$$=(\kappa\cos\theta-\chi\sin\theta)\mathbf{v}+(-\boldsymbol{\tau}\sin\theta+\boldsymbol{\beta}\cos\theta)\ \frac{d\theta}{ds}\cdot$$

所以

$$\frac{d\bar{s}}{ds}\cdot\bar{\kappa}\bar{\mathbf{v}} = (\kappa\cos\theta - \chi\sin\theta)\mathbf{v} + (-\boldsymbol{\tau}\sin\theta + \boldsymbol{\beta}\cos\theta)\frac{d\theta}{ds} \tag{9.7}$$

但由已知 $\mathbf{v} \parallel \bar{\mathbf{v}}$，而（9.7）式右边第二部分 $-\boldsymbol{\tau}\sin\theta + \boldsymbol{\beta}\cos\theta$ 与 $\mathbf{v}$ 垂直，故这部分为 0，又因为 $-\boldsymbol{\tau}\sin\theta + \boldsymbol{\beta}\cos\theta$ 是单位向量，所以不为 0，因而只有

$$\frac{d\theta}{ds} = 0，即\ \theta = 常数 \tag{9.8}$$

从而由方程（9.5）消去 $\frac{d\bar{s}}{ds}$，即得

$$\frac{1-\lambda\kappa}{\cos\theta} = \frac{\chi\lambda}{\sin\theta}$$

即是

$$\kappa\sin\theta + \chi\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\lambda}$$

也就得到

$$\lambda\kappa + \mu\chi = 1 \quad (\lambda \neq 0,\ \mu = \lambda\operatorname{ctg}\theta) \tag{9.9}$$

充分性：若二曲线 C_1，C_2 的曲率 κ 和挠率 χ 满足 $\lambda\kappa + \mu\chi = 1$，其中 $\lambda \neq 0$。以 $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ 除（9.9）式两边，即得

$$\kappa\sin\theta + \chi\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\lambda} \quad \left(\sin\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \neq 0\right)$$

我们要证明，从曲线 C_1 及常数 λ 代方程（9.1）所得到的曲线 C_2 是 C_1 的这条贝特朗曲线的共轭曲线，因为 λ 常数，由（1）可直接得（9.2）；利用 $\lambda\kappa + \mu\chi = 1$，公式（9.2）又可写成

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\lambda\chi}{\sin\theta}(\boldsymbol{\tau}\cos\theta + \boldsymbol{\beta}\sin\theta)\frac{ds}{d\bar{s}}$$

由于 $\tau\cos\theta+\beta\sin\theta$ 是一单位向量，所以

$$\bar{\tau}=\pm(\tau\cos\theta+\beta\sin\theta)$$

由此得

$$\kappa\cdot\bar{\nu}=\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{s}}=\pm(\kappa\cos\theta-\chi\sin\theta)\cdot\nu\frac{ds}{d\bar{s}}$$

此式表明$\bar{\nu}\parallel\nu$，由于C_2的点在C_1的主法线上，因而C_1，C_2的主法线重合，所以是贝特朗曲线。

由上面定理证明过程中，不难得到贝特朗曲线还有如下性质：

(i) 曲线C_1，C_2在对应点之间的距离是常数。

(ii) 曲线 C_1，C_2在对应点的切线交成定角。

习　　题

1．已知$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=f(t)$．若它是平面曲线时，试确定 $f(t)$，并指出它是什么曲线。

2．证明曲线 $x=ae^t\cos t$，$y=ae^t\sin t$，$z=ae^t$，与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的母线相交成定角。

3．试证在一般柱面上，与柱面母线交成定角θ的曲线方程为

$$x=f(t),\quad y=g(t),z=\operatorname{ctg}\theta\int\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt$$

4．试判别下列曲线在任意点邻域上是否为简单曲线弧。

（1）$x(t)=1+t^2$，$y(t)=t^3-3t$，$z(t)=3t^2$。

（2）$x(t)=\cos^3t$，$y(t)=\sin^3t$，$z(t)=\cos2t$，　$0\leqslant t<2\pi$。

（3）$\begin{cases}(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=a^4\\ z=5\end{cases}$。

（4）$\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ x^2+z^2=R^2\end{cases}$。

5．求曲线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=ct$．从 $t=0$ 到$t=t$的弧长。

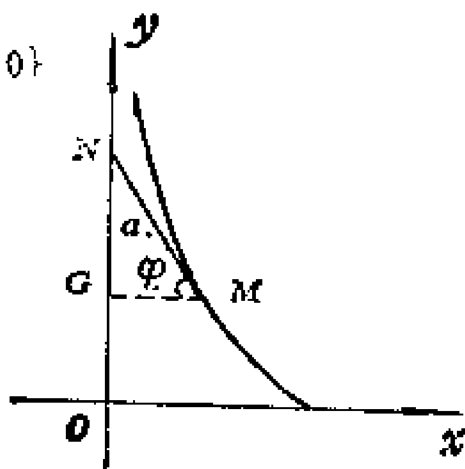
6．求双曲螺旋线 $x=a\operatorname{ch}t$，$y=a\operatorname{sh}t$，$z=at$ 从$t=0$到$t=t$ 之间的弧长。

7．求悬链线 $\gamma=\left\{t,\ a\operatorname{ch}\frac{t}{a},0\right\}$ 从$t=0$到$t=t$的弧长。

8．求曳物线

$\gamma=\{a\cos\varphi,\ a\ln(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi-a\sin\varphi),0\}$

$0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$，从 $\varphi=0$起计算弧长。并证明：在它的每一条切线上，从切点到 y 轴一段长总等于a（参数φ是切线和x轴所作的角）。



习题 8

9．求曲线 $x=2a(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t^2})$，$y=2at^2$，$z=4at$，从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 的弧长。

10．试求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=b^2$ $(b<a)$ 的交线的弧长，$(a>0,\ b>0)$。

11．若曲线由方程 $f(x,\ y,\ z)=0$，$g(x,\ y,\ z)=0$给出，试求这个曲线的弧长。

12．求曲线 $x^3=3a^2y$，$2xz=a^2$ 在平面 $y=\frac{a}{3}$与平面 $y=9a$之间的弧长。

13．求螺旋线 $x=3a\cos t$，$y=3a\sin t$，$z=4at$ 从它与 xy 面的交点到任意点 $M(t)$ 的弧长，$(a>0)$。

14．求曲线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$z=4a\cos\frac{t}{2}$ 在它与xy平面二交点之间的一段弧长。

15．求双曲螺旋线 $x=a\operatorname{ch}t$，$y=a\operatorname{sh}t$，$z=at$ 的自然参数表示式。

16．求曲线 $\gamma=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$ 的自然参数表示式。

17．求曲线 $y=e^2\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)$与 $y=e^x$ 在点$x=2$处的切触阶。

18．求曲线 $\gamma=\{t\cos t,\ -t\sin t,\ at\}$ 与平面 $-ax+z=0$在$t=0$处

的切触阶。

19. 求下列曲线的基本向量组。

(1) $x^3=3a^2y$, $2xz=a^2$.

(2) $x=\cos^3t$, $y=\sin^3t$, $z=\cos 2t$.

(3) $x=t\sin t$, $y=t\cos t$, $z=te^t$ 在原点。

20. 求下列曲线在给定点的切线及法平面方程。

(1) $\gamma=\{\cos t, \sin t, t\}$ 在点 (1, 0, 0)。

(2) $\gamma=\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ 在 $t=0$ 处。

(3) $x^2=2az$, $y^2=2bz$ 在点$P_0(x_0, y_0, z_0)$。

(4) $x^2+y^2+z^2=1$ $x^2+y^2=x$ 在点 (0,0,1)。

21. 求下列曲线在给定点的付法线、主法线及密切面、从切面方程。

(1) $\gamma=\{\cos\theta, \sin\theta, \theta\}$ 在点 (1,0,0)。

(2) $\gamma=\{at, bt^2, ct^3\}$ 在原点。

(3) $\gamma=\{e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\}$ 在 $t=0$ 处。

22. 求曲线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ct$的密切面方程以及它与oz轴的交点。

23. 求曲线 $x=a\cos t+b\sin t$, $y=a\sin t+b\cos t$, $z=c\sin 2t$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$处的密切平面。

24. 在曲线 $x=\cos\alpha\cos t$, $y=\cos\alpha\sin t$, $z=t\sin\alpha$ 的付法线的正向取单位长，求其端点组成的新曲线的密切平面。

25. 证明：曲线 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=c\int\sqrt{\dot{f}^2+\dot{g}^2}\,dt$ 的切线与oz轴成定角。

26. 证明：曲线 $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ 的切线与直线 $y=z-x=0$ 成定角。

27. 证明：螺旋线 $\gamma=\{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ 满足：

(1) 切线与轴交成定角。

(2) 付法线与轴交成定角。

（3）主法线与轴垂直相交。

28．证明：过原点平行于圆柱螺线的付法线 $\gamma=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ 的付法线的直线轨迹是锥面 $a^2(x^2+y^2)=b^2z^2$。

29．证明：球面曲线的法平面，通常过球心。

30．设曲线 $\gamma(s)$ 过平面π上一点 $P(s)$，在曲线上 $P(s)$ 的邻近点 $Q(s+\Delta s)$ 向平面π所引垂线长为d。若以Δs为一阶无穷小，而d是Δs的三阶无穷小时，试证这时平面π是该曲线的密切面。

31．若一平面通过曲线上一点P及P的邻近两点Q、R，当Q, R 沿曲线趋向于点P时，这个平面的极限位置就是曲线在P点的密切平面。

32．若$\dot{r}(t_0)$, $\ddot{r}(t_0)$, $\cdots$, $\gamma^{(n-1)}(t_0)$ 都平行于 $\dot{r}(t_0)$，而$\gamma^{(n)}(t_0)$ 与 $\dot{r}(t_0)$ 不平行，则曲线在P_0点的密切平面平行于$\dot{r}(t_0)$和$\gamma^{(n)}(t_0)$。

33．用F—S公式，说明τ', ν', β' 都垂直于 $\nu\times\nu'$，且把$\nu\times\nu'$ 写成τ、ν、β 的线性组合。

34．设曲线 $r=r(s)$。证明：

（1）$k\varkappa=-\tau'\beta'$。

（2）$(\gamma',\ \gamma'',\ \gamma''')=k^2\varkappa$。

35．设$\gamma^{(n)}=a_n\tau+b_n\nu+c_n\beta$，证明：

$a_{n+1}=a'_n-kb_n$，$b_{n+1}=b'_n+ka_n-\varkappa c_n$，$c_{n+1}=c_n'+\varkappa b_n$

36．证明：与已知曲线弧 $\gamma=\gamma(s)$ 在 $P(s_0)$ 具有二阶切触的平面是密切平面。

37．利用F—S公式证明：

（1）$(\tau',\ \tau'',\ \tau''')=k^5\ \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\varkappa}{k}\right)$。

（2）$(\beta',\beta'',\ \beta''')=\varkappa^5\ \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{k}{\varkappa}\right)$。

38．求下列曲线的曲率。

（1）$\gamma=\{a\cos t,\ a\sin t,\ ct\}$。（$a$, c均大于0）

（2）$\gamma=\{(t-\sin t),\ (1-\cos t),\ t\}$。

（3）$\gamma=\{a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ at\}$ （$a>0$）

（4）$\gamma=\{t\sin t,\ t\cos t,\ te^t\}$ 在原点。

（5）$\gamma=\{\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ \cos 2t\}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处。

（6）$\begin{cases}x^3=3a^2y\\ 2xz=a^2.\end{cases}$

39．试证曲率

$$\kappa^2=\frac{(\dot{r}\cdot\dot{r})(\ddot{r}\cdot\ddot{r})-(\dot{r}\cdot\ddot{r})^2}{(\dot{r}\cdot\dot{r})^3}$$

40．曲线 $x=\int f(t)\sin t dt$，$y=\int f(t)\cos t dt$，$z=\int f(t)\operatorname{tg} t dt$，当曲率为常数时，试确定 $f(t)$。

41．曲线 $x=t$，$y=\sin t$，$z=\varphi(t)$ 的主法线与 yz 平面平行时，试确定函数$\varphi(t)$。

42．证明：若曲线的所有切线经过一个定点，则曲线是直线

43．证明：若曲线C上每一点的切线与曲线有二阶切触，则曲线是直线。

44．求38题中各曲线的挠率。

45．试证：

$$\varkappa=\frac{(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r})}{(\dot{r}\dot{r})(\ddot{r}\ddot{r})-(\dot{r}\ddot{r})^2}$$

46．证明下列曲线的 $\kappa=\varkappa$。

（1）$x=3t$，$y=3t^2$，$z=2t^3$。

（2）$x=2a(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t^2})$，$y=2at^2$，$z=4at$。

（3）$x=a(3t-t^3)$，$y=3at^2$，$z=a(3t+t^3)$。

47．试证曲线 $x=\sqrt{6}at^3$，$y=a(1+3t^2)$，$z=\sqrt{6}at$ 的挠率 $\varkappa=-\dfrac{a}{y^2}$。

48．证明曲线 $\gamma=\{\operatorname{ch}t,\ 2\operatorname{sh}t,\ e^t\}$ 是平面曲线。

49．若一条空间曲线的切线都和某一平面平行，则这条曲线是平面曲线。

50．若曲线的所有密切面都经过一个定点，则曲线为平面曲线。

51．若曲线的所有密切平面都与曲线有三阶切触，则曲线为平面曲线。

52．若曲线 $\gamma=\gamma(s)$ 有固定的、不等于零的挠率 $\varkappa$，而 ν、β 是曲线的主法线和付法线向量，证明：曲线 $\bar{\gamma}=\frac{1}{\varkappa}\nu-\int\beta ds$ 有固定的曲率 $\bar{k}=|\varkappa|$，并求 $\bar{\gamma}$ 的挠率 $\bar{\varkappa}$。

53．若在曲线上一点的切线和付法线对一定方向的交角各为 θ 和 φ，证明：

$$\frac{\sin\theta\ d\theta}{\sin\varphi\ d\varphi}=-\frac{k}{\varkappa}$$

54．已知曲线 Γ：$\gamma=\gamma(s)$ 在点 P_0 邻域的近似曲线

$$\bar{\Gamma}:\begin{cases}\xi=s\\ \eta=\frac{1}{2}k_0s^2\\ \zeta=\frac{1}{6}k_0\varkappa_0s^3\end{cases}$$

验证：曲线 Γ 与 $\bar{\Gamma}$ 在点 P_0 有相同的曲率和挠率。

55．引空间曲线在点 P 的切线，从曲线 P 的邻近点 Q 向 P 的切线引垂线，设垂线长为 d，试求当 $Q\to P$ 时 $\frac{2d}{PQ^2}$ 的极限值，并试明这个极限值是曲线在点 P 的曲率，

56．求下列曲线的自然方程。

（1）$\gamma=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$.

（2）$\gamma=\{a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ at\}$.

（3）$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$。

（4）$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

57．证明：$x=at$，$y=\sqrt{2}\,a\ln t$，$z=at^{-1}$ 是双曲螺旋线。

58．证明下列曲线为定倾曲线。

（1）$\gamma=\{a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ at\}$.

（2）$x=a\int\sin\alpha(t)dt$，$y=a\int\cos\alpha(t)dt$，$z=bt$.

59．证明：曲线 $\gamma=\gamma(s)$ 为定倾曲线的充要条件为 $(\gamma'', \gamma''', \gamma^{(4)})=0$。

60．若 C：$\gamma=\gamma(s)$ 为定倾曲线，τ、ν 为 C 的切向量和主法向量，R 为 C 的曲率半径，证明：$\bar{C}$：$\bar{\gamma}=R\tau-\int\nu ds$ 也是定倾曲线。

61．已给曲线 Γ：$\gamma=\gamma(t)$ 的付法向量为 $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-\sin t, \cos t, 1\}$。求它的单位切向量和单位主法线向量。并证明这个曲线是定倾曲线。

62．设在两条曲线 C，$\bar{C}$ 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的切线平行。证明：它们对应点的主法线及付法线分别平行，且曲率和挠率成比例，因此若 C 是定倾曲线，则 $\bar{C}$ 也是定倾曲线。

63．证明：圆柱螺线是定倾曲线又是贝特朗曲线。

64．证明：下列曲线为贝特朗曲线。

（1）平面上的同心圆。

（2）$\gamma=\frac{1}{2}\{\cos^{-1}s-s\sqrt{1-s^2}, 1-s^2, 0\}$,

$$\bar{\gamma}=\frac{1}{2}\{\cos^{-1}s-s\sqrt{1-s^2}-s, 1-s^2+\sqrt{1-s^2}, 0\}.$$

65．证明，若贝特朗空间曲线 C 的共轭曲线 $\bar{C}$ 的主法线向量 $\bar{\nu}=\varepsilon\nu$ $(\varepsilon=\pm1)$，则共轭曲线的曲率 $\bar{k}$ 和挠率 $\bar{\varkappa}$ 适合

$$-\varepsilon\lambda\bar{k}+\mu\bar{\varkappa}=1$$

而它和 C 的曲率 k 和挠率 $\varkappa$ 之间有关系：

$$(1-\lambda k)(1+\varepsilon\lambda\bar{k})=\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}, \qquad \varkappa\bar{\varkappa}=\frac{1}{\lambda^2+\mu^2}$$

66．证明：若两曲线 C 和 $\bar{C}$ 在对应点有公共付法线时，则曲线是平面曲线。

67．设有空间二曲线：其一曲率等于常数，另一挠率等于另一常数。两者之间建立了一一对应关系，在对应点的切线互相平行。求证：按定比把对应点所连结的线段内分（或外分），其分点的轨迹是一贝特朗曲线。

第二章 包络论

曲面族和曲线族的包络理论，在自然科学和生产实践中都有比较广泛的应用，本章主要通过给定的曲面族和曲线族构造出新的曲面和曲线 — 包络曲面与包络曲线。

§1 简单曲面片及其解析表示

对曲面有关知识的研究，类似于在曲线论中对简单曲线弧那样，只研究光滑的曲面片在某点邻域的形状和性质。所以本节首先给出简单曲面片的定义，然后给出判别条件。

【定义】 已给曲面片Σ，如果它满足条件：

（1） Σ与一个欧氏空间平面片D同胚；

（2） Σ上每个点都存在切平面，且当切点沿Σ移动时，切平面也随之连续变动。

那么，就称Σ为简单曲面片。

由（1）可知，简单曲面片可以看作由一块平面片经过连续变形面得到的，而且它本身不自交；由（2）又知道，简单曲面片是光滑的曲面片。

由于简单曲面片Σ上各点都有确定的切平面，所以Σ上的点通常称做**正常点**。相反的，如果一个曲面上某一点不存在切平面，则该点称为**奇点**。

〔例〕 已给正圆锥面的参数方程

$$\begin{cases} x = u\sin\alpha\cos\varphi \\ y = u\sin\alpha\sin\varphi \\ z = u\cos\alpha \end{cases} \quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2}\text{的常数}，\ -\pi<\varphi\leqslant\pi)$$

我们知道锥面顶点不存在切平面，可见锥面顶点（原点）为奇点，其他点的邻域皆为简单曲面片，即除顶点外皆为正常点（图2—1）。

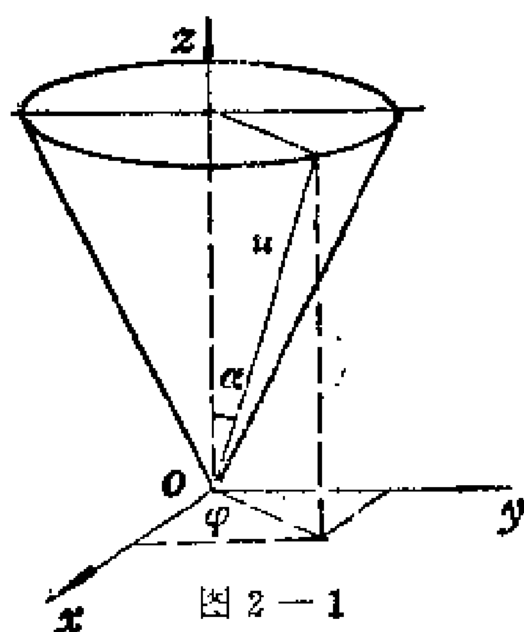


图2—1

在解析几何中，我们知道曲面方程有如下几种主要形式，

参数方程：

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$$

其中 u，$v\in R$是二独立参数，(x, y, z) 是曲面上点在空间直角坐标系中的坐标，

显式方程：

$$z=f(x,\ y)$$

隐式方程：

$$F(x,y,z)=0$$

下面研究在什么条件下上述几种方程才确定简单曲面片。

【定理1】在 uv 平面的区域D上已给曲面片Σ的参数方程为：

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v) \tag{1.1}$$

或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$

如果函数组 $x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$ 满足条件：

(i) 单值而且是 C^1 类（即一阶偏导数存在且连续）；

(ii) 雅可比阵$\begin{pmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$ 的秩为2

（即 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$）。 (1.2)

则由(1.1)式所确定的曲面片是简单曲面片。

(证明) 这个定理的证明方法与简单曲线弧的证法类似。只须证得定理在条件(i)，(ii)下，使D与Σ之间满足简单曲面片定义(1.1) (1·2) 即可。

先证Σ与D同胚。

我们设D上点的坐标为(u,v)，而Σ上点有坐标为(x,y,z)，根据定理条件 (i) 可知 (1.1) 式具有单值和C^1类性质。因此，对于D上任意点 $M'_0(u_0,v_0)$，有 (1·1) 式所确定的曲面Σ上的唯一一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与 M_0' 对应。而且对任意的$\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，由条件 (i) 的C^1类性质可知，对于$M'_1\in D$，

如果$\overline{|M'_0M'_1|}<\delta$，则与$M'_1$对应的 $M_1\in\Sigma$ 必须满足 $\overline{|M_0M_1|}<\varepsilon$，即$D$到$\Sigma$上的映射是单值连续的。现在再证$\Sigma$到$D$的映射也是单值连续的。为此，我们利用隐函数存在定理来反解(1·1) 式，并证明反解后的函数也是单值C^1类。由条件(ii)我们可以假定雅可比阵的子式

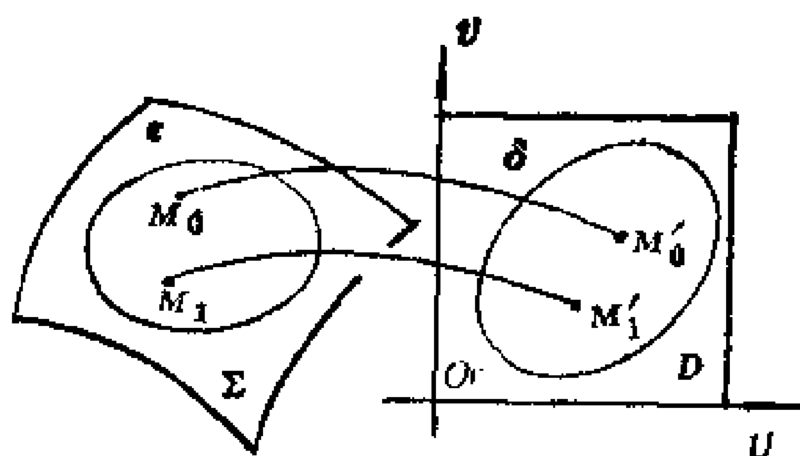


图2—2

$$\begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$$

我们做联立方程组

$$\left.\begin{aligned} F_1(u,v;x,y)=x(u,v)-x=0 \\ F_2(u,v;x,y)=y(u,v)-y=0 \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

其中 F_1, F_2 是C^1类。并取 $u=u_0$, $v=v_0$, $x=x_0$, $y=y_0$ 为初值条件，由（1·3）可知

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$$

从而，方程组（1·3）满足隐函数存在定理条件， 所以在初值条件 $u=u_0$, $v=v_0$ 的邻域中存在单值C^1类函数

$$\left.\begin{aligned} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (1.4)$$

而且满足

$$u_0=u(x_0, y_0)$$

$$v_0=v(x_0, y_0)$$

顺便指出，这里u和v皆为 x, y, z 的函数，即（1·4）式可看作 $u=u(x,y)+0\cdot z$, $v=v(x,y)+0\cdot z$。由于（1·4）式是单值C^1类，故对Σ上任意点 M_0 (x_0, y_0, z_0)，则在D上有唯一一点$M_0'(u_0, v_0)$ 和它对应，即对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 当$|\overline{M_0M_1}|<\delta$ 时，则与M_1 对应的M_1'点，必有 $|\overline{M'_0M'_1}|<\varepsilon$。即$\Sigma$ 到 D 上的映射也是单值C^1类。从这两方面的证明可知，如果参数方程（1·1）满足条件（i）、（ii）时，则曲面片Σ与参数取值的平面邻域 (u,v)（即D）同胚。

其次证明定义的条件（1·2）成立。 即Σ是光滑的曲面片。因为

$$\boldsymbol{r}=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$$

所以它的偏导函数为

$$\boldsymbol{r}_u = x_u(u,v)\boldsymbol{i} + y_u(u,v)\boldsymbol{j} + z_u(u,v)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_v = x_v(u,v)\boldsymbol{i} + y_v(u,v)\boldsymbol{j} + z_v(u,v)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

由定理条件（ii）可知

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \left\{ \begin{vmatrix} y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} \right\}$$

（ii）的雅可比阵的秩为 2，即至少有一个雅可比行列式不为 0，所以 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$. 由向量函数连续的充分必要条件，根据 (1.1) 式的C^1类条件和 (1.5) 式，可知 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 是曲面片Σ上点的连续函数. 从数学分析中可知 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 是Σ的切平面的法向量。因此，当切点沿Σ连续变动时，则 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 将随之连续变动. 所以定义的条件(1.2)成立（图 2 — 2）.

由于满足条件（i）与（ii）的方程（1.1）确定简单曲面片，可见，$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ 的点是正常点.

我们知道，在用参数方程表示曲面时，参数的选取可根据探讨问题的需要来确定，若取二独立参数u, v，分别为：$u = x$，$v = y$，则显然得到定理的特殊情况.

【推论】在空间直角坐标系的 xy 平面的区域D上，已给曲面片的方程为

$$z = f(x, y) \tag{1.6}$$

若函数 $f(x,y)$ 在D上单值且连续可微，则(1.6) 式确定简单曲面片.

（证明）此命题的成立是显然的. 事实上，(1.6) 式可写作

$$x = x,\ y = y,\ z = f(x, y) \tag{1.6}$$

而(1.6)就是(1.1)式的特殊情况．因为

$$\begin{vmatrix} x_x & y_x \\ x_y & y_y \end{vmatrix} = 1$$

恒成立．所以条件（ii）是当然成立的．又条件(i)是给定的，所以推论得证．

【定理 2】 已给曲面片Σ的方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1.7}$$

和点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$．如果$F$在点 M_0 连续可微，且 $F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$，则在M_0点的邻域中，(1.7)式确定简单曲面片．

（证明）已知在 M_0 点 F_x，F_y，F_z 不全为零，不妨设$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，由隐函数存在定理可知，有$\varepsilon>0$和$\delta>0$，使得在区域 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 上，存在唯一的一个连续可微函数

$$z=f(x,y) \tag{1.7}'$$

它满足 $z_0=f(x_0,y_0)$，若对这个区域上确定的所有点 $(x,y,f(x,y))$ 都使 $F(x,y,f(x,y))=0$．也就是说，(1·7)$'$在区域$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$上定义的曲面片，就是（1·7）在M_0点邻域$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$．$|z-z_0|<\varepsilon$ 上所给定的曲面片Σ，据推论知（1·7)$'$确定简单曲面片，故定理得证．

§2 曲面的参数化和曲线坐标

§2.1 曲面的参数化

【定义】对于简单曲面片Σ，如果已给出其参数方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v) \tag{2.1}$$

则说Σ已被**参数化**了。其中$\boldsymbol{r}$为二独立参数u，v的连续向量函数、向径$\boldsymbol{r}$的终点的轨迹一般是一片光滑曲面Σ。这里指出，后面的讨论中，通常总假设$\boldsymbol{r}(u,v)$有连续的偏导函数$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$。

§2.2 曲线坐标

在平面上，确定一点需要两个坐标（两个独立参数），在空间里的一个曲面上确定一点亦需要两个独立参数，下面我们把平面上的笛卡儿坐标推广到曲面上去，即建立曲线坐标。

(i) 参数曲线

对于已经参数化的曲面 Σ：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，若令$u=u_0$（常数），而$v$是变数，则$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,v)$一般确定Σ上一条曲线，叫做$v$**曲线**，同样，若令$v=v_0$（常数）而$u$是变数，则$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0)$，一般也确定Σ上一条曲线，叫做**u曲线**。$v$曲线与$u$曲线统称为**参数曲线**。一切参数曲线构成了参数曲线网(图2—3)。

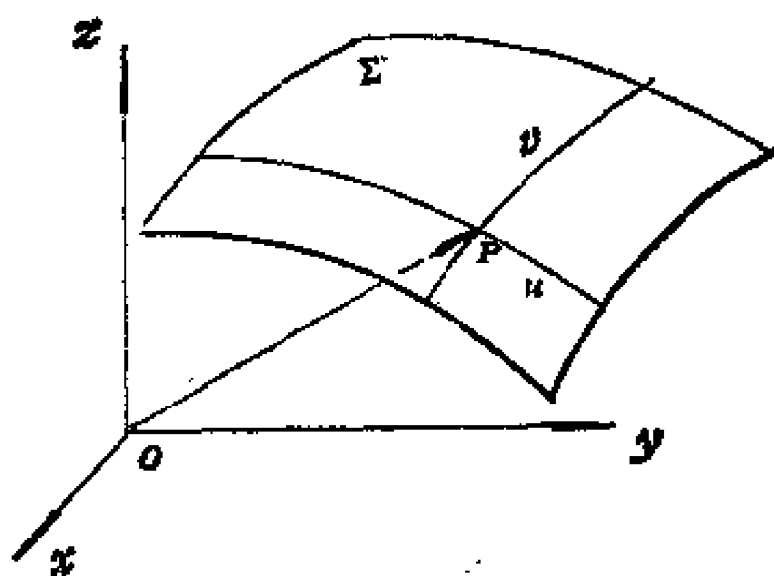


图2—3

(ii) 曲线网

如果过Σ上每一点P有唯一的一条u曲线和一条v曲线，并

且每条u曲线本身及每条v曲线本身都不自交，那么，由这样的u曲线族与v曲线族所构成的曲线网叫做**正则曲线网**。以后简称**曲线网**。如果曲线网中u曲线与v曲线互相垂直，则这种曲线网叫做**正交网**。

(iii) 坐标网

由于在Σ的曲线网中，过Σ上每点P有唯一确定的一条u曲线和一条v曲线；另一方面，一条u曲线和一条v曲线只相交于一点P（因为$\boldsymbol{r}(u,v)$为单值函数），这样Σ上的点P与实数对（u，v）就建立了一一对应关系（局部），因此，曲线网也称**坐标网**。在这个坐标网中，每个点P所对应的序对(u,v)叫做该点的**曲线坐标**。并用符号$P(u,v)$表示。

下面给出一些曲面参数化的例题。

〔例 1〕试以地球的经纬度为参数，写出地球面的参数方程。

〔解〕为计算上方便，不妨设地球面为一球面，它的半径$a\approx 6378$公里，并把球心放在坐标原点，将北极N放在OZ轴的正半轴上。取XOZ上的大圆$\widehat{NMS}$弧的经度为$u=0°$，在东半球上的经度u取正值，西半球上的经度u取负值。在xOy面上的大圆叫作赤道，它的纬度$v=0°$，在北半球上的纬度v取正值，而南半球上的纬度取负值。

现在我们在地球面上任取一点$M(x,y,z)$，它在xOy面上投影为M_{xy}，则

$$\angle xOM_{xy}=v \quad (-\pi<v\leqslant\pi)$$

$$\angle M_{xy}OM=u \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant u \leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

从而点M的坐标

$$x=|\overline{OM_{xy}}|\cos v=a\cos u\cos v$$

$y = |\overline{OM_{xy}}|\sin v = a\cos u\sin v$

$z = |OM|\sin u = a\sin u$.

所以地球面的参数方程为

$\boldsymbol{r} = 6378\{\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u\}$

如果 $v = v_0$（常数），u变化，则得

$\boldsymbol{r} = 9378\{\cos u\cos v_0, \cos u\sin v_0, \sin u\}$

它确定一条经线（u线）。

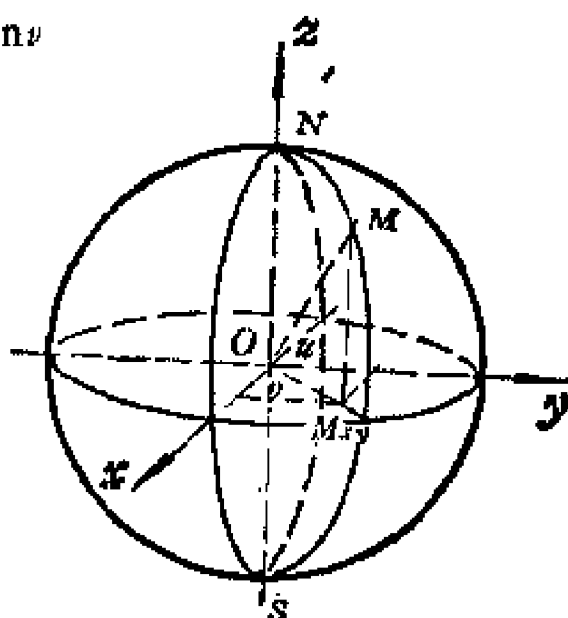


图 2 — 4

同样如果取 $u = u_0$（常数）而v变化，则得

$\boldsymbol{r} = 6378\{\cos u_0\cos v, \cos u_0\sin v, \sin u_0\}$

它确定一条纬线（v线）（图 2 — 4）。

〔例 2〕 已给一条直线L，它与oz轴垂直，如果L以oz为轴作等角速度旋转，同时还作等速上升运动，这时，直线L所生成的曲面叫正螺旋面．试求它的参数方程和坐标曲线．

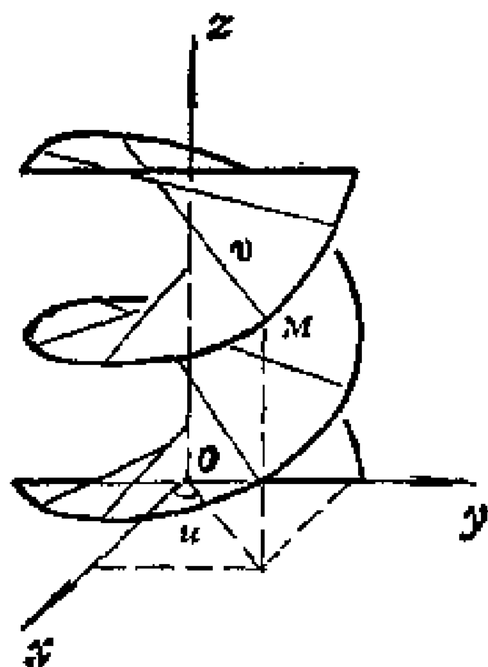


图 2 — 5

〔解〕为求出这个曲面Σ的方程，我们在直线L上导进坐标系，令L与oz轴的交点为 O'，L直线上 $O'M$ 方向上点取正值 v，而反方向的点取负值．另外直线L与ox轴交角为u $(0 \leqslant u \leqslant 2\pi)$，我们选取这样的 u，v 作为曲线的参数．则曲面Σ上任意点M在 xoy 面上射影为

M_{xy}，M的坐标 x，y，z与参数 u，v之间的关系为

$$x=|\overline{OM_{xy}}|\cos u=v\cos u$$

$$y=|\overline{OM_{xy}}|\sin u=v\sin u$$

$$z=ku\quad\left(k=\frac{|\overline{OO'}|}{u}=\text{常数}\right)$$

因此，正螺面的参数方程为：

$\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ ku\}$

当 $v=v_0$（常数），u变化，则

$\boldsymbol{r}=\{v_0\cos u,\ v_0\sin u,\ ku\}$

确定一条u曲线，即圆柱螺旋线。

当 $u=u_0$（常数），v变化，则

$\boldsymbol{r}=\{v\cos u_0,\ v\sin u_0,\ ku_0\}$

确定一条v线，即空间直线（螺面的母线）。

〔例 3〕在 yoz 面上给定一条悬链线，$L: y=a\operatorname{ch}\frac{z}{a}$，它绕$oz$轴旋转所生成的曲面叫悬链面，试求它的参数方程（图 2—6）。

（解）为导出曲面Σ的参数方程，我们取曲面上点M的z坐标为参数 t，和点M在 xoy 面上投影M_{xy}，在oz 轴上投影为O'，$\angle M_{xy}Ox=\theta$ 为参数。这时Σ上点M的坐标x,y，z与参数θ，t 之间的关系为：

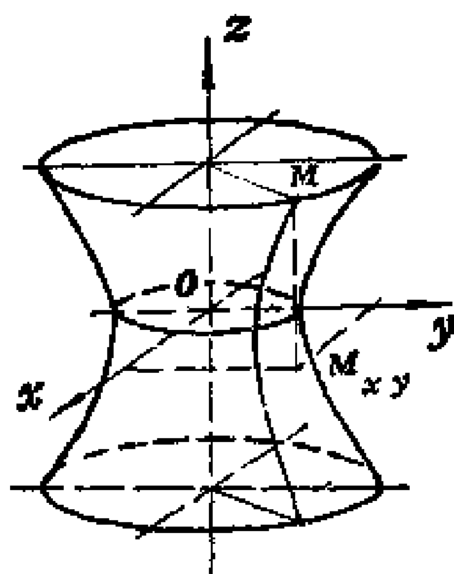


图 2—6

$$\begin{cases} x=|\overline{OM_{xy}}|\cos\theta=|\overline{O'M}|\cos\theta=a\text{ch}\dfrac{t}{a}\cdot\cos\theta \\ y=|\overline{OM_{xy}}|\sin\theta=|\overline{O'M}|\sin\theta=a\text{ch}\dfrac{t}{a}\sin\theta \\ z=t \end{cases}$$

因此，悬链面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\text{ch}\frac{t}{a}\cos\theta,\ \ a\text{ch}\frac{t}{a}\sin\theta,\ t\right\}\quad(-\infty<t<\infty,$$

$$0\leqslant\theta<2\pi)$$

〔例4〕已给 xoz 面上的曳物线

$$L:\ \begin{cases} x=a\sin t \\ z=a\left(\lg\text{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t\right) \end{cases}$$

如果以oz轴为轴，旋转一周，则得到拟球面。求这个拟球面的参数方程，并写出它的坐标曲线方程。

〔解〕设曳物线上任意点的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，点M在xoy面上的投影为M_{xy}，$\angle xOM_{xy}=\theta$，取θ和t为二独立参数，则 x，y，z与t，θ之间的关系为

$$x=|\overline{OM_{xy}}|\cos\theta=|\overline{O'M}|\cos\theta$$
$$=a\sin t\cdot\cos\theta$$

$$y=|\overline{OM_{xy}}|\sin\theta=|\overline{O'M}|\sin\theta$$
$$=a\sin t\cdot\sin\theta$$

$$z=|\overline{M_{xy}M}|=|\overline{OO'}|$$
$$=a\left(\lg\text{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$$

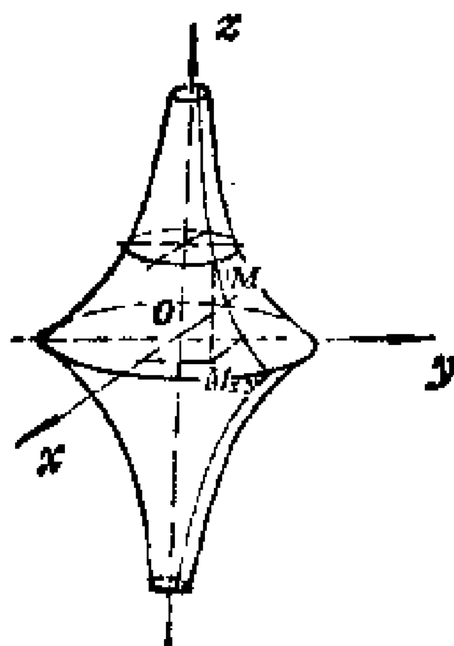


图2—7

所以拟球面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=a\{\sin t\cos\theta,\ \sin t\sin\theta,\ \lg\mathrm{tg}\frac{t}{2}+\cos t\}$$

当 $\theta=\theta_0$（常数），t变化，则

$$\boldsymbol{r}=a\left\{\sin t\cos\theta_0,\ \sin t\sin\theta_0,\ \lg\mathrm{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right\}$$

它确定t曲线，即曲面上的一条曳物线。

当 $t=t_0$（常数），θ变化，则

$$\boldsymbol{r}=a\left\{\sin t_0\cos\theta,\ \sin t_0\sin\theta,\ \lg\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}+\cos t_0\right\}$$

它确定θ曲线，即曲面上平行 xoy 面的圆（图 2—7）

〔例 5〕 证明：Σ上以 t 为参数的曲线L的方程，利用曲线坐标可表示为

$$L: u=u(t),\quad v=v(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

或写作向量式

$$L: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

（证明）结果是比较明显的。事实上，当t在区间$[a,b]$上连续取值，则它所确定的点P必在Σ上沿曲线L连续变动，这时点P的曲线坐标u，v也必随 t 的单值连续改变而单值连续改变，所以 u，v也必为t的单值连续函数，即

$$u=u(t),\quad v=v(t)$$

它就是Σ上的曲线L的曲线坐标方程。写成向量式为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$$

例如由某直线束（非平行）及以线束顶点为心的同心圆族组成一曲线网，除顶点外，二族在整个平面上是正则的。其中直线族的参数，取为族中直线与某一事先确定的直线的交角φ，圆族的参数取其半径ρ，由此而得的曲线坐标系即是我们常见的极坐标系（图 2—8）。

若设该平面上曲线L是阿基米德螺线，则利用曲线坐标可

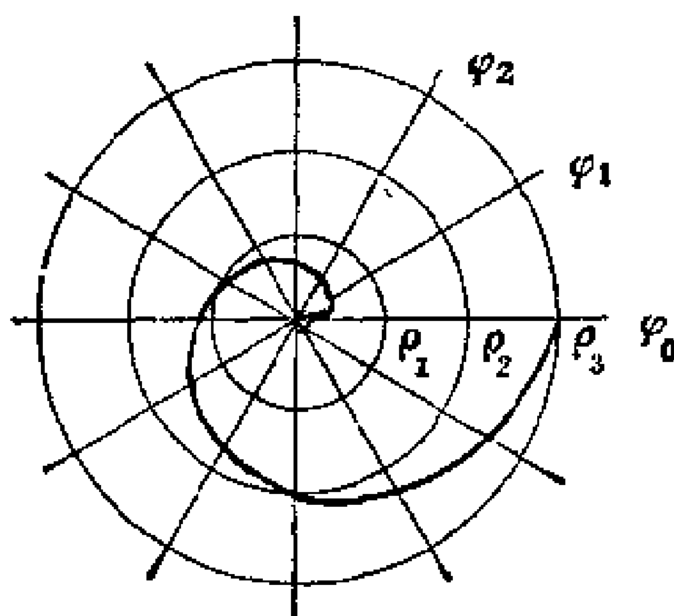


图 2 — 8

表示为

$$L: \rho = vt \quad \varphi = \omega t$$

其中 v 表示质点按直线运动速度的大小，ω 为质点按圆周运动转动角速度的大小。其向量式为 $\boldsymbol{r} = \{v(t), \omega(t)\}$.

§2.3 曲面的切向量与法向量

下面我们讨论曲面在一点的切向量和法向量.

【定义】 曲面上曲线在点 P 的切向量叫做曲面在点 P 的切向量.

【定理 1】 简单曲面片 Σ: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 的一阶偏导向量 $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ 是坐标曲线的切向量.

（证明） 已知简单曲面片的方程为

$$\Sigma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

设 u 曲线的曲线坐标方程为

$$u = u(t), \quad v = v_0 \ (\text{常数})$$

因此，u 曲线的向量方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),\ v_0)$$

把上式对 t 微分，得

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{dv_0}{dt}$$

由于 $v=v_0$ 是常数，所以 $\frac{dv_0}{dt}=0$，

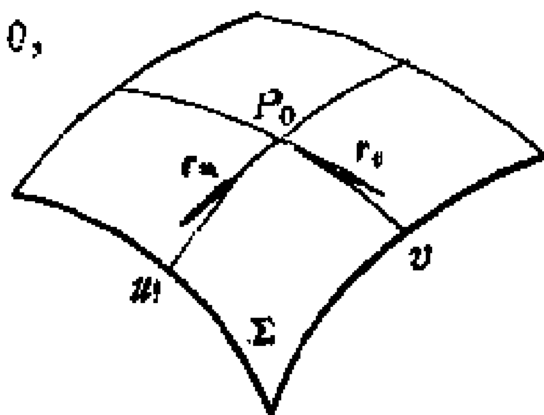


图 2—9

则上式变为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{du}{dt}=\lambda(t)\boldsymbol{r}_u$$

因为 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 是 u 曲线的切向量，

而 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 共线，所以 $\boldsymbol{r}_u$ 是坐标曲线 u 的切向量。同理可证 $\boldsymbol{r}_v$ 是 v 曲线的切向量。显然 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$ 也是曲面的切向量(图2—9)。

【定理 2】 简单曲面片 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$ 上任意点 P 的切向量全体确定一个切平面。切平面的方程为

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\cdot(\rho-\boldsymbol{r}_0)=0$$

(证明) 设 Σ 上过点 P 的任意一条曲线 L 的曲线坐标方程为

$$L: u=u(t),\ \ v=v(t)$$

它的向量方程为

$$L: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),\ v(t))$$

将上式对 t 微分得 L 在点 P 的切向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt}$$

$$=\left(\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{du}\right)\frac{du}{dt} \qquad (2.2)$$

从上式我们可以看出：

（1）Σ是简单曲面片，由其定义知，$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$皆不为零向量．所以$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq0$，即$\boldsymbol{r}_u$与$\boldsymbol{r}_v$线性无关．

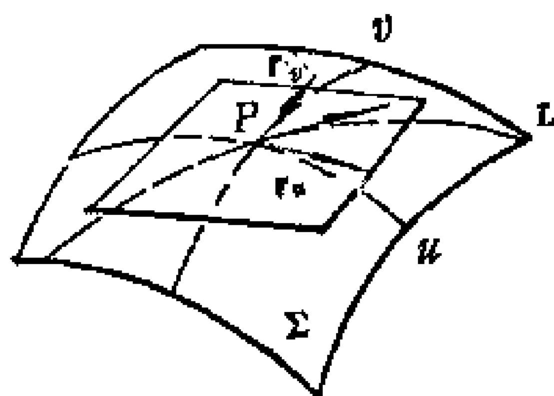


图 2—10

（2）Σ已经参数化，因此过点P的坐标曲线一般只有一条u曲线和一条v曲线，因此，作为它们的切向量的$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$在点P是常向量．

（3）Σ上过点P的任意曲线L在点P的切向量$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，即$\Sigma$在点$P$的切向量都与$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$共面，而且$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的方向由$dv/du$来确定．因为由方程（2·2）可知$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$由向量$\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{du}$来确定，而在点$P$，$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$皆为常向量，故$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的方向由$\frac{dv}{du}$来确定，也就是说$L$的切线方向由$\frac{dv}{du}$来确定，因此$\frac{dv}{du}$相当于切线的“斜率”．

因此，可以说Σ在点P的切向量全体确定Σ在点P的切平面（图 2—10）．

我们设切点P的向径为$\boldsymbol{r}_0$，切平面上流动点的向径为$\boldsymbol{\rho}$，则$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0$必与$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$共面，因此，切平面的方程为

$$(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

或

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

【推论】过简单曲面片 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一点M_0，且与该点切平面垂直的直线叫Σ在点M_0的**法线**。它的方程为：

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}_0+\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

〔证明〕根据法线的定义可知，Σ 在 M_0 点的法线就是过点M_0，且以 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 为方向向量的直线，从而，如果设点M_0的向径为$\boldsymbol{r}_0$，法线上流动点的向径为$\boldsymbol{\rho}$，则法线方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0=\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

或 $$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\times(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

〔例〕已给锥面方程为$\Sigma:\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ v\operatorname{ctg}\theta\}$（其中$\theta$是锥面母线与锥轴的夹角），试求在点 $P(u_0,v_0)$的切平面和法线方程。

〔解〕已知锥面方程为 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ v\operatorname{ctg}\theta\}$，所以

$$\boldsymbol{r}_u=\{-v\sin u,\ v\cos u,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{\cos u,\ \sin u,\ \operatorname{ctg}\theta\}$$

因为在点 $P(u_0,v_0)$ 的法向量$\boldsymbol{n}$为（P不为顶点，所以$\boldsymbol{n}\neq 0$）。

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$$

$$=\{v_0\operatorname{ctg}\theta\cos u_0,\ v_0\operatorname{ctg}\theta\sin u_0,\ -v_0\}$$

所以切平面的方程为

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

即 $$x\operatorname{ctg}\theta\cos u_0+y\operatorname{ctg}\theta\sin u_0-z=0$$

而法线方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0=\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

即

$$\frac{x-v_0\cos u_0}{v_0\operatorname{ctg}\theta\cos u_0}=\frac{y-v_0\sin u_0}{v_0\operatorname{ctg}\theta\sin u_0}=\frac{z-v_0\operatorname{ctg}\theta}{-v_0}$$

§3 单参曲面族的包络

已给曲面方程 $F(x,y,z;\alpha)=0$. 其中α为族参数，当α在它的变动区域取不同实数值时，确定一族曲面，称之为**单参曲面族**．记作$\Sigma\alpha$.

例如，$x^2+y^2+z^2=\alpha^2$，当α取不同实数时，这个方程确定一同心球面族。

【定义】已给单参曲面族 Σ_α:$F(x,y,z;\alpha)=0$. 其中α是族Σ_α的参数．如果存在曲面S，它满足下列条件：

（1）S上每个点都有族Σ_α中一曲面与S相切；

（2）对于族Σ_α中每个曲面都与S相切。

这时称S为Σ_α的**包络曲面**（图2—11）．

【定理】已给单参曲面族Σ_α:$F(x,y,z;\alpha)=0$，如果存在包络曲面，则从

$$\begin{cases} F(x,y,z;\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z;\alpha)=0 \end{cases}$$

中消去参数α得到曲面Σ（判别曲面）：

$$\varphi(x,y,z)=0$$

从判别曲面Σ上去掉Σ_α上的奇点（$F_x=F_y=F_z=0$的点）的曲面S的方程就是Σ_α的包络曲面的方程。

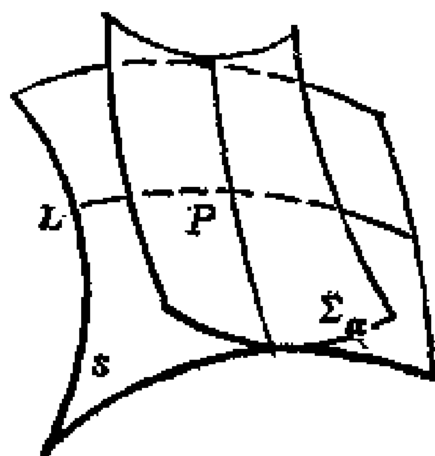


图2—11

（证明）设族Σ_α有包络曲面S，我们在S上适当的选取一条曲线

$$L: x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

使其包含Σ_α中每个曲面上的点，对每个参数t的值都有L上一

个点 P 和它对应。根据包络曲面的定义可知，对每个点 P，都有 Σ_α中一个曲面在点 P 与 S 相切。因此族参数α必为t的函数，即

$$\alpha=\alpha(t) \tag{3·1}$$

又根据定义可知L上的点都是Σ_α上的点，所以

$$F(x(t),y(t),\ z(t);\ \alpha(t))=0$$

微分上式得

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}+F_\alpha\frac{d\alpha}{dt}=0 \tag{3·2}$$

从数学分析中已知（3·2）式中的 $F_x, F_y,\ F_z$是族Σ_α的法向量 ∇F 的坐标，而 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$ 是曲线L的（也是曲面S的）切向量$\dot{r}$的坐标。我们根据包络的定义可知Σ_α与S相切，则Σ_α与S有共同切平面。因此，必有

$$\nabla F\cdot\dot{r}=F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=0 \tag{3·3}$$

将（3·3）代入（3·2）得

$$F_\alpha\frac{d\alpha}{dt}=0$$

由（3·1）式知 $\frac{d\alpha}{dt}\neq0$，所以$F_\alpha=0$，即

$$F_\alpha(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0$$

因此，包络曲面S上点的坐标满足

$$\begin{cases}F(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0\\ F_\alpha(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0\end{cases} \tag{3·4}$$

同样也满足从（3·4）式中消去参数α所得的方程

$$\varphi(x,\ y,z)=0。$$

现在对（3·4）式稍做探讨，根据上面的证明已知，如果曲面族Σ_a存在包络曲面S，则由方程（3·4）给出．反之，满足方程（3·4）的点（x，y，z）不一定是包络上的点，即存在不满足包络定义的点．因为（3·4）式的第二式$F_a(x,y,z;a)=0$是由二曲面相切条件（3·3）式

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=0$$

所确定．上式只是二曲面相切的必要条件，不是充分条件．因为Σ_a的奇点 $F_x=F_y=F_z=0$ 也满足上式，但在奇点二曲面无共同切平面．对于这样奇点虽然满足（3·4）式，但不满足包络定义．而为方程（3·4）既包含包络上点也可能还含不满足包络定义的Σ_a上奇点．于是我们把（3·4）所确定的曲面叫Σ_a的判别曲面Σ，从Σ中去掉族Σ_a的奇点，即使$F_y=F_y=F_z=0$的点，Σ就是所求的包络曲面S．

怎样从Σ上挑出Σ_a的奇点呢？为计算上方便，从（3·4）式解出x，y，z，再把它们代入Σ_a的偏导函数F_x，F_y，F_z中去，使$F_x=F_y=F_z=0$的点就是判别曲面的奇点，把这些点剔除后，判别曲面就是Σ_a的包络曲面S（可参阅学习指导）．

〔例1〕试求球面族 Σ_a：$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ 的包络曲面．其中r是常数，而a是曲面族的参数．

（解）已知曲面族

$$\Sigma_a: F=x^2+y^2+(z-a)^2-r^2=0$$

关于a微分上式得

$$F_a=-2(z-a)=0$$

即 $$z-a=0$$

与原曲面族方程消去参数a得

$$\Sigma: x^2+y^2=r^2$$

当 $F_x = 2x = 0$ 时，$x = 0$

当 $F_y = 2y = 0$ 时，$y = 0$

当 $F_z = -2(z-\alpha) = 0$ 时，$z = \alpha$

显然，$\{0, 0, \alpha\}$ 点不在Σ上，也就是满足它的 x，y，z 都不使 $F_x = F_y = F_z = 0$，所以Σ是球面族的包络曲面 S，即母线平行于OZ轴的圆柱面.

在工程技术中，我们所遇到的单参曲面族一般都是由参数形式给出的，如 Σ_t：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v; t)$，下面给出求其包络曲面的简单方法.

〔例 2〕 已给一个单参曲面族 Σ_t：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v; t)$，其中 t 是参数，如果由 $(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_t) = 0$ 中找到 u，v，t 间关系，代入曲面族 Σ_t 的方程，消去一个参数，则得包络曲面方程.

〔解〕 设包络曲面 S 上点为

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta), \quad t = t(\alpha, \beta)$$

根据包络的定义可知它必在各 Σ_t 上，因此它必满足曲面族方程 Σ_t：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v; t)$. 又因为 Σ_t 中各曲面都与包络 S 相切，于是各切点向径为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(\alpha, \beta), \ v(\alpha, \beta), \ t(\alpha, \beta))$$

对上式微分得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \beta} \tag{3.5}$$

这里 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$ 是切于包络面二线性无关向量，而 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ 是切于族曲面的二线性无关向量，而此，S 为包络的充要条件

是在切点处$\frac{\partial r}{\partial \alpha}$，$\frac{\partial r}{\partial \beta}$所确定的平面与$\frac{\partial r}{\partial u}$，$\frac{\partial r}{\partial v}$所确定的平面重合。由（3·5）式可知$\frac{\partial r}{\partial t}$在$\frac{\partial v}{\partial u}$，$\frac{\partial r}{\partial v}$所确定的平面上，所以$S$为包络的充分必要条件是在切点处

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial t}\right) = 0$$

从上式解出u，v，t间关系，代入$r = r(u, v; t)$ 即为所求包络曲面方程。

〔例3〕已知曲线 $r = r(s)$，求其密切平面族

π_s: $\rho = r(s) + \alpha\tau(s) + \beta\nu(s)$ 的包络。其中α，β是密切面的参数，S是族参数。

（解）为求其密切面族的包络，先证

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}, \frac{\partial \rho}{\partial \beta}, \frac{\partial \rho}{\partial s}\right) = 0$$

因为

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \tau(s)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = \nu(s)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = (1 - \beta\kappa)\tau + \alpha\kappa\nu + \beta\chi\beta$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}, \frac{\partial \rho}{\partial \beta}, \frac{\partial \rho}{\partial s}\right) = (\tau, \nu, \beta)\chi\beta = 0$$

所以　　$\beta = 0$。

将 $\beta = 0$ 代入密切面族方程得

$$\rho = r(s) + \alpha\tau(s)$$

即切线曲面为包络曲面。

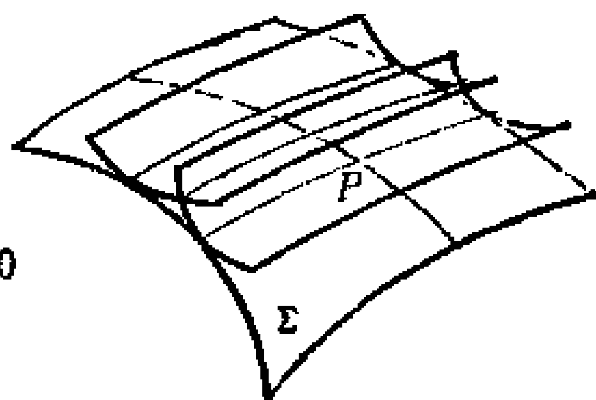
【定义】对于给定的 α，方程

$$L_\alpha:\ \begin{cases} F(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \\ F_\alpha(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \end{cases} \tag{3·6}$$

确定一条曲线 L_α，不含曲面族 Σ_α 上奇点的那些曲线 L_α 都叫 Σ_α的**特征线**。当α变化时（3·6）所确定的曲线族叫**特征线族**。

【定理 2】特征线是曲面族 Σ_α 中相邻二曲面的交线的极限。

（证明）设曲面族Σ_α中相邻二曲面的交线L为



$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \\ F(x,\ y,\ z;\ \alpha+\Delta\alpha)=0 \end{cases}$$

从解析几何中已知交线上点的坐标必满足方程

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \\ \dfrac{F(x,y,z;\ \alpha+\Delta\alpha)-F(x,y,\ z;\ \alpha)}{\Delta\alpha}=0 \end{cases}$$

图 2—12

当$\Delta\alpha\to 0$ 时，上式变为

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \\ F_\alpha(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \end{cases}$$

这时交线 L 随$\Delta\alpha\to 0$面趋近于极限，L 上点必满足上式，面上式是特征线的方程，因此定理得证（图 2—12）．

【推论 1】单参曲面族 Σ_α:$F(x,\ y,z;\alpha)=0$ 中的每个曲面与包络曲面 S 沿特征线L_α相切。

（证明）设特征线 L 的方程为

$$L:\ \begin{cases} F(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \\ F_\alpha(x,\ y,\ z;\ \alpha)=0 \end{cases}$$

因此，L在 Σ_α: $F(x, y, z; \alpha)=0$ 上。又因为包络S是上式中消去参数而得到的S: $\varphi(x, y, z)=0$，所以L上的点的坐标 x, y, z必满足 $\varphi(x, y, z)=0$，即特征线必在包络S上。这样L即在族Σ_α上又在包络S上，又知族Σ_α中曲面与S相切，因此 Σ_α中每个曲面与它的包络S沿特征线相切。即族中曲面与它的包络不仅切于一点，而是切于一条特征线(图 2—13)。

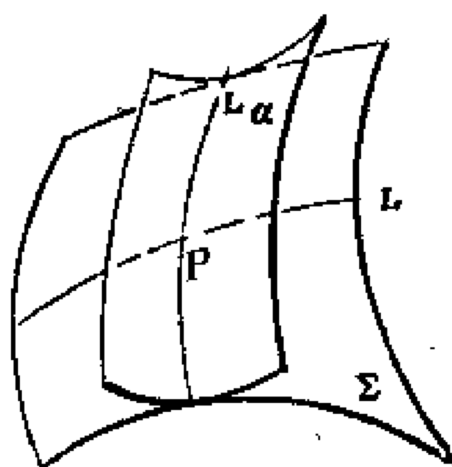


图 2—13

【推论】单参曲面族Σ_α的包络曲面S是特征线L_α的轨迹。

（证明）我们在包络S上适当的选取一条曲线

$$L^*: x=x(t), \ y=y(t), \ z=z(t)$$

它不是特征线且与所有特征线都相交的曲线。

当参数t连续变动时，则点P沿曲线L^*连续移动。但在点P，曲面族Σ_α中曲面与包络面S沿特征线L_α相切，即过L^*上每个点P在S上都必有一条特征线L_α。因此，当点P沿L^*移动时，则过每个点P的特征线L_α又都与L^*相交，这时特征线构成包络曲面S。

§4 脊 线

下面我们再研究包络曲面上特征线族L_α的包络曲线。

【定义】已给曲面族Σ_α的包络曲面S的特征线族

$$L_a: \begin{cases} F(x, y, z; a) = 0 \\ F_a(x, y, z; a) = 0 \end{cases}$$

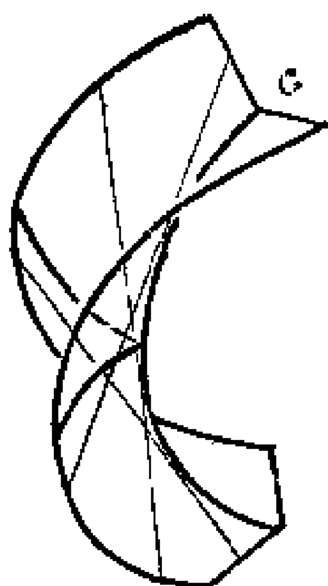


图 2 —14

如果存在曲线C，满足

（1）特征线族L_a中每条曲线都与曲线C相切；

（2）曲线C上每个点都有特征线族L_a中一曲线和它相切．则曲线C叫作L_a的包络曲线，这条曲线C也叫作包络曲面S的脊线．有时也称C为曲面族Σ_a的脊线（图2—14）．

下面给出求脊线方程的方法．

【定理１】曲面族Σ_a的特征线族

$$L_a: \begin{cases} F(x, y, z; a) = 0 \\ F_a(x, y, z; a) = 0 \end{cases} \tag{4·1}$$

的包络曲线（脊线）为方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z; a) = 0 \\ F_a(x, y, z; a) = 0 \\ F_{aa}(x, y, z; a) = 0 \end{cases}$$

的解$C: x = x(a),\ y = y(a),\ z = z(a)$ 所确定的曲线．

（证明）已知曲面族的特征线族为

$$L_a: \begin{cases} F(x, y, z; a) = 0 \\ F_a(x, y, z; a) = 0 \end{cases}$$

设它的包络曲线C的方程为

$$C: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

因为C是L_a的包络，则C上每个点P都有L_a中一曲线在点P与C相切，而且由于L_a中每一曲线都必与C相切，可知C上点都

在族L_a上，所以

$$\begin{cases} F(x(t),\ y(t),\ z(t);\ a(t))=0 \\ F_a(x(t),\ y(t),\ z(t);\ a(t))=0 \end{cases}$$

就 t 微分（4.1）式得

$$F_{ax}\frac{dx}{dt}+F_{ay}\frac{dy}{dt}+F_{az}\frac{dz}{dt}+F_{aa}\frac{da}{dt}=0 \quad (4\cdot2)$$

其中 $\nabla F=\{F_{ax},\ F_{ay},\ F_{az}\}$ 是曲面$F_a=0$的法向量，

而
$$\dot{r}=\left\{\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right\}$$

是曲线C的切向量．由于特征线F_a与脊线C相切，则必有

$$\nabla F_a\dot{r}=F_{ax}\frac{dx}{dt}+F_{ay}\frac{dy}{dt}+F_{az}\frac{dz}{dt}=0$$

把它代入(4.2)式得

$$F_{aa}\frac{da}{dt}=0$$

因为 $a=a(t)$，所以

$$F_{aa}(x,y,z;a)=0$$

由于C与L_a相切，C上点都在L_a上，所以C上点的坐标必满足

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z;\ a)=0 \\ F_a(x,\ y,\ z;\ a)=0 \\ F_{aa}(x,\ y,\ z;\ a)=0 \end{cases}$$

反之，满足上面方程组的曲线（解曲线）也一定与 L_a 相切．

解上面方程组，得

$$C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x(a),\ y(a),\ z(a))$$

由于C是解曲线，所以有

$$\nabla F_a\dot{r}=0$$

故解曲线C的方程就是特征线族L_a的包络线方程.

由上述的脊线方程，对于每一个a值，可在族中的每个曲面上求得脊线上的一点，此点又称为特征点. 因此，曲面族的脊线可视为特征点的轨迹.

§5 单参平面族的包络

当曲面族中的曲面都是平面时，也存在与所有平面都相切的曲面S，此时称它为平面族的包络面. 下面，我们利用脊线对单参平面族的包络曲面进行分类.

【定理】 单参平面族 π_a: $\boldsymbol{n}(a)\boldsymbol{r}-p(a)=0$ 的包络曲面S只有三类，即柱面、锥面和切线曲面（由曲线的切线所构成的曲面）.

（证明）我们知道方程组

$$\begin{cases} F=\boldsymbol{n}(a)\boldsymbol{r}-p(a)=0 \\ F_a=\dot{\boldsymbol{n}}(a)\boldsymbol{r}-\dot{p}(a)=0 \\ F_{aa}=\ddot{\boldsymbol{n}}(a)\boldsymbol{r}-\ddot{p}(a)=0 \end{cases} \tag{5.1}$$

的解即为脊线C的方程. 由于它是一次方程，显然它有唯一解的充要条件是

$$(\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}},\ddot{\boldsymbol{n}},)\neq 0$$

(i) 如果 $(\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}},\ddot{\boldsymbol{n}})=0$，则 (5·1) 无解，即无脊线. 此时 $\boldsymbol{n}(a)$ 则是平行于定平面的向量函数，但它又是平面族π_a的法向量，这时族π_a中的平面必垂直于定平面，因此，π_a的特征线族 L_a 必为垂直于定平面的平行直线族. 因面由平行直线族L_a的轨迹所构成的包络面S必为柱面.

(ii) 如果 $(\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}},\ddot{\boldsymbol{n}})\neq 0$，则方程组 (5·1) 有唯一解，设为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a)$，它是脊线$C$的方程. 因为特征线族 L_a 的包络是

脊线C，特征线族（直线族）L_a必是脊线C的切线族，若$\boldsymbol{n}(a)$不是常向量，则C为一条一般空间曲线．由于每一条特征线都与它相切，所以包络曲面是脊线C的切线曲面。

(iii) 如果 $(\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}},\ddot{\boldsymbol{n}})\neq 0$，但方程组（5.1）的解是一个常向量．这时，脊线$C$是一个定点，但特征线又必须与脊线相切，因此，包络曲面S必为过定点的直线族的轨迹，即为锥面。

总括上面的结果可知，单参平面族 π_a 的包络只有三种情况：

当无脊线时，其包络为柱面；当脊线为一空间曲线时，其包络为切线曲面；当脊线退化为一点时，其包络为锥面。

〔例 1〕试求平面族

$$\pi_a: x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1 = 0$$

的包络面。其中α为参数。

（解）将π_a方程对于α微分，得

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0$$

由于π_a上无奇点，所以由方程组

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1 = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

消去参数 α，得包络曲面方程：

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 1 = 0$$

〔例 2〕试证曲线 $L: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的密切平面族π_s的包络曲面是L的切线曲面，而且L就是脊线。

（证明）设 $L: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的密切平面族π_s的方程为

$$\pi_s: \boldsymbol{\beta}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(s)) = 0$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 是密切平面上流动点的向径，$\boldsymbol{\beta}(s)$ 是曲线L的付法线向量．就参数微分上式，得

$$\mathbf{v}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0$$

由此，族π_s的特征线L_s的方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0\\ \mathbf{v}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0\end{cases}$$

从上式可以看出，特征线 L_s 是曲线L 的密切面与从切面的交线，这个交线是曲线L在该点的切线，故平面族π_s的特征线是$L:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切线. 因此，密切平面族π_s的包络曲面是曲线L的切线族的轨迹，即切线曲面.

又由于S是 $L:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切线曲面，每条特征线都与L相切，显然L是特征线族的包络. 因此原曲线是切线曲面的脊线.

§6 直纹面和可展曲面

直纹面是已知直线按某种规律运动所生成的曲面，每条直线都叫作这个直纹面的**母线**. 例如，在解析几何中学过的单叶双曲面，双曲抛物面、柱面、锥面等都是直纹面.

在直纹面上取一条曲线，通常称其为导线

$$L:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(u)\quad u_0\leqslant u\leqslant u_1 \tag{6·1}$$

并设 $\boldsymbol{\tau}(u)$ 为经过 $\boldsymbol{\rho}(u)$ 点的母线上的一个不等于零的向量. 则直纹面的方程可写做

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u) \tag{6·2}$$

其中，$u_0\leqslant u\leqslant u_1$，$-\infty<v<+\infty$.

参数曲线u=常数为母线，v=常数为导线.

特殊地，若曲线L缩成一点p_0，其向径为$\boldsymbol{\rho}_0$，则直纹面为锥面（图2—15）.

方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}_0 + v\boldsymbol{\tau}(u) \qquad (6\cdot3)$$

若$\boldsymbol{\rho}(u)$确定一曲线 $\boldsymbol{\tau}(u)$ 是定向向量，则直纹面为柱面（图2—16）．方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{\tau} \qquad (6\cdot4)$$

曲线L的切线所生成的切线曲面也是直纹面（图2—17）其方程为

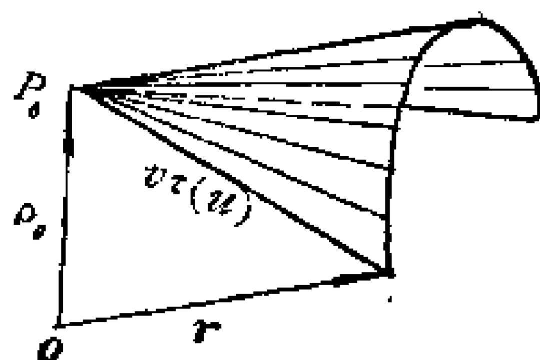


图 2—15

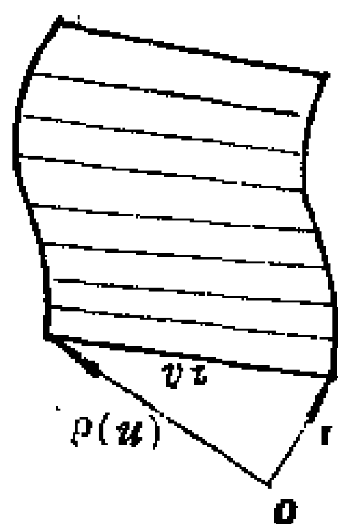


图 2—16

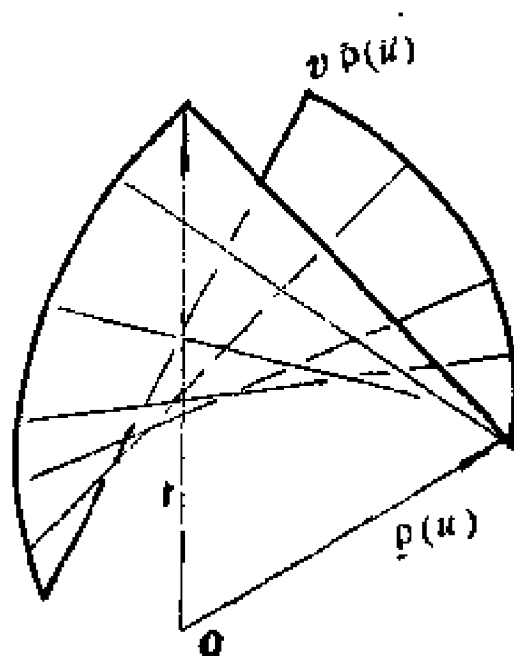


图 2—17

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{\rho}'(u) \qquad (6\cdot5)$$

一条曲线L的主法线和副法线所生成的直纹面分别叫做**主法线曲面**和**副法线曲面**．例如，圆柱螺线，是正螺面

$$\boldsymbol{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\}$$

当 $u = u_0$（常数）时，$\boldsymbol{r} = \{u_0\cos v,\ u_0\sin v,\ bv\}$ 确定正螺面上的圆柱螺线．恰好是母线上定长线段绕轴旋转，其转动角和交点移动的距离成正比的端点的轨迹．

【定义】若直纹面记作S，其母线为L，如果沿它的母线只有一个切面时，则说直纹面是**可展曲面**．显然圆柱面和圆

锥面都是可展的。

直纹面和可展曲面间有如下关系

【定理】直纹面是可展曲面的充要条件是 S 为单参平面族的包络。

（证明）充分性：我们已经知道单参平面族π_a的包络曲面 S 是直纹面，且仅是柱面、锥面和切线曲面这三种曲面。又知族π_a中每个平面都沿 S 的母线（特征线）L_a与 S 相切。并且对于这三种曲面沿每条母线只有唯一确定的切平面，故切平面即为族π_a中的平面，所以单参平面族的包络是可展曲面。

必要性：设直纹面 S 是可展曲面，即对每条母线L_a，S 都有唯一确定的切平面 π_a，据包络定义 S 为单参平面族 π_a 的包络。

〔例〕试证直纹面 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)$ 为可展曲面的充分必要条件是 $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}')=0$。其中，$\boldsymbol{\rho}$是直纹面上与母线都相交的曲线$L^*$的点的向径，$\boldsymbol{\tau}$ 是母线的方向向量，$\boldsymbol{r}$ 是直纹面上流动点的向径。

（证明）设向量函数 $\boldsymbol{\rho}(u)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(u)$ 为C^1类，由已给直纹面方程 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)$ 得

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{\rho}'(u)+v\boldsymbol{\tau}'(u), \quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{\tau}(u)$$

所以直纹面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{\rho}'(u)\times\boldsymbol{\tau}(u)+v\boldsymbol{\tau}'(u)\times\boldsymbol{\tau}(u)$$

必要性：设直纹面是可展的，据定义知，沿母线的切平面应当是唯一确定的，所以沿母线各点的法向量是定向向量，但 v是变数，因而 $\boldsymbol{\rho}'\times\boldsymbol{\tau}$与 $\boldsymbol{\tau}'\times\boldsymbol{\tau}$必是共线的，故有

$$(\boldsymbol{\rho}'\times\boldsymbol{\tau})\times(\boldsymbol{\tau}'\times\boldsymbol{\tau})=0$$

用三重积展开式，得

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}'-(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}')\boldsymbol{\tau}=0$$

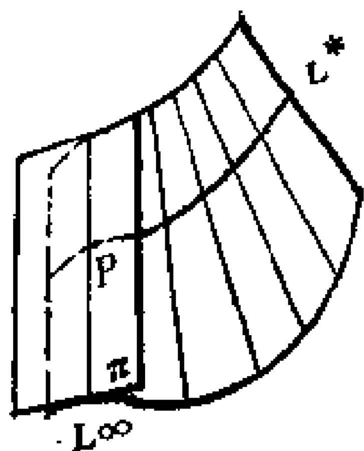


图 2—18

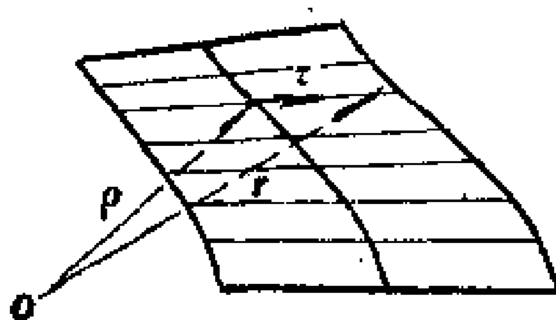


图 2—19

因为　　$(\rho', \tau, \tau) = 0$

所以　　$(\rho, \tau, \tau')\tau = 0$

但　　$\tau \neq 0$

即　　$(\rho', \tau, \tau') = 0$

充分性：已知$(\rho', \tau, \tau') = 0$，所以 ρ'，τ'，τ共面，因此$\rho' \times \tau$与$\tau' \times \tau$共线，即沿母线，S的法向量n是个定向向量，所以沿母线的切平面是唯一确定的．即直纹面是可展的（图2—18，2—19）．

利用上例的结论可以验证，一切锥面、柱面和每条曲线的切线曲面都是可展的，而且可展曲面也只有这三种类型．

§7　渐伸线与渐屈线

作为包络理论的应用，我们讨论渐伸线与渐屈线．

【定义】已给曲线L，它的切线族的正交曲线为L'，则称L'为L的**渐伸线**，同时又称L为L'的**渐屈线**．显然，渐屈线是渐伸线法线族的包络曲线．

【定理1】若已给曲线 $L: r = r(t)$，它的渐伸线 L' 的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+(s_0-s)\boldsymbol{\tau}$$

（其中，$\boldsymbol{\rho}$是L'上的流动向径，s_0是L上定点p_0的参数，$\boldsymbol{\tau}$ 是L的切向量。）

（证明）由定义已知曲线L的渐伸线L'是曲线L的切线族的正交曲线，因此，L'上的点M都必在L的切线上。我们设L'上M点的向径为ρ（图2—20），则$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\tau}(s)$ （7·1）

就s微分之可得

$$\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{\tau}(s)+\lambda'(s)\boldsymbol{\tau}(s)+\lambda(s)\underline{\boldsymbol{\tau}'(s)}$$

利用曲线的 F—S公式，

上式可写作

$$\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{\tau}(s)+\lambda'(s)\boldsymbol{\tau}(s)+\lambda(s)\underline{\kappa\boldsymbol{\nu}}$$

用$\boldsymbol{\tau}$对上式两端作内积，

再根据渐伸线的定义可知

$\boldsymbol{\rho}'\perp\boldsymbol{\tau}$，所以

$$\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\tau}=1+\lambda'(s)=0$$

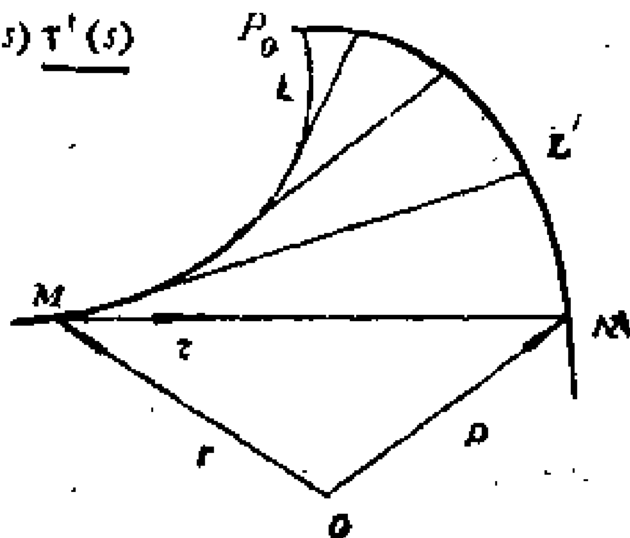


图2—20

即
$$\frac{d\lambda}{ds}=-1 \tag{7·2}$$

将（7·2）式积分，得

$$\lambda=\int_{s_0}^{s}-ds=s_0-s \tag{7·3}$$

将(7·3）式代入（7·1）式得

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+(s_0-s)\boldsymbol{\tau}$$

这就是曲线L的渐伸线方程，显然只要给定一个初始点$P(s_0)$就确定一条渐伸线L'。

〔例1〕试证曲线L上任意点 M_1 的切线与它的渐伸线L_1交点N的距离$|\overrightarrow{M_1N}|$等于L的初始点P_0到点M_1的弧长$|\overset{\frown}{P_0M_1}|$

（图 2—21）.

（解）设 $L: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的渐伸线方程为

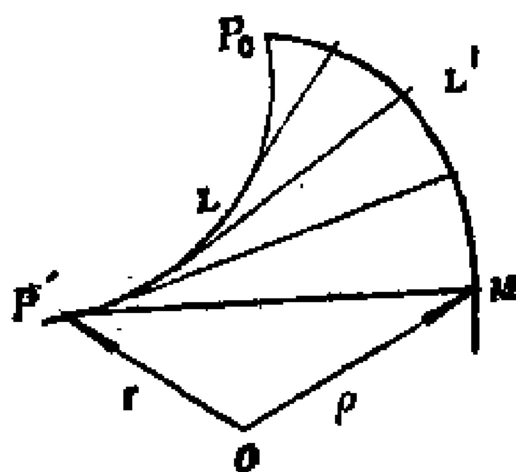


图 2—21

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+(s_0-s)\boldsymbol{\tau}$$

设点M_1所对应的参数为 s_1，即 $|\overset{\frown}{P_0M_1}|=s_0-s_1$，这样，$M_1(s_1)$ 的切线与渐伸线L'的交点N的向量由上式可知应为

$$\overrightarrow{M_1N}=\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s)=(s_0-s_1)\boldsymbol{\tau}(s_1)$$

所以

$$|\overrightarrow{M_1N}|=|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_1)|=|s_0-s_1||\boldsymbol{\tau}(s_1)|=|\overset{\frown}{P_0M_1}|$$

〔例 2〕试证一条曲线 $L: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的两条渐伸线 L_1，L_2是等距曲线，它们的距离等于L_1，L_2的初始点M_1，M_2的弧长 $|\overset{\frown}{M_1M_2}|=s_2-s_1$（图 2—22）.

（解）只须证明对任意点$M(s)$，$|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1|$是常数，且等于二初始点间的弧长．设$L_1$，$L_2$ 的初始点为$M_1(S_1)$，$M_2(S_2)$，则与其对应的两条渐伸线的方程为

$$L_1: \boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{r}(s)+(s_1-s)\boldsymbol{\tau}(s)$$

$$L_2: \boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{r}(s)+(s_2-s)\boldsymbol{\tau}(s)$$

所以，
$$\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1=[(s_2-s)-(s_1-s)]\boldsymbol{\tau}(s)$$

因此，
$$|\overrightarrow{N_1N_2}|=|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1|=|s_2-s_1|=|\overset{\frown}{M_2M_1}|$$

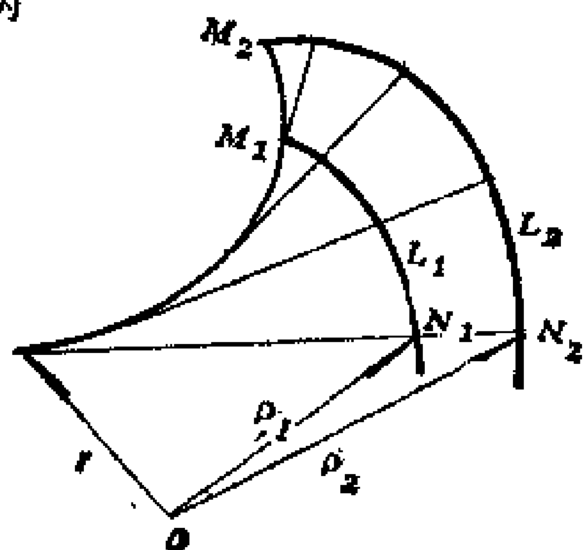


图 2—22

现在，我们研究已给曲线的渐屈线。

【定理2】若已给曲线L'：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则它的渐屈线$L$的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+R\boldsymbol{\nu}+(R\operatorname{tg}\varphi)\boldsymbol{\beta}$$

其中，$\boldsymbol{\rho}$是L上流动点的向径，R是L'的曲率半径，φ是L'的任意法线向量$\boldsymbol{n}$与主法线向量$\boldsymbol{\nu}$的交角（图2—23）。

（証明）　已知L'的渐屈线是L'的法线族的包络曲线L，因此，L上点必都在L'的法线族上，所以渐屈线L的方程为

$$L:\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{n}(s) \tag{7.4}$$

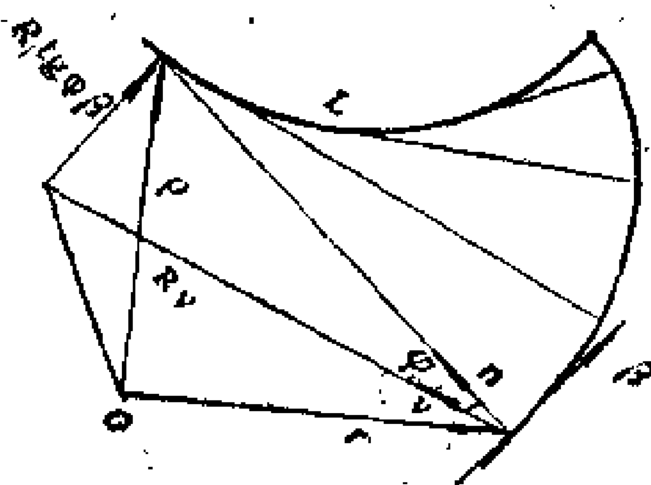


图2—23

由于$\boldsymbol{n}$为L'的单位法向量，因此必与$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$共面，所以

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\nu}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi \tag{7.5}$$

其中φ是$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{\nu}$的交角。将（7.5）代入（7.4）得

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)(\boldsymbol{\nu}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi) \tag{7.6}$$

现在我们确定系数$\lambda(s)$和φ应该满足的条件，为此，我们就s微分（7.6）式，由于φ也是s的函数，所以得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}'&=\boldsymbol{\tau}+\lambda'(\boldsymbol{\nu}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi)+\lambda(\boldsymbol{\nu}'\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}'\sin\varphi)\\&\quad+\lambda\left(\boldsymbol{\nu}\frac{d}{ds}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\frac{d}{ds}\sin\varphi\right)\\&=\boldsymbol{\tau}+\lambda'(\boldsymbol{\nu}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi)+\lambda(-\kappa\boldsymbol{\tau}\cos\varphi+\\&\quad+\chi\boldsymbol{\beta}\cos\varphi-\chi\boldsymbol{\nu}\sin\varphi+\lambda(-\boldsymbol{\nu})\sin\varphi\varphi'+\boldsymbol{\beta}\cos\varphi\varphi')\\&=(1-\lambda\kappa\cos\varphi)\boldsymbol{\tau}+\lambda'(\boldsymbol{\nu}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi)\\&\quad+\lambda(\varphi'+\chi)(-\boldsymbol{\nu}\sin\varphi+\boldsymbol{\beta}\cos\varphi)\end{aligned} \tag{7.7}$$

根据渐屈线的定义，L'的法线就是L的切线，因此，必有$\boldsymbol{\rho}'$与$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\nu}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi$共线，而$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{\tau}$和$(-\boldsymbol{\nu}\sin\varphi+\boldsymbol{\beta}\cos\varphi)$垂直，

所以（7.7）式中的第一和第三项必为零，即

$$1-\lambda\cos\varphi\kappa=0,\quad \varphi'+\chi=0 \tag{7.8}$$

由（7.8）式得

$$\lambda=\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}=R\cdot\frac{1}{\cos\varphi} \tag{7.9}$$

$$\varphi'=-\chi \quad 或 \quad \varphi=\int(-\chi)ds+\varphi_1 \tag{7.10}$$

其中，φ_1是任意常数。

（7.10）式告诉我们，如果曲线L'的法线族有包络曲线L，则它的法向量$\boldsymbol{n}$与主法线向量$\boldsymbol{\nu}$的交角φ的导数必须等于L'在该点的挠率χ加负号，即$-\chi$。

将（7.9）式代入（7.6）式，得渐屈线方程

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+R\boldsymbol{r}+(R\operatorname{tg}\varphi)\boldsymbol{\beta}.$$

它说明渐屈线L上的点p都在过L'的曲率中心且平行于L'上对应点的付法线向量$\boldsymbol{\beta}$的直线上，该点P与曲率中心的距离为$R\operatorname{tg}\varphi$。

【推论1】如果空间曲线L'的法线族存在包络曲线——渐屈线L，则将L'上法线在法平面上转一个定角后的法线族仍然存在包络——渐屈线。

（证明） 从前面的法线族构成包络的条件式

$$\varphi=\int(-\chi)ds+\varphi_1$$

可知，对每一个φ_1的值都确定一个函数$\varphi(s)$，因而，就确定一个法线族的包络曲线——渐屈线。它说明一条空间曲线L'具有一个单参数为φ_1的渐屈线族。因此，假设L'的两组法线的包络各为L_1，L_2，则它们所对应的函数各为：

$$\varphi^*=-\int\chi ds+\varphi_1^*$$

$$\varphi=-\int\chi ds+\varphi_1$$

从第一式减去第二式，得

$$\varphi^* - \varphi = \varphi^*_0 - \varphi_0$$

因为 φ^*_0，φ_0是两个常数，所以

$$\varphi^* - \varphi = 常数$$

因此，可知L'的法线族若存在包络曲线，则把L'的法线族在各自的法平面上旋转常数角所得到的新法线族，仍存在包络线。

习　　题

1．写出下列曲面的参数方程．

（1）椭圆柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

（2）双曲柱面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

（3）二次锥面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$；

（4）椭圆抛物面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$；

（5）双曲抛物面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$．

2．试求下列各参数方程（u，v为参数，a，b，c为正实数）确定何种曲面．

（1）$\boldsymbol{r}=\{a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ c\sin u\}$；

（2）$\boldsymbol{r}=\left\{u-\dfrac{v}{a},\ \dfrac{u}{b}+v,\ (1+c)\left(\dfrac{v^2}{a}+\dfrac{u^2}{b}\right)\right\}$；

（3）$\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}$；

（4）$\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u,\ b\operatorname{sh}u\cos v,\ c\operatorname{sh}u\sin v\}$．

3．试验证下列二参数方程确定同一曲面，并验证各自的参数曲线网是否为正交网．

(1) $\boldsymbol{r}=\left\{a\dfrac{1+uv}{u+v},\quad b\dfrac{u-v}{u+v},\quad c\dfrac{1-uv}{u+v}\right\}$

(2) $\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u\cos v,\ b\operatorname{ch}u\sin v,\ c\operatorname{sh}u\}$

4. 试证悬链面 $\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u\cos v,\ a\operatorname{ch}u\sin v,\ au\}$ 的参数曲线网构成正交网。

5. 试求曲面 $x=u+v,\ y=u^2+v^2, z=u^3+v^3$，在点P(2, 2, 2)处的切平面方程。

6. 试求曲面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ 2v\}$ 在点 $P\left(1,\ 1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切平面方程。

7. 试证曲面 $F(x,y,z)=0$，在点$P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的切平面方程为：$(x-x_0)F_{x_0}+(y-y_0)F_{y_0}+(z-z_0)F_{z_0}=0$。

8. 试证曲面 $x^n+y^n+z^n=a^n$ 在点 (x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为 $xx_0{}^{n-1}+yy_0{}^{n-1}+zz_0{}^{n-1}=a^n$。

9. 试在曲面 $xyz=1$ 上，求平行于平面 $x+y+z-3=0$ 的切平面方程。

10. 试证曲面 $x^{\frac{2}{3}}+\ y^{\frac{2}{3}}+\ z^{\frac{2}{3}}=\ a^{\frac{2}{3}}$的切平面被坐标面截取的线段的平方和是一常数。

11. 试证曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$的所有切平面都通过一定点。

12. 试求螺旋线的切线构成的曲面。并证明此曲面的法线与oz 轴交成定角。

13. 试证曲面 $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\varphi(v)$ 的法线方向余弦为

$$x=\frac{\varphi'\sin v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\quad y=\frac{\varphi'\cos v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}, z=\frac{u}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}.$$

14. 试证曲面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\sin 2v\}$ 上任一点的切平面与此曲面的交线之一为椭圆。

15. 试求椭圆面族 $\alpha^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)+\dfrac{z^2}{\alpha^2}=1$的包络面。

16．试求以平行于椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 的长轴a的弦为直径的球面族包络。

17．试求柱面族 $(y+\alpha)^2=(x+\alpha)^3$ 的包络。

18．试求螺旋线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ 的从切面的包络。

19．试证圆 $y=tx$，$x^2+y^2+z^2-2f(t)x-a^2=0$ 是球面族 $x^2+y^2+z^2-2f(t)x+2tf'(t)x-2f'(t)y-a^2=0$ 的特征线。

20．试证，以通过坐标原点的圆周 $x^2+y^2-2x=0$，$z=0$ 的弦为直径的球面族的包络为

$$X^2+Y^2=(X^2+Y^2+Z^2-X)^2$$

21．试求曲面族 $\boldsymbol{r}=\{u,\ v,\ -(u\alpha^2+v\alpha)\}$ 的包络。

22．试求平面族 $\alpha^3+\alpha^2x+\alpha y+z=0$ 的包络面的脊线方程。

23．试求平面族 $(a\boldsymbol{e}(\varphi)+b\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}-c\varphi=0$的包络面的脊线。

24．试证平面族$\dfrac{x}{a+\alpha}+\dfrac{y}{b+\alpha}+\dfrac{z}{c+\alpha}=1$ 的包络面的脊线方程为

$$x=\frac{(a+\alpha)^3}{(b-a)(c-a)},\quad y=\frac{(b+\alpha)^3}{(c-b)(a-b)},\quad z=\frac{(c+\alpha)^3}{(a-c)(b-c)}$$

(其中 $a\neq b\neq c$)。

25．试证半径为定值C中心在正则曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 上的球面族的包络面的脊线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\frac{\boldsymbol{\nu}}{k}\pm\sqrt{C^2-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\boldsymbol{\beta}$$ （其中k为曲率。）

26．试证平面族 $\alpha^2x+\alpha y+z=0$ 的包络面的脊线退化为一点。

27．已知抛物面方程为 $x=2au\cos v$，$y=2bu\sin v$，$z=2u^2(a\cos^2v+b\sin^2v)$，试在此曲面上求一条曲线使沿此曲线的曲面的切平面与oxy坐标面构成定角并求这族切平面的包络的脊线。

28．试证平面族 $\alpha^2x+2\alpha y+2z=2\alpha$ 的包络面是一锥面。并求其包络面方程。

29　试求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的法平面族的包络面的脊线方程。

30 试证定倾曲线的法平面族的包络面的脊线仍是定倾曲线。

31．试证曲线 $\boldsymbol{r}=\{at,\ bt^2,\ ct^3\}$ 的切线曲面是四次代数曲面。

32．试证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u^2+\frac{1}{3}v,\ 2u^3+uv,\ u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$ 是可展曲面。

33．试证明曲面 $\boldsymbol{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v, \sin v+(u+v)\cos v,\ u+2v\}$ 是可展曲面。

34．试证在二曲线 $\begin{cases} y^2=4ax \\ z=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} y^2=4bz \\ x=0 \end{cases}$ 上滑动直线构成的可展曲面是柱面。

35．证明双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$是不可展曲面。

36．试证挠率 $\chi\neq0$ 的曲线（挠曲线）的主法线和付法线所产生的曲面都不是可展曲面。

37．若可展曲面与曲面 $az=xy$ 沿曲线 $\begin{cases} az=xy \\ x^2=by \end{cases}$ 相切，试求此可展曲面的脊线。

38．试求曲线 $\boldsymbol{r}=\{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}$ 的渐伸线方程。

39．试求椭圆的渐屈线（只求椭圆平面上一条）。

40．试求圆柱螺线的渐伸线，并证明这些渐伸线都是平面曲线，而且它们所在的平面都垂直于圆柱的轴。

41．试证曲线C的渐伸线上任一点的切线与C 上对应点的主法线平行。

42．试证曲线C 的渐伸线的曲率为

$$k_1(s_1)=\frac{\sqrt{k^2+\varkappa^2}}{|s_1-s|k}.$$

43．试证曲线C的渐伸线的挠率为

$$\varkappa=\frac{K\varkappa'-\chi k'}{|s_1-s|k(k^2+\varkappa^2)}.$$

44．试证空间曲线C的渐伸线是平面曲线的充要条件是C 为定倾曲线。

45．试求螺旋线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ 的渐屈线方程。

第三章 曲 面 论

本章主要研究曲面的性质，它可以分为两个方面：一是研究与曲面形状无关而与曲面的度量有关的性质，即所谓曲面的内在性质；二是研究曲面在正常点邻域形状，即所谓曲面的外在性质。

§1 曲面的度量性质

在曲面上也象在平面上一样，可以度量两点间的距离，两条曲线的交角，以及曲线所围成的区域的面积．但是在曲面上引入度量的概念，不象在平面上那样简单．首先我们通过曲面切向量内积引进度量二次微分形式，通过它给出长度、角度和面积的计算公式。

§1.1 曲面的第一基本微分形式

为了研究曲面的度量性质，首先在曲面上引入二次微分形式的概念。

设给定曲面切线上两点的向径为$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$，它们之差为

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv \tag{1.1}$$

本身做内积

$$d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)$$
$$=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u du^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v du dv+\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v dv^2$$

令

$$E=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v,$$

$$G=\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v \qquad (1.2)$$

则有

$$d\boldsymbol{r}^2=|d\boldsymbol{r}|^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \qquad (1.3)$$

E,F,G 是向径的导数构成的，所以是微分不变量.

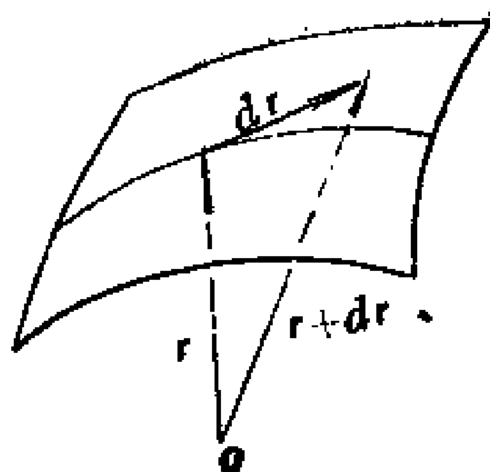


图3—1

【定义】我们称（1.3）式为曲面的第一基本微分形式，用 φ_1 表示. 系数 E,F,G，称为第一基本量. 它是向径微分的内积. 因此，它们是坐标变换的微分不变量.

因为 $\quad E=\boldsymbol{r}_u^2,\ G=\boldsymbol{r}_v^2$

所以 $\quad E>0,\quad G>0$

又由拉格朗日（Lagrange）恒等式得

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2=\boldsymbol{r}^2_u\boldsymbol{r}^2_v-(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2$$

$$=EG-F^2>0$$

根据线性代数关于二次形式的塞里维斯特（Sylvester）定理可知：第一基本微分形式（1.3）是恒正的.

〔例1〕试求球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\sin\varphi\cos\theta,\ a\sin\theta\}$ 的第一基本微分形式 $\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ -\pi<\theta\leqslant\pi\right)$.

（解）先将 $\boldsymbol{r}$ 对它的参数 φ，θ 分别微分得：

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-a\sin\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\cos\theta,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-a\cos\varphi\sin\theta,\ -a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\theta\}$$

则 $\quad E=\boldsymbol{r}_\theta^2=a^2,\ F=\boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_\varphi=0,\ G=\boldsymbol{r}^2_\varphi=a^2\cos^2\theta$

因此 $\quad \varphi_1=a^2(d\theta^2+\cos^2\theta d\varphi^2).$

〔例2〕试求空间曲线的切线曲面 $\rho=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{\tau}(s)$ 的第一基本微分形式 φ_1 $(-\infty<s<+\infty,\ -\infty<\lambda<+\infty)$.

（解）对上式就它的参数 s，λ 分别微分，则得

$$\boldsymbol{\rho}_s = \boldsymbol{\tau}(s) + \lambda\kappa\boldsymbol{\nu}(s)$$

$$\boldsymbol{\rho}_\lambda = \boldsymbol{\tau}(s)$$

所以 $E = \boldsymbol{\rho}^2_s = 1 + \lambda^2\kappa^2$，$F = \boldsymbol{\rho}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_\lambda = 1$，$G = \boldsymbol{\rho}_\lambda{}^2 = 1$

因此 $\varphi_1 = (1 + \lambda^2\kappa^2)ds^2 + 2dsd\lambda + d\lambda^2$

〔例 3〕试求正螺面 $\boldsymbol{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$ 的第一基本微分形式 φ_1 $(0 \leqslant u < +\infty;\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$.

（解）将上面方程就它的参数 u、v 分别微分得

$$\boldsymbol{r}_u = \{\cos v,\ \sin v,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v = \{-u\sin v,\ u\cos v,\ a\}$$

所以 $E = \boldsymbol{r}_u{}^2 = 1$，$F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = 0$，$G = \boldsymbol{r}_v{}^2 = u^2 + a^2$

因此 $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$

〔例 4〕试求旋转曲面 $\boldsymbol{r} = \{r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z = f(r)\}$ 的第一基本微分形式 φ_1，$(0 \leqslant \theta < 2\pi;\ 0 \leqslant r < +\infty)$.

（解）将上面方程就它的参数 r，θ 分别微分得

$$\boldsymbol{r}_r = \{\cos\theta,\ \sin\theta,\ f'(r)\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \{-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0\}$$

因此 $E = \boldsymbol{r}_r{}^2 = 1 + f'^2(r)$，$F = \boldsymbol{r}_r \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0$，$G = \boldsymbol{r}_\theta{}^2 = r^2$

$$\varphi_1 = [1 + f'^2(r)]dr^2 + r^2d\theta^2$$

〔例 5〕在 roz 面上的悬链线的方程为 $r = a\operatorname{ch}\dfrac{z}{a}$，现在以 oz 为旋转轴，求这个旋转曲面（悬链面）的第一基本微分形式.

（解）因为是旋转曲面，所以可按上面例 4 的方法求 φ_1，已知 $r = a\operatorname{ch}\dfrac{z}{a}$，它相当于 $f(r)$，因此

$$f'(r)=\frac{dz}{dr}=\frac{1}{\frac{dr}{dz}}=\frac{1}{\text{sh}\frac{z}{a}}$$

所以

$$1+f'^2(r)=1+\frac{1}{\text{sh}^2\frac{z}{a}}=\frac{\text{sh}^2\frac{z}{a}+1}{\text{sh}^2\frac{z}{a}}=\frac{\text{ch}^2\frac{z}{a}}{\text{ch}^2\frac{z}{a}-1}$$

设旋转角为 θ，因此

$$\varphi_1=\text{ch}^2\frac{z}{a}dz^2+a^2\text{ch}^2\frac{z}{a}d\theta^2$$

§1·2 曲面上曲线的弧长

现在通过第一基本微分形式，给出曲面上两点间的弧长的计算公式。

【定理】已给曲面的方程为

Σ：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$

和连接它上两点 $A(t=t_0)$，$B(t=t)$ 的曲线 L：$u=u(t)$，$v=v(t)$。则从A到B之间的弧长 S 为

$$S=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt$$

（证明）设过Σ上 A,B 两点的曲线为 L：$u=u(t)$，$v=v(t)$。因为 L在Σ上，所以满足Σ的方程。因此，L 的方程为

$$L:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),\ v(t)) \tag{1.4}$$

因为Σ上的曲线也是空间曲线，所以计算空间曲线弧长的公式 $\int_{t_0}^{t}|\dot{\boldsymbol{r}}|dt$ 也适用于计算Σ上曲线的弧长。我们先求出 $|\dot{\boldsymbol{r}}|$。为此，先微分（1.4）式，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt} \tag{1.5}$$

将（1.5）式做内积得

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \tag{1.6}$$

因此曲面上弧长公式

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt \tag{1.7}$$

〔例 6〕考虑单位球面

$$\boldsymbol{r}=(\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2+\cos\varphi\boldsymbol{e}_3$$

上的曲线（如图 3 — 2）

$$\theta=\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-t$$

$$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$$

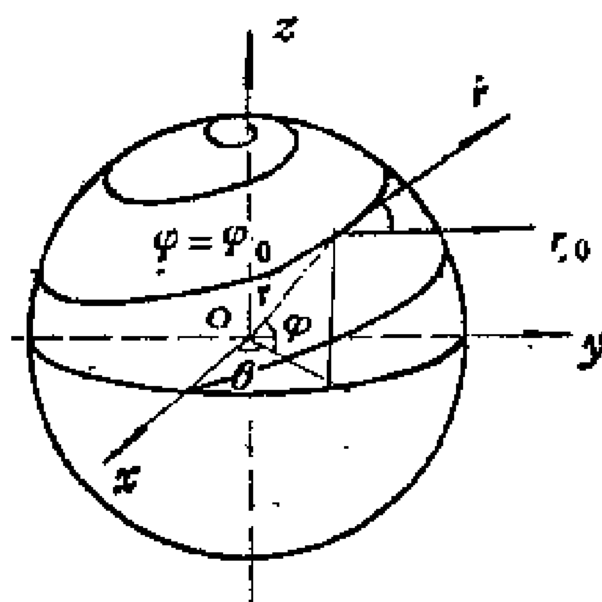


图3—2

此曲线从赤道线开始，螺旋上升到北极，求其弧长.

（解）对方程分别就 θ，φ 求导，得

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=(\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2-\sin\varphi\boldsymbol{e}_3$$

因此　　$E=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=\sin^2\varphi$，$F=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\varphi=0$，$G=\boldsymbol{r}_\varphi\boldsymbol{r}_\varphi=1$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)},$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-1,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}-t$$

因此我们得到 φ_1，即

$$\varphi_1=E\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+2F\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+G\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$=\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}+1=2$$

所以弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\varphi_1}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

§1.3 曲面上二曲线的交角

现在利用第一基本微分形式，再给出曲面上二曲线交角的计算公式.

【定义】如果二曲线相交，则它们在交点的切线的夹角称为此二曲线的交角.

【定理 2】已给曲面的第一基本微分形式

$$\varphi_1=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

和过一点的二曲线 L_1: $u=u_1(s_1)$, $v=v_1(s_1)$

L_2: $u=u_2(s_2)$, $v=v_2(s_2)$

它们的弧长参数各为 s_1, s_2. 则二曲线的交角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}\cdot\sqrt{Edu_2^2+2Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}}$$

(证明) 因为L_1、L_2的方程分别为

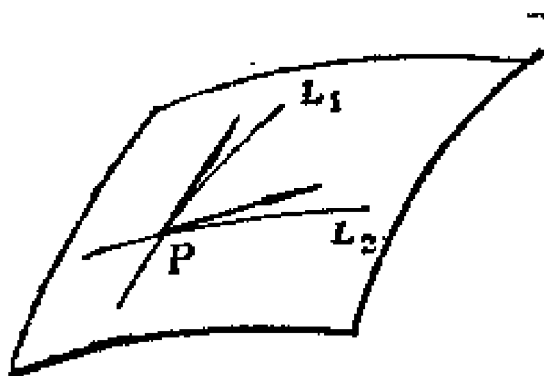


图3—3

$$L_1: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1(s_1), v_1(s_1))$$

和 $$L_2: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_2(s_2), v_2(s_2))$$

所以它们在交点的切向量分别为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_1}=\boldsymbol{r}_u\frac{du_1}{ds_1}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv_1}{ds_1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_2}=\boldsymbol{r}_u\frac{du_2}{ds_2}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv_2}{ds_2}$$

因为切向量的交角就是曲线的交角(图3—3),所以

$$\cos\varphi=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_1}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_2}$$

$$=\left(\boldsymbol{r}_u\frac{du_1}{ds_1}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv_1}{ds_1}\right)\left(\boldsymbol{r}_u\frac{du_2}{ds_2}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv_2}{ds_2}\right)$$

$$=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{ds_1\ ds_2}$$

因为 $$ds_1=\sqrt{Edu_1^2+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}$$

$$ds_2=\sqrt{Edu_2^2+2Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}$$

代入上式,即得交角 φ的余弦公式.

这里注意:如果曲线 L_1,L_2 是有向的,则可利用

$$\cos\varphi=\frac{Edu_1du_2+F(du_1du_2+dv_1du_2)+Gdv_1dv_2}{ds_1|ds_2} \quad (1.8)$$

反之，若所给曲线是无向的，则公式可写成

$$\cos\varphi=\pm\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+dv_1du_2)+Gdv_1dv_2}{ds_1ds_2}$$

(1.9)

显然根式的正负号表示 φ角有两个值其和为π。

【推论】曲面上二曲线 L_1，L_2 正交的充分必要条件为

$$Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2=0$$

（证明）必要性：如果 L_1 垂直 L_2，则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\varphi=0$，因此

$$Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2=0$$

充分性：若

$$Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2=0$$

而分母不为零。即 $ds_1ds_2\neq0$，所以 $\cos\varphi=0$ 即 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，因此 $L_1\perp L_2$。

〔例 7〕试证坐标曲线网为正交网的充分必要条件为 $F=0$。

（证明）设 L_1 是 u 曲线，则 $dv_1=0$，L_2 是 v 曲线，则 $du_2=0$ 把它们代入交角公式（1.8）就得到坐标网的交角公式

$$\cos\varphi=\frac{Fdu_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2}\sqrt{Gdv_2^2}}=\frac{F}{\sqrt{EG}} \qquad (1.10)$$

如果 u曲线与 v 曲线垂直，则 $\cos\varphi=0$，即 $F=0$。反之，若 $F=0$，因 $E>0$，$G>0$，所以分母不为 0 。因此，$\cos\varphi=0$，即 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以坐标曲线垂直，也就是坐标网是正交网。

〔例 8〕求圆锥曲面 $r=\{e(\varphi)\cos\alpha+k\sin\alpha\}v$ 上的曲线

$C: v = Ae^{m}\varphi$与坐标曲线 φ = 常数的交角.

（解）由圆锥曲面方程可得第一基本微分形式

$$\varphi_1 = dv^2 + (v\cos\alpha)^2 d\varphi^2$$

对于已给曲线的微分 $dv = Ame^{m\varphi}d\varphi = mvd\varphi$，设坐标曲线的坐标为 v_1，φ_1，曲线C的曲线坐标为 v_2，φ_2，即

$$dv_2 = Ame^{m}\varphi_2 d\varphi_2 = mv_2 d\varphi_2$$

对于坐标曲线 φ_1 = 常数 $\therefore \quad d\varphi_1 = 0$

将上述结果代入交角公式中，因为 $F = 0$，$d\varphi_1 = 0$，所以

$$\cos\theta = \frac{dv_1 dv_2}{\sqrt{(dv_2)^2 + (v_2\cos\alpha)^2 d\varphi_1^2} \cdot \sqrt{dv_1}}$$

$$= \frac{dv_2}{\sqrt{m^2 v_2^2 d\varphi_2^2 + v_2^2\cos^2\alpha d\varphi_2^2}}$$

$$= \frac{mv_2 d\varphi_2}{v_2 d\varphi_2 \sqrt{m^2 + \cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{m^2 + \cos^2\alpha}} = \text{常数}$$

故曲线 $v = Ae^{m\varphi}$ 与坐标曲线 φ = 常数相交成定角.

§1·4 曲面的面积

现在给出曲线所围成的曲面的面积计算公式.

【定义】将已知曲面上区域 D，分为若干部分区域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$. 过每一区域的某一内点作切平面，并将对应区域投影到切平面上. 设由区域 D_i 投影面得到的平面区域面积为 ΔS_i，作所有面积的和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

当部分区域的数目无限增加、部分区域随之缩小面每一区域趋

于一点时，此和之极限称为曲面区域D的面积。

【定理3】已给曲面 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的一条闭曲线L，曲线L围成一个区域D，这个区域D的面积S为

$$S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

（证明）将区域D参数化，并选择部分区域的边界，使与坐标曲线一致．试考虑 D_i 区域之一，假定其边界曲线交于四点

$$A_1(u,v),\qquad A_2(u+\Delta u,v)$$

$$A_4(u,v+\Delta v),\ A_3(u+\Delta u,\ v+\Delta v)$$

将其四点投影到过A点的切平面上（如图3—4，3—5）点

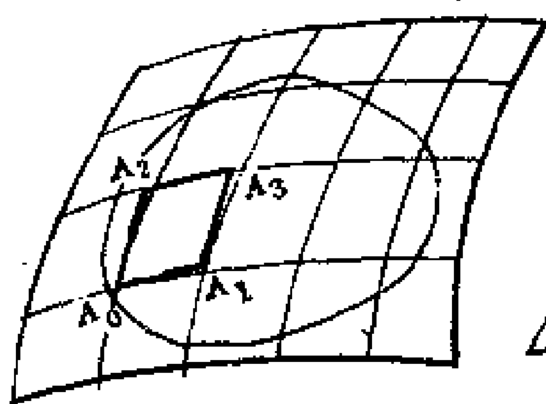


图3—4

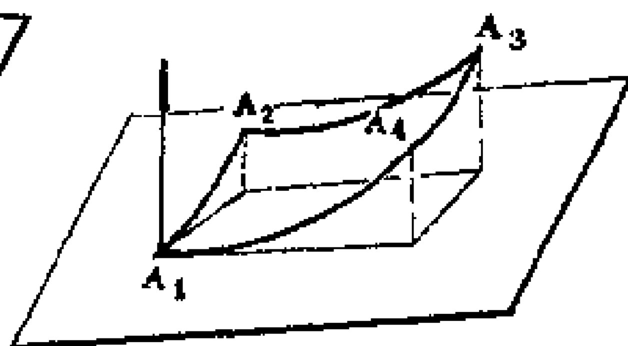


图3—5

A_1，A_2，A_3 与A_4的向径各为

$$\boldsymbol{r}(v,v),\ \boldsymbol{r}(u+\Delta u,v)$$

$$\boldsymbol{r}(u\cdot v+\Delta v),\boldsymbol{r}(u+\Delta u,$$

$$v+v\Delta)$$

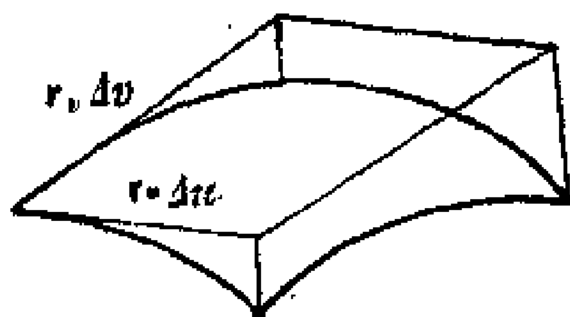


图3—6

其中$\Delta u>0$，$\Delta v>0$，（图3—6），于是根据泰勒公式有

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}_u\Delta u+\boldsymbol{e}_1\Delta u$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{r}(u,v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}_v\Delta v+\boldsymbol{\varepsilon}_2\Delta v$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 各随 $\Delta u\to0$、$\Delta v\to0$ 而趋于 0 。

若不计高阶无穷小，则向量$\overrightarrow{A_1A_4}$与$\overrightarrow{A_1A_2}$在切平面上的投影可取为

$$\boldsymbol{r}_u\Delta u,\quad \boldsymbol{r}_v\Delta v.$$

区域 D 在 A 点切平面上的投影面积近似于以向量 $\boldsymbol{r}_u\Delta u$ 与 $\boldsymbol{r}_v\Delta v$ 为其邻边平行四边形面积．故有

$$\Delta S_i=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\Delta u\Delta v+\varepsilon$$

注意 ε 与部分区域相比较仍为高阶无穷小，可略去．由此得到

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_i\,\Delta u_i\,\Delta v_i$$

曲面上区域 D 的面积 S，由数学分析已知

$$S=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,dudv$$

又 $$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2=EG-F^2$$

于是

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{1.11}$$

由面积公式 (1.11) 看出，它的被积函数是曲面的第一基本微分形式的判别式，因为 $EG-F^2>0$，所以这个积分是有意义的。

其次再证明 $S=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,dudv$ 与参数的选择无关。

假定在曲面上引用新曲线坐标系，它的曲线坐标为 α、β，而它与原来曲线坐标系的坐标 u，v 之间的关系为

$$\alpha = \alpha(u \cdot v) \quad \beta = \beta(u, v)$$

新坐标基底向量对参数的导函数，与原有坐标基底向量的函数关系为

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}_u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{r}_u \frac{\partial u}{\partial \beta} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v}{\partial \beta}$$

其向量积为

$$\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$

用新坐标计算曲面的面积，有

$$\iint_D |\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta|\, d\alpha d\beta = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \left| \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right| d\alpha d\beta$$

但由积分学可知，多重积分中积分变量的变换，应乘以变换函数的雅可比行列式，因而得到

$$\iint_D |\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta|\, d\alpha d\beta = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du dv.$$

〔例 9〕在以 $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$ 为第一基本微分形式的曲面上，求由三条曲线 $u = \pm av$，$v = 1$ 所围成的曲边三角形的面积（图 3 — 7）。

（解）由给出的第一基本微分形式可知，$E = 1$，$F = 0$，$G = u^2 + a^2$. 而且知道三个顶点的曲线坐标各为 $A(u = 0,\ v = 0)$、$B(u = a,\ v = 1)$ 和 $c(u = -a,\ v = 1)$，因此面积公式的被积函数为

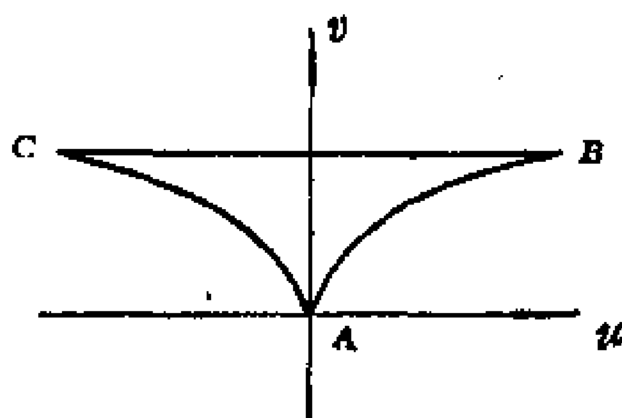


图3—7

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

所以$\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\int_{-a}^{0}\sqrt{u^2+a^2}\,du\int_{-\frac{u}{a}}^{1}dv+\int_{0}^{a}\sqrt{u^2+a^2}\,du\int_{\frac{u}{a}}^{1}dv$$

或者将 u代以 $-u$，则第一积分变为第二个，因此上式右边等于第二个积分的二倍，即

$$\begin{aligned}S&=2\int_{0}^{a}\sqrt{u^2+a^2}\,du\int_{\frac{u}{a}}^{1}dv\\&=2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{u}{a}\right)\sqrt{u^2+a^2}\,du\\&=\left\{-\frac{2}{3a}\,(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}+u\sqrt{u^2+a^2}\right.\\&\qquad\left.+a^2\ln[u+\sqrt{u^2+a^2}]\right\}\Big|_{0}^{a}\\&=a^2\left[\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\right]\end{aligned}$$

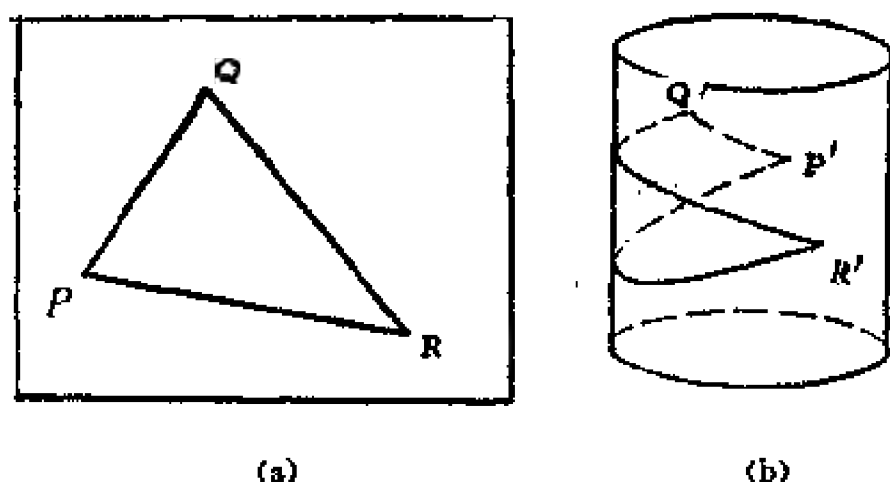
§2 曲面的等距、等角和等积变换

高斯 (Gauss) 在他的地图投影中，想通过地图测量出在地球表面上对应的曲线弧长，两方向之间的交角以及曲线所围成的区域的面积。实质上就是考虑在两个形状不同的曲面上，能否有相同度量几何的问题。在这一节里，将给出当二曲面满足什么条件时，它们对应弧长相同，对应方向的交角相等，以及对应曲线所围成的面积相等，即所谓等距等价，等角等价以及等积等价。

§2.1 扭曲与贴合、等距变换

为考虑在两个形状不同的曲面上，能否具有相同的度量几

何．先通过实例给以直观地说明．首先在矩形纸片 π上（图3—8），给定一个 $\triangle PQR$，然后将纸片不伸缩，不折裂地连续



(a)　　　　(b)

图 3—8

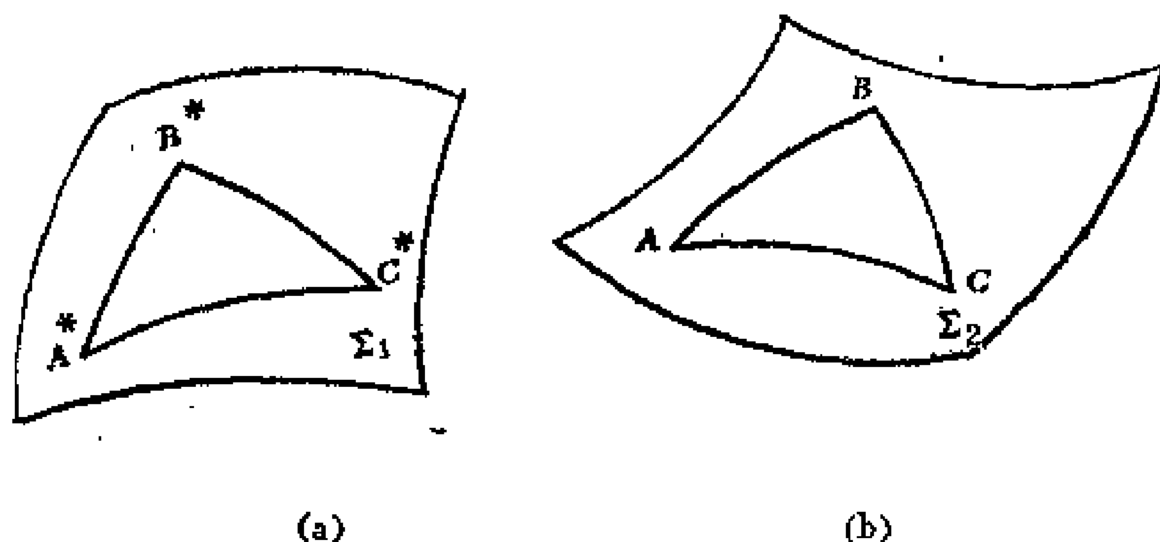
变形卷成柱面 Σ．π 上的 $\triangle PQR$ 变成柱面上的曲边三角形 $P'Q'R'$．显然 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$，$\overline{QR}=\overline{Q'R'}$，$\overline{PR}=\overline{P'R'}$；同时$\angle PQR=\angle P'Q'R'$，$\angle QRP=\angle Q'R'P'$，$\angle RPQ=\angle R'P'Q'$，而且$\triangle PQR$的面积等于 $\triangle P'Q'R'$ 的面积． 我们知道度量几何是决定于长度、角度和面积．因此，平面π 与柱面Σ上的度量几何是相同的，如果我们把曲面不伸缩、不折裂的连续变形（如把平面矩形片卷成柱面）叫做**扭曲**．那么一个曲面 Σ_1 经过扭曲与另一个曲面Σ_2完全叠合就叫做 Σ_1 与 Σ_2 **贴合**．显然凡经过扭曲后可贴合的曲面上都具有相同的度量几何，但不是任何二曲面通过扭曲后都可贴合．例如球面怎样扭曲也不能与平面贴合，因此，平面与球面不具有相同的度量几何．这样就迫使我们把扭曲，贴合应用到各种曲面上，给出鉴别它们是否具有相同的度量几何的方法．

但是扭曲和贴合的概念过于笼统，很难做为数学的精确概念．因此，我们给出二曲面 Σ_1、Σ_2 之间的等距（等角、等积）变换来代替扭曲和贴合．

【定义】 已给二曲面Σ_1：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$、$\Sigma_2$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^*,v^*)$，

它们定义域各为D和 D^*. 在这两个曲面的定义域之间. 给定一个变换 σ: $D \to D^*$, 它们的解析表示式为

$$\sigma: \begin{cases} u^* = u^*(u, v) \\ v^* = v^*(u, v) \end{cases}$$



(a) (b)

图 3—9

而且 σ满足下列三条件

(i) 函数$u^* = u^*(u, v)$、$v^* = v^*(u, v)$ 是单值 C^1 类.

(ii) 雅可比行列式$\left|\dfrac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)}\right| \neq 0$.

(iii)在 σ下 Σ_1 与Σ_2 对应弧长$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A^*B^*}$, 则称这个变换为等距变换. 如果二曲面 Σ_1 与 Σ_2 之间存在等距变换σ, 则称曲面 Σ_1 与 Σ_2 等距等价. 显然满足条件 (i)、(ii)、(iii) 的变换 σ, 就是扭曲的数学描述, 而等距等价无非是贴合的数学描述.

在论证一些问题时, 为计算上的方便, 我们把变换 σ做如下约定:

如果 σ变换作为 u, v的函数的 u^*, v^*代入曲面 Σ^*的方程里, 就得到参数 u, v 表示的曲面Σ_2的方程, 而在Σ_1和Σ_2上具有相同的参数 u, v 的点做为对应点. 这时候, 曲面 Σ_1,

Σ_2 上对应曲线就有相同的参数方程 $u=u(t)$、$v=v(t)$，在对应点，有相同的微分 du, dv。

【定理】已给二曲面 Σ_1：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$、$\Sigma_2$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^*, v^*)$ 如果存在变换 σ：$u^*=u^*(u,v)$, $v^*=v^*(u,v)$, 使 Σ_1与Σ_2等距等价的充分必要条件是它们的第一基本量相等，即：

$$E=E^*,\quad F=F^*,\quad G=G^* \tag{2.1}$$

（证明）必要性：设 Σ_1与 Σ_2 在变换 σ：$u^*=u^*(u,v)$, $v^*=v^*(u,v)$ 下等距等价，即对应的弧长 $s=s^*$.

现在将变换 σ代入 Σ_2 得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*(u^*(u,v),\ v^*(u,v))$$

这时使 Σ_1与Σ_2 在 σ下的对应点具有 $u=u^*$, $v=v^*$（表示有相同的参数值），因而 $du=du^*$, $dv=dv^*$, 这时

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$s^*=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F^*\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

由于 $s=s^*$ 所以 $ds=ds^*$, 即

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=E^*du^2+2F^*dudv+G^*dv^2$$

因为上式对任意的 du, dv 都成立，所以必有

$$E=E^*,\quad F=F^*,\quad G=G^*$$

充分性：如果 Σ_1与 Σ_2 的第一基本量相等，即

$$E=E^*,\quad F=F^*,\quad G=G^*$$

选取适当的变换 σ：$u^*=u^*(u,v)$, $v^*=v^*(u,v)$ 使对应点的参数相等，即 $u=u^*$、$v=v^*$，这时对应曲线的方程也相同。设 Σ_1 与 Σ_2 的第一基本微分形式各为

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

$$ds^{*2}=E^*du^2+2F^*dudv+G^*dv^2$$

由条件可知必有：

$$ds^2 = ds^{*2}$$

即 $$s = s^*$$

因此，Σ_1 与 Σ_2 等距等价。

〔例 1〕 试证：柱面 Σ：$\boldsymbol{r} = \{a\cos u,\ a\sin u,\ v\}$与平面$\pi$：$\boldsymbol{r} = \{x,\ y\}$ 等距等价。

（证明）柱面的第一基本微分形式为

$$ds^{*2} = a^2du^2 + dv^2$$

平面 π 的第一基本微分形式为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

为证明Σ与 π等距等价，只须求出变换 σ 使 $s = s^*$。为此，通过 $ds^{*2} = ds^2$，求出变换 σ。

设 $$a^2du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2$$

令 $$dx^2 = a^2du^2,\quad dy^2 = dv^2$$

则得 $$dx = adu \quad 即 \quad x = au$$

$$dy = dv \quad 即 \quad y = v$$

我们以 $x = au$，$y = v$ 为变换 σ，把它们代入 ds^2 则得

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2du^2 + dv^2 = ds^{*2}$$

即存在变换 σ使Σ与 π等距等价。

〔例 2〕 试证切线曲面 Σ：$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{\tau}(s)$，与平面等距等价。

（证明）因为切线曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = (1 + v^2\kappa^2)ds^2 + 2dsdv + dv^2$$

从这个式子看到，它仅与脊线 L：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的曲率κ有关，而与它的挠率χ无关。因此，可以取脊线 L的自然方程为

$$\kappa = \kappa(s),\quad \chi = \lambda\chi(s)$$

作为Σ到平面 π的变换 σ，其中 λ为任意实数。现在把 λ逐渐

变为0，则脊线 $r(s)$ 变为平面 π 上的平面曲线，这时切线曲面Σ也将随λ的变化而变化。当 $\lambda=0$ 时，则Σ变为平面π上平面曲线的切线全体所构成的切线曲面。由于Σ的第一基本微分形式与挠率 χ无关，因此，在这种变形下 φ_1 不变，所以Σ与平面 π（局部）等距等价。

〔例3〕试证正螺面 Σ_1：$r=\{u\cos v,\quad u\sin v,\quad av\}$ $\left(\begin{matrix}-\infty<u<+\infty\\0\leqslant v\leqslant 2\pi\end{matrix}\right)$，和悬链面$\Sigma_2$：$r=\left\{a\operatorname{ch}\frac{t}{a}\cos\theta, a\operatorname{ch}\frac{t}{a}\sin\theta, t\right\}$

$\left(\begin{matrix}-\infty<t<+\infty\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{matrix}\right)$，等距等价。

〔证明〕正螺面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

而悬链面的第一基本微分形式为

$$\bar{\varphi}_1=\operatorname{ch}^2\frac{t}{a}dt^2+a^2\operatorname{ch}^2\frac{t}{a}d\theta^2.$$

为证明 Σ_1与Σ_2 等距等价，只须找到一个变换 σ使 $\varphi_1=\bar{\varphi}_1$。为此，可以假设 $\varphi_1=\bar{\varphi}_1$，则

$$du^2+(u^2+a^2)dv^2=\operatorname{ch}^2\frac{t}{a}dt^2+a^2\operatorname{ch}^2\frac{t}{a}d\theta^2$$

我们令

$$u^2+a^2=a^2\operatorname{ch}^2\frac{t}{a}\quad 则\quad u=a\operatorname{sh}\frac{t}{a}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

$$dv^2=d\theta^2\qquad 则\quad v=\theta\quad(0\leqslant\theta<\pi)$$

现在以 $u=a\operatorname{sh}\frac{t}{a}$，$v=\theta$ 作为变换 σ，则

使 $$\varphi_1=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

$$=\operatorname{ch}^2\frac{t}{a}dt^2+\left(a^2\operatorname{sh}^2\frac{t}{a}+a^2\right)d\theta^2$$

$$= \mathrm{ch}^2\frac{t}{a}dt^2 + a^2\left(\mathrm{sh}^2\frac{t}{a} + 1\right)d\theta^2$$

$$= \mathrm{ch}^2\frac{t}{a}dt^2 + a^2\mathrm{ch}^2\frac{t}{a}d\theta^2 = \bar{\varphi}_1$$

即正螺面与悬链面之间存在变换 $u = a\mathrm{sh}\frac{t}{a}$, $v = \theta$ 使$\varphi_1 = \bar{\varphi}_1$,

所以 Σ_1 与Σ_2 等距等价。

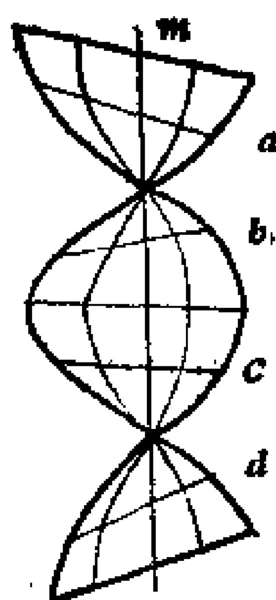


图3—10

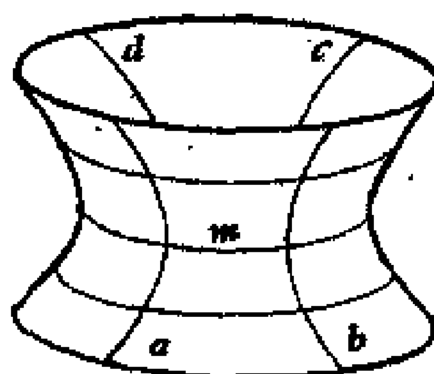


图3—11

这说明整个正螺面和悬链面上的一段可以扭曲贴合（如图3—10，3—11）。

从变换公式

$$\sigma: \begin{cases} u = a\mathrm{sh}\frac{t}{a} \\ v = \theta \end{cases}$$

看出，悬链线对应于正螺面的母线，而悬链面上的平行圆对应于正螺面上的圆柱螺线。特殊情况，悬链面上最小圆对应于正螺面的轴。若将正螺面贴在悬链面上，则正螺面的每一条母线贴在悬链面的一条悬链线上。但有无穷多条母线贴在同一条悬

链线上，而正螺面的每一条圆柱螺线则绕在悬链面的一个平行圆上无穷多周。

§2·2 等角变换

在上节中，讨论了等距等价问题，在本节中将给出二曲面的等角等价的判定条件。

【定义】已给二曲面 $\Sigma_1: r = r(u, v)$，$\Sigma_2: r = r^*(u^*, v^*)$，它们的定义域各为$D$和$D^*$. 在这两个曲面之间给定一个从 D到 D^* 的变换σ：

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v) \\ v^* = v^*(u, v) \end{cases}$$

如果变换 σ满足

(i) 函数 $u^* = u^*(u, v), v^* = v^*(u, v)$ 是单值C^1类。

(ii) 雅可比行列式 $\left|\dfrac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)}\right| \neq 0$.

在这种变换下，使对应曲线的交角相等. 称这种变换 σ为**等角变换**. 如果二曲面 Σ_1与 Σ_2 之间存在等角变换，则称这两个曲面为**等角等价**.

【定理】已给二曲面 $\Sigma_1: r = r(u, v)$，$\Sigma_2: r = r^*(u^*, v^*)$，$\Sigma_1$ 与 Σ_2 等角等价的充分必要条件是存在变换 σ，使它们的第一基本量 $E, F, G; E^*, F^*, G^*$ 成比例，即

$$\frac{E}{E^*} = \frac{F}{F^*} = \frac{G}{G^*} \tag{2.2}$$

〔证明〕设 Σ_1 上二曲线的弧长参数各为 s_1，s_2，它们的交角为 θ_1，即

$$\cos\theta_1 = \frac{E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2}{ds_1 ds_2}$$

而Σ_1与Σ_2之间的变换为σ: $u^* = u^*(u, v)$, $v^* = v^*(u, v)$ · 在σ下，设Σ_2上对应的二曲线的弧长参数各为s_1^*, s_2^*. 它们的交角为θ_2, 即

$$\cos\theta_2 = \frac{E^* du_1 du_2 + F^*(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G^* dv_1 dv_2}{ds_1^* ds_2^*}$$

必要性：若 $\theta_1 = \theta_2$ 则 $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ 所以

$$ds^*_1 ds^*_2\{E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2\}$$
$$= ds_1 ds_2\{E^* du_1 du_2 + F^*(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G^* dv_1 dv_2\}$$

即，对任意的 du、dv都使

$$(ds_1^* \cdot ds^*_2 E - ds_1 \cdot ds_2 E^*) du_1 du_2$$
$$+ (ds^*_1 \cdot ds^*_2 F - ds_1 \cdot ds_2 F^*)(du_1 dv_2 - du_2 dv_1)$$
$$+ (ds^*_1 \cdot ds_2^* G - ds_1 \cdot ds_2 G^*) dv_1 dv_2 = 0$$

成立，显然上式各项系数必同时为0，即

$$ds^*_1 \cdot ds^*_2 E - ds_1 \cdot ds_2 E^* = 0$$
$$ds_1^* \cdot ds^*_2 F - ds_1 \cdot ds_2 F^* = 0$$
$$ds^*_1 \cdot ds_2^* G - ds_1 \cdot ds_2 G^* = 0$$

但上式中的 ds_1^*, ds^*_2, ds_1, ds_2 都是弧长的微分，均不为零，所以

$$\frac{E}{E^*} = \frac{F}{F^*} = \frac{G}{G^*} = \frac{1}{\lambda}$$

充分性：设 Σ_1与 Σ_2之间存在变换σ: $u^* = u^*(u, v)$, $v^* = v^*(u, v)$, 使

$$\frac{E}{E^*} = \frac{F}{F^*} = \frac{G}{G^*} = \frac{1}{\lambda}$$

成立，设它们的比值为实数 $1/\lambda$, 如果 Σ_1 上二曲线的交角的余弦为

$$\cos\theta_2=\frac{E^*du_1du_2+F^*(du_1dv_2+du_2dv_1)+G^*dv_1dv_2}{dS_1^*\cdot ds^*_2}$$

$$=\frac{E^*du_1du_2+F^*(du_1dv_2+du_2dv_1)+G^*dv_1dv_2}{\sqrt{E^*du_1^2+2F^*du_1dv_1+G^*dv_1^2}\sqrt{E^*du^2_2+2F^*du_2dv_2+G^*dv_2^2}}$$

把（2.2）式，代入上式，则

$\cos\theta_2$

$$=\frac{\lambda Edu_1du_2+\lambda F(du_1dv_2+du_2dv_1)+\lambda Gdv_1dv_2}{\sqrt{\lambda Edu_1^2+2\lambda Fdu_1du_1+\lambda Gdv_1^2}\sqrt{\lambda Edu_2^2+2\lambda Fdu_2dv_2+\lambda Gdv_2^2}}$$

$$=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}\cdot\sqrt{Edu_2^2+2Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}}$$

$=\cos\theta_1$

即，如果存在变换 σ使（2. 2）成立，则曲面 Σ_1与 Σ_2 等角等价。

〔例 4〕 试证球面$S:\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\}$与平面 $\pi:\boldsymbol{r}=\{x,\ y\}$等角等价。

（证明）已知球面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=a^2d\theta^2+a^2\cos^2\theta d\varphi^2$$

而平面π 的第一基本微分形式为

$$\bar{\varphi}_1=dx^2+dy^2$$

为了判定球面是否与平面等角等价，我们只须找到一个变换 σ，使S 与π在 σ 变换下，对应的第一基本量成比例。因此，我们令 $dx^2=d\varphi^2$， 则 $dx=d\varphi$，即 $x=\varphi$。

又 $dy^2=\dfrac{d\theta^2}{\cos^2\theta}$，则 $dy=\dfrac{d\theta}{\cos\theta}$

即 $y=\int\dfrac{d\theta}{\cos\theta}=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

以公式 $\begin{cases} x=\varphi \\ y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

作为变换 σ，把它代入平面 π 的第一基本微分形式，则得在 σ下，π的第一基本微分形式为

$$\bar{\varphi}_1=dx^2+dy^2=d\varphi^2+\frac{d\theta^2}{\cos^2\theta}$$

它的第一基本量为

$$E^*=\frac{1}{\cos^2\theta},\quad F^*=0,\quad G^*=1$$

而球面的第一基本量为

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=a^2\cos^2\theta$$

因此，在变换 σ下

$$\frac{E}{E^*}=\frac{a^2}{1/\cos^2\theta}=a^2\cos^2\theta$$

$$\frac{G}{G^*}=\frac{a^2\cos^2\theta}{1}=a^2\cos^2\theta$$

$$\frac{F}{F^*}=\frac{0}{0},$$

令它取 $a^2\cos^2\theta$ 的值

则 S与 π 在 σ 变换下．存在$\dfrac{E}{E^*}=\dfrac{F}{F^*}=\dfrac{G}{G^*}$关系，即球面与平面等角等价，（如图 3—12， 3—13）．

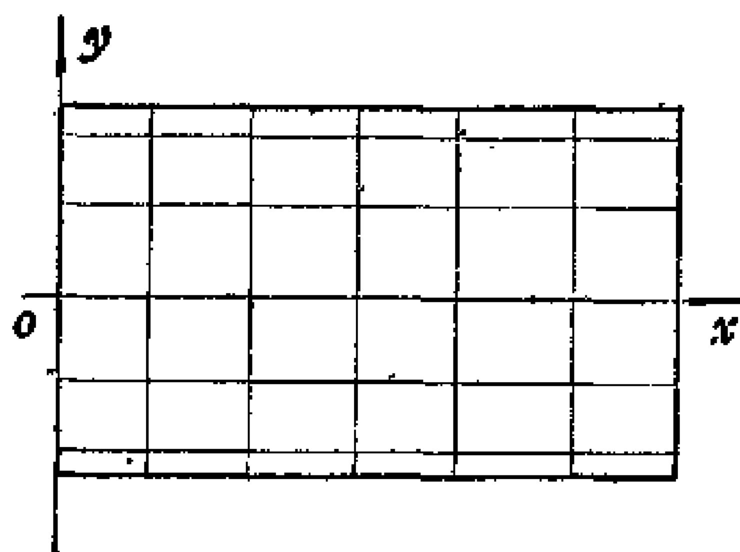


图3—12

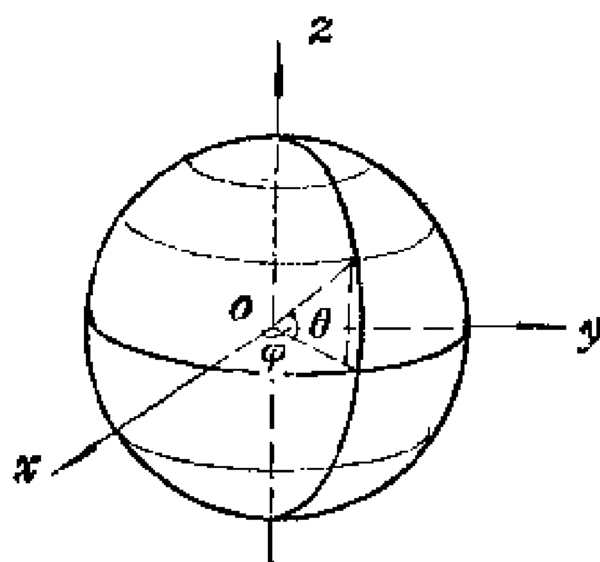


图3—13

又从变换 σ：$x=\varphi$，$y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$，可以看到球面上的子午线$\varphi=$常数与 $\{x,y\}$ 平面上的直线 $x=$常数对应；平行圆（纬线）$\theta=$常数与直线 $y=$常数对应.

〔例 5〕任何旋转曲面都与平面等角等价.

（证明）取旋转轴 l为坐标系的 z 轴，子午线C 的方程为

$$z=f(r)$$

r 是曲线 C上的点关于 C所在平面 OPP' 上的横坐标. 点 P 在 xy 平面上的投影 P' 的极坐标为

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta,$$
$$z=f(r)$$

显然 r、θ 可以看成曲面上点P的曲线坐标（图 3—14）

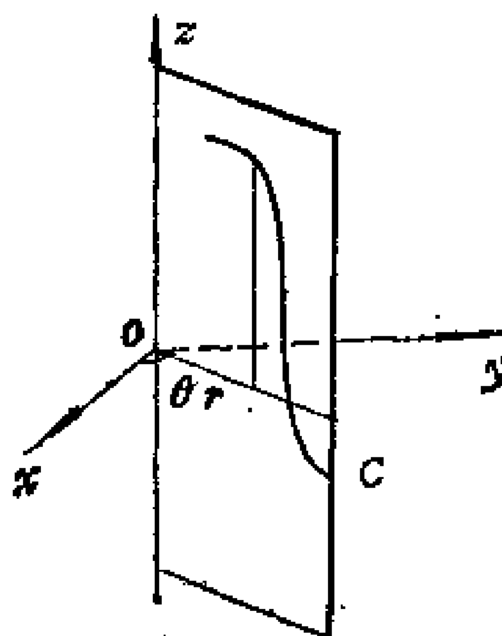


图3—14

对上式微分

$$\boldsymbol{r}_r=\{\cos\theta,\ \sin\theta,\ f'(r)\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\gamma\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0\}$$

因此旋转曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=(1+f'^2(r))dr^2+r^2d\theta^2$$

设 $d\bar{u}=\sqrt{1+f'(r)}\,dr$

因为 $\bar{u}$是 r的函数，于是当 r为常数时，则 $\bar{u}$也为常数，所以曲线 $\bar{u}=$常数也是曲面上的平行圆。这时曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=d\bar{u}^2+r^2d\theta^2$$

如果将上式化为

$$\varphi_1=r^2\left[d\theta^2+\left(\frac{d\bar{u}}{r}\right)^2\right]$$

令

$$\theta=v,\quad u=\int\frac{d\bar{u}}{r}$$

则有 $\varphi_1=r^2(dv^2+du^2)$

旋转曲面的第一基本微分形式与平面在直角坐标系中的第一基本微分形式相比较，仅差一个因子。

由上面可知，任一旋转曲面都与平面等角等价。

〔例 6〕任意二曲面 Σ_1，Σ_2 都等角等价。

（证明）任何解析曲面Σ的第一基本微分形式都可以写为 $ds^2=\lambda^2(u,v)(du^2+dv^2)$，这时参数 u，v 叫Σ的**等温参数**。具体做法如下：先将

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=0$$

分解，得

$$\sqrt{E}\,du+\frac{F+\sqrt{F^2-EG}}{\sqrt{E}}dv=0$$

和 $\sqrt{E}\,du+\dfrac{F-\sqrt{F^2-EG}}{\sqrt{E}}dv=0$

设 $\lambda,\bar{\lambda}$ 是这两个一阶微分方程的积分因子，则有

$$\lambda\left(\sqrt{E}\,du+\frac{F+\sqrt{F^2-EG}}{\sqrt{E}}dv\right)=d\omega,$$

$$\bar{\lambda}\left(\sqrt{E}\,du+\frac{F-\sqrt{F^2-EG}}{\sqrt{E}}dv\right)=d\bar{\omega}$$

因上二式是共轭的，所以积分因子 λ，$\bar{\lambda}$ 以及积分 $\omega,\bar{\omega}$ 也是共轭的函数，令 $\lambda=\dfrac{1}{\mu^2}$，$\omega=\bar{u}+i\bar{v}$，$\bar{\omega}=\bar{u}-i\bar{v}$

于是上二式相乘，则得

$$ds^2=\left(\sqrt{E}\,du+\frac{F+\sqrt{F^2-EG}}{\sqrt{E}}dv\right)$$

$$\cdot\left(\sqrt{E}\,du+\frac{F-\sqrt{F^2-EG}}{\sqrt{E}}dv\right)$$

$$=\mu^2(d\omega)(d\bar{\omega})=\mu^2(d\bar{u}^2+d\bar{v}^2)$$

即任意曲面Σ当取等温参数时都有 $ds^2=\mu^2(d\bar{u}^2+d\bar{v}^2)$。从而可知任意曲面都与平面等角等价．因此曲面 Σ_1，Σ_2 都与平面等角等价，因此 Σ_1 与Σ_2 也等角等价．

§2.3 等积变换

【定义】已给二曲面 $\Sigma_1:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(u,v)$，$\Sigma_2:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(u^*,v^*)$，它们的定义域各为 D和 D^*，在这两个曲面之间，若存在一个变换 σ：

$$\begin{cases}u^*=u^*(u,v)\\ v^*=v^*(u,v)\end{cases}$$

且满足 (i) $u^*=u^*(u,v)$ $v^*=v^*(u,v)$为单值 C^1 类函数；

(ii) 雅可比行列式 $\left|\frac{\partial(u^*,v^*)}{\partial(u,v)}\right| \neq 0$；

(iii) 在 σ 变换下，D_1、D_2 的面积 $S_1=S_2$。

则称 Σ_1与 Σ_2 **等积等价**。

下面我们研究二曲面等积等价问题，以及等距等价、等角等价及等积等价之间的关系。

【定理 3】已知二曲面Σ_1：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(u,v)$，

Σ_2：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(u^*,v^*)$

求证它们等积等价的充分必要条件是：存在变换 σ，使

$$EG-F^2=E^*G^*-F^{*2} \tag{2·3}$$

（证明）设 Σ_1与 Σ_2 之间存在变换 σ：$u^*=u^*(u,v)$，$v^*=v^*(u,v)$。在变换 σ下的对应区域 D_1 和 D_2，它们对应的面积分别为

$$S_1=\iint_{D_1}\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

$$S_2=\iint_{D_2}\sqrt{E^*D^*-F^{*2}}\,dudv$$

必要性：如果存在变换 σ：$u^*=u^*(u,v)$，$v^*=v^*(u,v)$，使 $D_2=\sigma(D_1)$ 而且 $S_1=S_2$，则有

$$\iint_{D_1}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint_{\sigma(D_1)}\sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,dudv$$

显然被积函数相等，因此得

$$EG-F^2=E^*G^*-F^{*2}$$

充分性：如果Σ_1与 Σ_2之间存在变换 σ使

$$EG-F^2=E^*G^*-F^{*2}$$

恒成立·且对应区域D_1与 D_2的面积元素 $du\cdot dv=du^*\cdot dv^*$，所以

$$S_1=\iint_{D_1}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint_{D_2=\sigma(D_1)}\sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,du^*dv^*=S_2$$

定理得证。

〔例 7〕任意二曲面 Σ_1，Σ_2 总可以在适当范围内使其等积等价。

（证明）设 Σ_1的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$(u,v)\in R$而平面的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*(u,v)=x^*(u,v)i+y^*(u,v)j$

所以 $$D^*=|\boldsymbol{r}^*_u\times\boldsymbol{r}_v^*|=\left|\frac{\partial(x^*,\ y^*)}{\partial(u,\ v)}\right|$$

只要选取适当的 $x^*(u,v)$，$y^*(u,v)$ 可使

$$D^*=\left|\frac{\partial(x^*,\ y^*)}{\partial(u,\ v)}\right|=D_1$$

D_1 是 Σ_1 的第一基本微分形式的判别式，同理可得

$$D^*=D_2$$

则 $$D_1=D_2$$

即 Σ_1 与 Σ_2 等积。

〔例 8〕球面与平面等积等价。

（证明）因为球面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=a^2(d\theta^2+\cos^2\theta d\varphi^2)$$

$$=a^2\cos^2\theta\left(\frac{d\theta^2}{\cos^2\theta}+d\varphi^2\right)$$

令 $$du^2=\frac{d\theta^2}{\cos^2\theta}$$

则 $$\varphi_1=a^2\cos^2\theta(du^2+d\varphi^2)$$

而平面 $\bar{\varphi}_1=dx^2+dy^2$

由 φ_1 和 $\bar{\varphi}_1$，根据等积的充分必要条件，容易证得球面与平面是等积等价。

【推论】二曲面 Σ_1 与 Σ_2 等距等价的充分必要条件是：它们等角等价同时也等积等价。

（证明）设 Σ_1与 Σ_2的第一基本量为 E、F、G 和 E^*、

F^*、G^*.

必要性：如果Σ_1与 Σ_2等距等价、则有

$$E=E^*,\quad F=F^*,\quad G=G^*$$

因此必有关系

$$\frac{E}{E^*}=\frac{F}{F^*}=\frac{G}{G^*}$$

$$EG-F^2=E^*G^*-F^{*2}$$

从而 Σ_1与 Σ_2必等角等价且等积等价。

充分性：如果 Σ_1与 Σ_2 等角等价且等积等价，则有

$$\frac{E}{E^*}=\frac{F}{F^*}=\frac{G}{G^*}$$

$$EG-F^2=E^*G^*-F^{*2}$$

成立，不妨设比值为 λ，则得

$$E=\lambda E^*,\quad F=\lambda F^*,\quad G=\lambda G^* \tag{2·4}$$

把它代入Σ的 $EG-F^2$ 中则得

$$EG-F^2=\lambda^2(E^*G^*-F^{*2})$$

又从等积等价的条件可知 $\lambda^2=1$。又因为 $EG-F^2>0$， $E^*G^*-F^{*2}>0$，所以$\lambda=1$，从（2·4）式可得

$$E=E^*,\quad F=F^*,\quad G=G^*$$

即 Σ_1与 Σ_2等距等价。

§3 曲面的第二基本微分形式

本节主要讨论曲面的曲率、曲面的第二基本微分形式以及曲面在正常点邻域的结构。

§3·1 曲面上曲线的法曲率

在曲线论中，我们通过它的曲率研究了曲线对于切线的弯曲状态。类似地在曲面论中也可以求出在正常点邻域中，曲面对于切平面的弯曲状态。但是，我们必须通过曲面上曲线的弯曲状态借以描述曲面的弯曲状态。为此，我们先研究刻划曲面上曲线弯曲状态的量——法曲率。

【定义】曲面上曲线C在点P的曲率向量 $\boldsymbol{r}''$ 在曲面上点P的单位法向量 $\boldsymbol{n}$上的正投影值

$$k_n = P_{r_0 j}\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'' \quad (|\boldsymbol{n}| = 1)$$

称为曲面上曲线C在点P的法曲率。

【定理 1】已知曲面 Σ: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上曲线$C$: $(u=u(s)$, $v=v(s))$，它在点P的法曲率值为

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

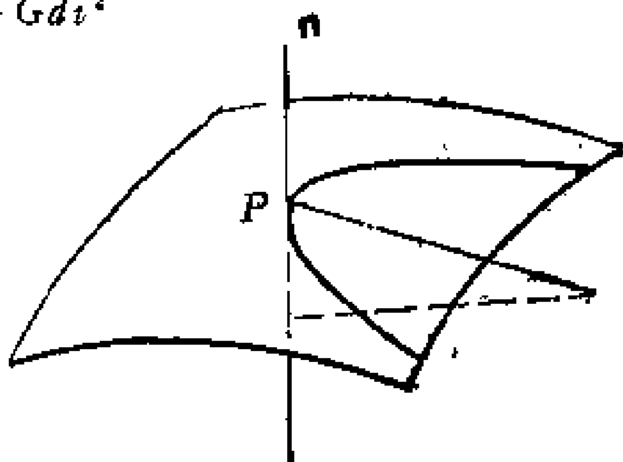


图3—15

(证明) 已知曲线C的方程为 $u=u(s)$，$v=v(s)$，因为它在曲面上，所以又可以写作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s),\ v(s))$$

它在点P的曲率向量为

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \boldsymbol{r}_u\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + \boldsymbol{r}_v\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)$$

取Σ在点P的单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

因此，C在点P的法曲率 k_n 为

$$k_n=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$

$$+2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

令

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_{uu}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_{uv}}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{3·1}$$

$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_{vv}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

L，M，N 是由向径的导函数及法向量$\boldsymbol{n}$的内积构成的．把它们代入上式，则得

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \tag{3·2}$$

因点P已知，则 E，F，G；L，M，N 在点P 是确定值．如果给定过点P的曲线C，则C在点P的切向量的分量 du，dv 的值是确定的．这样（3.2）式的 k_n 值是确定的．它就是 Σ 上曲线C在点P的法曲率．

【定义】我们把关于 du，dv 的二次微分形式

$$\varphi_2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$$

叫做曲面的**第二基本微分形式**．它的系数L、M、N 叫做**第二基本量**．可按（3.1）式计算它的值．

〔例1〕为了今后证明问题与计算问题的方便，我们还可

推得第二基本微分形式和第二基本量另外一些表达式。

对 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，显然有

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_u=0,\quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_v=0$$

对关系式取偏导数，得

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uu}=0,\quad \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uv}=0$$

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uv}=0,\quad \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{vv}=0$$

故由（3.1）式可得

$$\begin{aligned} L&=-\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_u\\ M&=-\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_v=-\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{r}_u\\ N&=-\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{r}_v \end{aligned}\tag{3·3}$$

因而 $$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$$

$$=-(\boldsymbol{r}_udu+\boldsymbol{r}_vdv)(\boldsymbol{n}_udu+\boldsymbol{n}_vdv)$$

即第二基本微分形式为

$$\varphi_2=-d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{n}\tag{3·4}$$

下面我们讨论曲面上曲线在一点的曲率和法曲率之间的关系。

【定理 2】在曲面Σ上凡是有共同点 P 和共同切线的所有曲线在点 P 具有相同的法曲率。

（证明）从法曲率的计算公式（3.2）可以看出，第一和第二基本微分形式的系数 E，F，G；L，M，N 都是点的位置函数。如果给定点 P，则在点 P 处 E，F，G；L,M,N 值确定，另一方面 $dv:du$ 确定曲线的切向量的方向，如果在 P 点切向量确定，则 $dv:du$ 的值也随之确定。所以对Σ上凡是具有共同点和共同切向量的所有曲线，它们在点 P 的法曲率 k_n的值是相等的。

【推论 1】在曲面 Σ上，凡具有共同点 P，共同切向量 τ，共同主法线向量 ν 的所有曲线，在点 P 的曲率 k 的值都相

等。

（证明）根据法曲率的定义可知

$$k_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{n}\kappa\mathbf{v} = \kappa(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}) = \kappa\cos\varphi$$

（这里的 φ是曲线在点P的主法线向量 v 与曲面Σ在点P的法向量 $\boldsymbol{n}$的夹角）。从上式可得法曲率与曲率之间的关系式

$$\kappa = \frac{k_n}{\cos\varphi} \tag{3·5}$$

从上式还可以看出，如果Σ上曲线C在点 P的切向量确定，则C在点P 的法曲率 k_n 的值随之确定。如果再知C在 P点的主法线向量 v，则 v与 Σ在点P的法向量的夹角 φ 也确定，因此 $\cos\varphi$ 的值确定，则由公式（3.5）可知曲线 C在点 P的曲率 k随之确定。

根据上面推论，如果已知在曲面的任何曲线C上一点M，做曲线C在点M的切线与主法线所确定的平面（即曲线的密切平面），则这个平面与曲面的截线 C_1 与曲线C。显然具有相同的切线与主法线。所以在点M的曲率也必相同。这样，对于曲面上曲线曲率的计算可以归结为对于这个曲面上一条平面截线的曲率的计算。根据上边分析，我们引入曲面上特殊的平面截线-法截线的概念。

【定义】设 $\boldsymbol{n}$为曲面在M点的法向量，则 $du:dv$ 和 $\boldsymbol{n}$ 所确定的平面称为曲面在M点沿方向 $du:dv$ 的**法截面**。法截面和曲面S的交线称为曲面在M 点的沿方向 du/dv 的**法截线**。

【推论 2】法截线在点 P 的法曲率 k_n的绝对值等于曲线C在该点的曲率 κ，即

$$|k_n| = \kappa$$

（证明）从公式（3·5）可知

$$k_n = \kappa\cos\varphi$$

如果曲线C是法截线，则C在点P的主法线向量 $\boldsymbol{v}$必与Σ在点P的法向量 $\boldsymbol{n}$共线。

（1）如果法截线 C凹向 $\boldsymbol{n}$，因为 $\boldsymbol{v}$ 总指向C的凹侧，这时 $\boldsymbol{n}$与 $\mathbf{v}$ 必指向相同，所以 $\varphi=0$，则 $\cos\varphi=1$。这时

$$k_n=\kappa$$

（2）如果法截线C凹向 $\boldsymbol{n}$ 的反方向，这时 $\boldsymbol{n}$与 $\boldsymbol{v}$ 必指向相反，所以， $\varphi=180°$ 则 $\cos\varphi=-1$。

这时 $k_n=-\kappa$

从而可以看出 $|k_n|=\kappa$。

【定义】在曲面Σ上使$k_n=0$ 的方向叫渐近方向。

【推论3】试证Σ上的曲线C的切线方向总是Σ的渐近方向的曲线是直线，或者C的密切平面是Σ沿曲线C的切平面。

（证明）从公式（3·5）可知

$$k_n=\kappa\cos\varphi$$

如果曲线C的切线方向是渐近方向，则 $k_n\equiv0$，从上式可得，使 $k_n\equiv0$ 的必有 $\kappa\equiv0$，或 $\cos\varphi\equiv0$。

如果 $\kappa\equiv0$，则曲线C是直线。

如果 $\cos\varphi\equiv0$，则 $\varphi\equiv90°$， 即 $\boldsymbol{n}\perp\mathbf{v}$，这时$C$的密切平面与$\Sigma$的切平面重合。

〔例2〕若二曲面 Σ_1 与 Σ_2 沿曲线 C相切，适当调整Σ_1和 Σ_2沿曲线 C 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$，使其指向相同。试证曲线C上各点在 Σ_1，Σ_2 上的法曲率值相等。

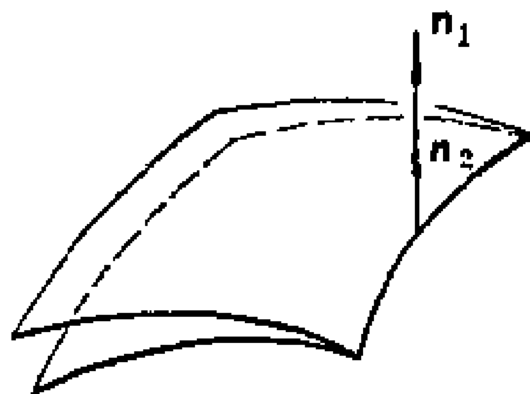


图3—16

（证明）已知曲线C以及其上各点P的主法线向量 $\mathbf{v}$和

曲率κ，又Σ_1与Σ_2沿曲线C相切．因此，沿曲线C，Σ_1与Σ_2的法向量 n_1 与 n_2 必共线。经过调整使 n_1 与n_2 指向相同。由公式

$$k_n = \kappa\cos\varphi$$

可知，C在 Σ_1 与Σ_2 上任意点 P，κ 与 φ 的值相等所以法曲率值 k_n 是相等．（图 3 —16）．

【定理 3 】曲面Σ上曲线C在给定点M的曲率中心，是与曲线C具有共同切线的法截线 C_1 在同一点M的曲率中心在曲线C的密切平面上的投影。

（证明）已知Σ上曲线C的各个点的法曲率 k_n 与曲率κ之间的关系为

$$k_n = \kappa\cos\varphi$$

令 $R = \dfrac{1}{\kappa}$，$R_n = \dfrac{1}{k_n}$，则上式变为

$$R = R_n\cos\varphi \qquad (3\cdot6)$$

这里的R，R_n 是在M点，曲线C的曲率半径与法曲率半径。而 φ 是Σ在点M的法线向量n 与C在该点的主法线向量 ν的夹角（图 3 —17）．

从面（3·6）式给出 C上一点的曲率半径与法曲率半径之间的关系。

〔例 3 〕已给球面上一点P和在该点的某切线 L．试证过点P和 L的所有平面的截线C的曲率中心在一个圆周上．

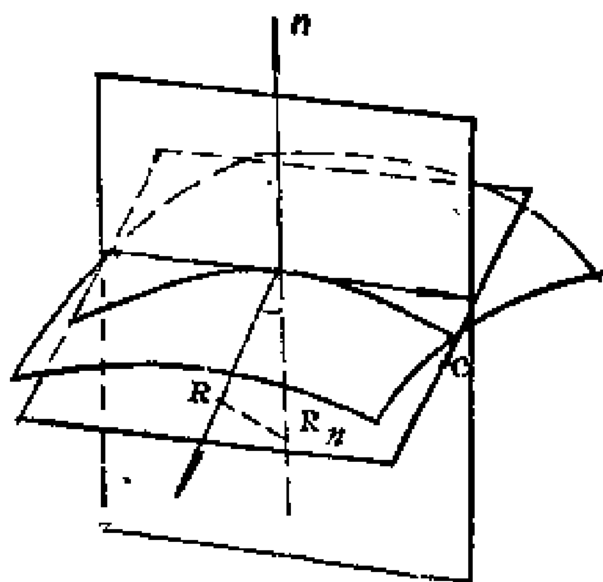


图3—17

（证明）已知 $R = R_n\cos\varphi$．因为球面的法截线是大圆，所以 R_n 是常数（球的半径）．由

上式知在点 P 切于 L 的所有截线 C 的曲率半径 R 必为以 R_n 为斜边，以 φ 为夹角的直角三角形的直角边之一。所以 R 的端点（C 的曲率中心）必在以 R_n 为直径，以 R_n 的中点为中心的圆周上。显然它在过点 P 且垂直 L 的平面上。

§3·2 主曲率与主方向

从§3·1节已经讨论过的法截线的法曲率 k_n 与曲率 κ 的关系：$|k_n|=\kappa$ 可以看出，法截线 C 在点 P 的弯曲状态，根据它的正负号又可以看出它在点 P 对 $\boldsymbol{n}$ 而言的凹向。这时对于我们研究曲面 Σ 在点 P 的邻域的状态具有很重要的作用。但是我们不可能把 Σ 在点 P 的所有法截线一一作出而考察它们的弯曲状态和凹向。因此，我们有必要考虑 Σ 在点 P 的所有法截线的法曲率 k_n 的取值范围，即 k_n 的极值问题。

【定理 4】曲面 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u\cdot v)$ 在正常点 P 的法截线 C 的法曲率 k_n 的极值，为方程

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN-2FM+LG)k_n+(LN-M^2)=0$$

的二实根。

（证明）已知曲面 Σ 上曲线 C 在某点 P 的法曲率为

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

为计算方便，我们设 $\mu=\frac{dv}{du}$，把它代入上式得

$$k_n=\frac{L+2M\mu+N\mu^2}{E+2F\mu+G\mu^2} \tag{3·7}$$

因为在 Σ 上定点 P 处 L、M，N；E，F，G 都是常数，这时（3·7）式中的 k_n 只是切线方向 μ 的函数。如果 k_n 存在极

值，则必 $\frac{dk_n}{d\mu}=0$，即

$$(E+2F\mu+G\mu^2)(M+N\mu)-(L+2M\mu+N\mu)(F+G\mu)=0 \tag{3·8}$$

又因为

$$\left.\begin{array}{l} E+2F\mu+G\mu^2=(E+F\mu)+\mu(F+G\mu) \\ L+2M\mu+N\mu^2=(L+M\mu)+\mu(M+N\mu) \end{array}\right\}$$

把它们代入（3·7）式，简化后得

$$(E+F\mu)(M+N\mu)-(L+M\mu)(F+G\mu)=0 \quad (3·9)$$

利用（3·8），（3·9）简化（3·7）式，得

$$k_n=\frac{M+N\mu}{F+G\mu}=\frac{L+M\mu}{E+F\mu}$$

从上式可得 k_n 极值所应满足的方程组

$$\left.\begin{array}{l} (L-k_nE)+(M-k_nF)\mu=0 \\ (M-k_nF)+(N-k_nG)\mu=0 \end{array}\right\} \tag{3·10}$$

从（3.10）式消去 μ，得

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN-2FM+LG)k_n+(LN-M^2)=0 \tag{3·11}$$

（3·11）式就是法曲率 k_n 的极值所应满足的方程。

现在再来证明（3·11）的二根是实根，为此我们只须计算它的判别式就可以了。

它的判别式

$$\varDelta=(EN-2FM+LG)^2-4(EG-F^2)(LN-M^2)$$

$$=[(EN-GL)-\frac{2F}{E}(EM-FL)]^2$$

$$+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2>0$$

所以方程（3·11）具有相异的二实根。

这里需要注意，当$EN-GL=EM-FL=0$时，判别式为零。但由于 $E\neq 0$，$G\neq 0$，所以此式可以写成

$$E:L=F:M=G:N$$

这种点叫Σ的脐点。在这个点主方向不定。实际上，这种点相当于球面上或平面上的点，对它我们不作详细讨论。

【定义】在曲面Σ上每个正常点的法截线的法曲率 k_n 都具有一个极大值和一个极小值。我们把这两个极值都叫做曲面Σ在点P的**主曲率**。

以主曲率为法曲率的法截线C在点P的切线方向叫作曲面Σ在点P的**主方向**。因为一般地，Σ在点P有两个主曲率。因此也对应地在点P有两个主方向。

【定理 5】在曲面 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上正常点P有两个主方向 dv/du，它们满足方程

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0$$

而且二主方向互相垂直。

（证明）根据极值条件式（3·8），按 μ 的升幂整理后，得

$$(EM-FL)+(EN-GL)\mu+(FN-GM)\mu^2=0 \quad (3\cdot 12)$$

根据主方向的定义可知(3·12)式中的 μ就是主方向，所以主方向$\dfrac{dv}{du}=\mu$ 必适合式(3·12)，把 $\mu=dv/du$ 代入上式即得

$$(EM-FL)du^2+(NE-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0 \quad (3\cdot 13)$$

因此，从方程（3·13）解得的 dv/du 就是主方向。

现在证明，（3·13）式所确定二主方向互相垂直。

设Σ在点P的两个主方向为 dv_1/du_1，dv_2/du_2，根据韦达

定理，从（3·13）式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_1}{du_1}\cdot\frac{dv_2}{du_2}=\frac{EM-FL}{FN-GM}\\ \frac{dv_1}{du_1}+\frac{dv_2}{du_2}=\frac{GL-EN}{FN-GM}\end{aligned}\right\}\tag{3·14}$$

将（3·14）式代入曲线交角公式，则得

$$\cos\varphi=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{ds_1ds_2}$$

$$=\frac{1}{ds_1ds_2}\left(E+F\frac{GL-NE}{FN-GM}+G\frac{EM-FL}{FN-GM}\right)du_1du_2$$

$$=\frac{1}{ds_1ds_2}\left(\frac{E(FN-GM)+F(GL-EN)+G(EM-FL)}{FN-GM}\right)du_1du_2$$

$$=0$$

由此，得 $\varphi=90°$，即二主方向互相垂直。

为以后讨论问题方便，我们建立一个特殊的曲线网。

【定义】曲面Σ上曲线C的切线方向都是曲面Σ的主方向时，则这种曲线C叫作Σ的**曲率线**。在Σ上用曲率线作坐标曲线所构成的网叫作**曲率线网**。由二主方向相互垂直可知曲率线网是正交网。

【定理 6】Σ上的坐标网是曲率线网的充分必要条件为$F=M=0$。

（证明）必要性：设曲线C是曲率线，则它在各点的切线方向 dv/du 必为主方向，所以必满足主方向的方程（3·13）式，即

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0\tag{3·15}$$

其中 E，F，G；L, M，N 都是曲线 C 上点的位置函数．上式就是曲率线的微分方程．为了便于记忆，又可以写成行列式形式：

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

从前面定理已知，在 Σ 上的正常点 P 必有两个互相垂直的主方向．因此，过 C 上点 P 必存在另一条曲率线垂直于 C，所以 Σ 上曲率线网是一个正交网．因此，在曲率线网中必有

$$F = 0$$

这时，曲率线的微分方程（3·15）变为

$$EMdu^2 + (EN - GL)dudv - GMdv^2 = 0 \qquad (3\cdot16)$$

又因为以曲率线作为坐标曲线，如 u 曲线（$du \neq 0$，$dv = 0$）或 v 曲线（$dv \neq 0$，$du = 0$）是曲率线，这时（3.16）式变为

$$EMdu^2 = 0 \quad (\text{或}\ MGdv^2 = 0)$$

因为 $E \neq 0$（或 $G \neq 0$），所以

$$M = 0$$

从而，在曲率线网中，$F = M = 0$．

充分性： 将条件 $F = M = 0$ 代入（3·15）式可得曲率线方程为 $(EN - GL)dudv = 0$．因 $EN - GL \neq 0$（若 $EN - GL = 0$ 是 Σ 上的脐点，不作讨论），所以必有

$$dudv = 0$$

即 $du \neq 0$，$dv = 0$ 或 $du = 0$，$dv \neq 0$，它们是曲率线的方程．即坐标曲线 u，v 是曲率线，坐标网为曲率线网．

显然，若取曲率线为坐标曲线，在这个网中则第一，第二基本微分形式可简化为

$$\varphi_1 = Edu^2 + Gdv^2$$

$$\varphi_2 = Ldu^2 + Ndv^2$$

这对于讨论问题是比较方便的.

〔例 4〕 求旋转曲面上的曲率线的微分方程.

(解) 设旋转曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u \cdot v) = \{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}$$

容易求得 $E = f^2$, $F = 0$, $G = f'^2 + g'^2$

$$L = \frac{-fg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}},\ M = 0,\ N = \frac{f''g' - f'g''}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}$$

由 (3.15) 式可得曲率线的微分方程为

$$[f^2(f''g' - f'g'') + fg'(f'^2 + g'^2)]dudv = 0$$

下面我们将在这个曲率线网中研究在正常点的法截线的法曲率 k_n 与主曲率 k_1, k_2 之间的关系.

【定理 7】(欧拉(Eular) 公式) 如果已知曲面 Σ上正常点P的二主曲率为 k_1, k_2. 在点P的任意法截线C的切线方向 $\boldsymbol{a}$ 与主方向之一的夹角为 φ, 则这个法截线C的法曲率 k_n 与该点P的二主曲率 k_1, k_2 之间的关系为

$$k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

(证明) 为证明方便, 我们在Σ上取曲率线网为坐标曲线网. 在这个网中, 第一, 第二基本微分形式分别为:

$$\varphi_1 = Edu^2 + Gdv^2$$

$$\varphi_2 = Ldu^2 + Ndu^2$$

因此, 在点P处, 法曲率公式可以写作

$$k_n = \frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \frac{Ldu^2}{Edu^2 + Gdv^2} + \frac{Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2} \tag{3·17}$$

但沿任意曲线C的单位切向量 $\boldsymbol{a}$与主方向向量 $\boldsymbol{r}_u/\sqrt{E}$ 的交角为

$$\left(a\cdot\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right)^2=\cos^2\varphi=\frac{\{(r_u du+r_v dv)\cdot r_u\}^2}{E ds^2}$$

$$=\frac{E du^2}{E du^2+G dv^2} \tag{3·18}$$

则

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-\frac{E du^2}{E du^2+G dv^2}$$

$$=\frac{G dv^2}{E du^2+G dv^2} \tag{3·19}$$

因为 k_1，k_2 为二主方向所对应的主曲率，由于坐标网是曲率线网，坐标曲线 u，v 都是曲率线，因此把 u 曲线：$du\neq 0$，$dv=0$ 和 v曲线：$du=0$，$dv\neq 0$ 的条件代入（3·17）式，则得

$$k_1=\frac{L}{E},\quad k_2=\frac{N}{G} \tag{3·20}$$

由（3·18），（3·19）和（3·20）式得

$$k_1\cos^2\varphi=\frac{L}{E}\cdot\frac{E du^2}{E du^2+G dv^2}=\frac{L du^2}{E du^2+G dv^2}$$

$$k_2\sin^2\varphi=\frac{N}{G}\cdot\frac{G dv^2}{E du^2+G dv^2}=\frac{N dv^2}{E du^2+G dv^2}$$

把上二式代入（3·17）式，则得

$$k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi \tag{3·21}$$

从（3·21）式可以看出，它给出在曲面Σ上某正常点P沿任意方向的曲线G的法曲率k_n与该点主方向以及主曲率k_1，k_2之间的关系。显然，当P点已经给定时，则主曲率和主方向随之确定，这时沿任意方向 a的法截线的法曲率 k_n 仅为方向 α与主方向 $r_u/\sqrt{E}$ 的夹角 φ 的函数。当 φ 改变时，则对应的法

截线 C 在点 P 的法曲率值将按公式（3.21）而变化。这个公式是欧拉提出的，所以也叫欧拉公式。

〔例 5〕试证在曲面 Σ 上某一正常点 P 处，二互相垂直方向的法曲率之和是一个常数。

（证明）设在 Σ 上点 P 与主方向成任意角 φ 的法截线 C_1 的法曲率为

$$k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

而在点 P 与 C_1 垂直的法截线 C_2 的法曲率为

$$\begin{aligned}\bar{k}_n &= k_1\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + k_2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= k_1\sin^2\varphi + k_2\cos^2\varphi\end{aligned}$$

作上面二式之和，则得

$$k_n + \bar{k}_n = k_1 + k_2 = \text{常数}$$

为了对曲面上的点进行分类，我们提出杜班（Dupin）标形。

【定义】在曲面 Σ 上正常点 P 的切平面上，沿任意方向都截取长度为 $\rho=\sqrt{1/|k_n|}$ 的线段 $\overline{PM}$。把 M 点的轨迹叫做曲面 Σ 在点 P 的杜班标形。

【推论 4】在曲面 Σ 上正常点 O 的切平面上，以二主方向作为 ox，oy 轴的坐标系中，杜班标形的方程为

$$k_1(X^2) + k_2(Y^2) = \pm 1 \tag{3·22}$$

（其中 k_1，k_2 为 Σ 上 O 点的主曲率）

（证明）在曲面上正常点 O 的欧拉公式为

$$k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

其中 k_n 为沿与主方向之一的夹角为 φ 的方向所对应的法曲率。k_1，k_2 为 Σ 在点 O 的两个主曲率。现在，在每个方向 φ 的射线上截取线段 $\overline{OM}$，使

$$\overline{OM}=\rho=\sqrt{\frac{1}{|k_n|}}=\frac{1}{\sqrt{|k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi|}}$$

则在O点，Σ的切平面上，设 $\overline{OM}$ 端点M在 oxy 直角坐标系的坐标为(X,Y)。于是有

$$X=\rho\cos\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{|k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi|}}$$

$$Y=\rho\sin\varphi=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{|k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi|}} \tag{3·23}$$

将上式的 $\cos\varphi$，$\sin\varphi$ 代入欧拉公式，得

$$k_1X^2+k_2Y^2=\pm1$$

它表示以O为中心的二次曲线。

这样可以根据杜班标形的方程的判别式：

$\Delta=k_1\cdot k_2$，对曲面上的点进行分类。

【定义】

（1）如果 $k_1\cdot k_2>0$ 这时标形是一椭圆，则称 O点为曲面的椭圆点。

（2）如果 $k_1\cdot k_2<0$，这时标形是双曲线，则称点O为曲面的双曲点。

（3）如果 $k_1\cdot k_2=0$，这时标形是一对平行线，即变态抛物线，则称点O为曲面的抛物点。

§3·3　曲面在正常点邻域的结构

我们为了研究曲面在正常点邻域的形状，前节用杜班标形把曲面上点进行了分类。在每一类中取出一个作为代表，如果我们探讨清楚在这个代表点的邻域中曲面的形状，当然对该类任何一个点的邻域中曲面的形状也就都有了明确的认识。但是

我们必须用曲面的微分不变量来作点的分类表示。因此，还要验证杜班标形的判别式是微分不变量。

【定理 8】已知Σ上点P的二主曲率 k_1、k_2，则有

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2}\ (k_1 + k_2) = \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)}$$

其中K叫做曲面在P点的**高斯曲率**，H叫做曲面在P点的**平均曲率**。

（证明）设曲面Σ在正常点P的两个主曲率为 k_1，k_2。由杜班标形（3.22）可知，它是该标形的二次项系数。又从欧拉公式（3.21）知，它是曲面在正常点的二主曲率，因此，它们应当满足公式（3.11），即

$$(EG - F^2)k_n^2 - (EN - 2FM + LG)k_n + (LN - M^2) = 0,$$

由韦达定理，可得

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{3·24}$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)} \tag{3·25}$$

从上式可以看到，不论是高斯曲率 K，或平均曲率 H 都是第一，第二基本量 E、F、G; L，M，N的表达式。第一基本量是与坐标系选取无关的微分不变量。可以证明，K 是微分不变量。

现在以高斯曲率 K为标准，作曲面上点的分类。

【推论 5】如果在 Σ上点P的高斯曲率 $K>0$，即 $LN-M^2>0$，由杜班标形可知，这个点是椭圆点。在该点邻域中无渐近方向，而且所有法截线都凹向n 的同侧（图 3—18）。

（证明）因为 $K=k_1\cdot k_2>0$，则点 P 是椭圆点，我们不妨设 $k_1>0$，$k_2>0$，且 $k_1>k_2$，于是由欧拉公式

$$k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi$$

可以看出，在点 P 沿任何方向的法截线的法曲率 k_n 都是大于 0 的数，所以法截线必凹向 $\boldsymbol{n}$ 的正方向，即曲面都在 P 点切平面的同侧．又因为无使 $k_n=0$ 的方向，所以在椭圆点 P 的邻域无渐近方向．又从法截线的法曲率的关系式 $|\pm k_n|=\kappa$，可知当欧拉公式的 φ 从 0 变为 $\frac{\pi}{2}$ 时，法截线的曲率值从 k_1 减少为 k_2，当 φ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变为 π 时，曲率由 k_2 增加为 k_1，因此，在椭圆点邻域，曲面呈椭圆抛物面的形状．

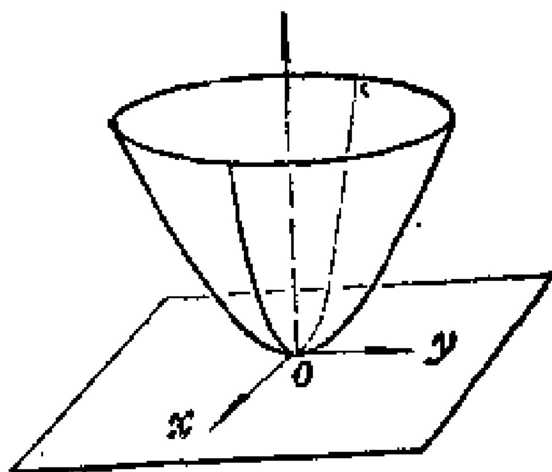


图3—18

〔例 6〕试证椭圆面上点都是椭圆点．

（解）设椭圆面的方程为

$$\Sigma:\ \boldsymbol{r}=\{a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ c\sin u\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{-a\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ c\cos u\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-a\cos u\sin v,\ b\cos u\cos v,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\{-cb\cos^2u\cos v,\ -ca\cos^2u\sin v,\ -ab\sin u\cos u\}$$

所以 $$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=abc\cos u/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$$

$$M=0$$

$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=abc\cos^3u/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$$

因此 $LN-M^2=a^2b^2c^2\cos^4u>0$

$$EG-F^2=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2>0$$

所以 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}>0$

即椭圆面上的点都是椭圆点。

【推论 6】如果在Σ上点P的高斯曲率$K=k_1\cdot k_2<0$，即$LN-M^2<0$，由前边定义可知这个点为双曲点。在这个点的邻域中，Σ有两个相异的渐近方向。曲面Σ以这两个渐近方向为界，在其间的一个部分中的法截线凹向该点法线$\boldsymbol{n}$的正向。则在另一个部分中的法截线凹向该点法线$\boldsymbol{n}$的反方向。

（证明）由于 $K=k_1\cdot k_2<0$ 点 P 是双曲点，所以不妨设$k_1>0$，$k_2<0$。根据欧拉公式

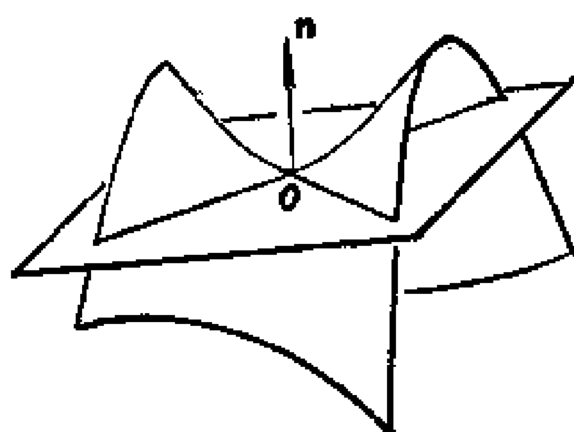


图3—19

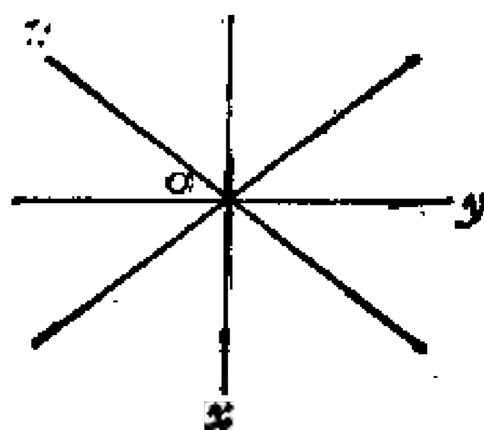


图3—20

$$k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi=k_1\cos^2\varphi-(-k_2)\sin^2\varphi \tag{3·26}$$

可以看出，在点P存在使 $k_n=0$ 的情形（图3—19，3—20），现在我们先求使 $k_n=0$ 的方向。为此，设

$$k_n=k_1\cos^2\varphi-(-k_2)\sin^2\varphi=0$$

所以得

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

这个式子确定Σ在点P的两个渐近方向．另一方面在 $\varphi=0$时，$k_n=k_1>0$，这时 $|k_1|=\kappa$ 是极大值，法截线凹向 $\boldsymbol{n}$ 的正向，随φ 的逐渐增加，从（3.26）式可以看出$|\pm k_n|=\kappa$随之减小，法截线随之逐渐平坦．当 $\operatorname{tg}\varphi=\pm\sqrt{-k_1/k_2}$ 时，则法截线的法曲率$|\pm k_n|=\kappa=0$，这时法截线变为直线．当 φ变化到$\pi/2$时，则法截线的法曲率 $k_n<0$ 而达到极小值 k_2，这时法截线凹向 $\boldsymbol{n}$的反方向，它的曲率 $\kappa=|-k_2|$．因此，在双曲线点P的邻域，曲面在该点P的切平面的两侧，近似于马鞍形曲面．

〔例 7〕试证双曲抛物面上的点都是双曲点．

（解）设双曲抛物面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$$

只须证明它的第二基本微分形式的判别式

$$LM-M^2<0$$

即可，为此求：

$$\boldsymbol{r}_u=\{a,\ b,\ v\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{a,\ -b,\ u\}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\cdot\{b(u+v),\ -a(u-u),\ -2ab\}$$

可算得：$L=\dfrac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{uu}}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=0$

$$M=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{uv}}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=-2ab$$

$$N=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{vv}}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=0$$

即 $$LN-M^2=-(-2ab)^2=-4a^2b^2<0$$

所以 $$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}<0$$

即双曲抛物面上的点都是双曲点.

【推论 7】如果在Σ上点P的高斯曲率 $K=0$，即 $LN-M^2=0$，这个点显然为抛物点。在该点 P 的邻域中只有一个渐近方向，而且除此以外所有法截线都凹向法线 $\boldsymbol{n}$的同侧.

（证明）已知 $K=k_1\cdot k_2=0$ 点 P 是抛物点，因此必有一个主曲率为0，不妨假定 $k_2=0$，$k_1>0$，显然与 $k_2=0$对应的法截线方向就是渐近方向。（使 $k_1=k_2=0$ 的点叫平点，我们把它排除掉）。在这种情形下，欧拉公式变为

$$k_n=k_1\cos\varphi$$

从上式不难看出，只当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时 （$k_n=0$），是抛物点邻域中的渐近方向。这条法戴线可能是直线或者是与切平面至少具有二阶以上切触的曲线。而其它方向的法截线的法曲率 $k_n>0$，即法截线都凹向该点法向量$\boldsymbol{n}$的同侧。它在该点与切平面相对弯曲状态由 $|\pm k_n|=\kappa$ 来确定（图3—21）。

〔例 8〕试证圆柱面上点都是抛物点。

（解）设圆柱面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ \ a\sin u,\ \ v\}$$

只须证得第二基本微分形式的判别式

$$LN-M^2=0$$

就可以（图3—22）。

为此计算

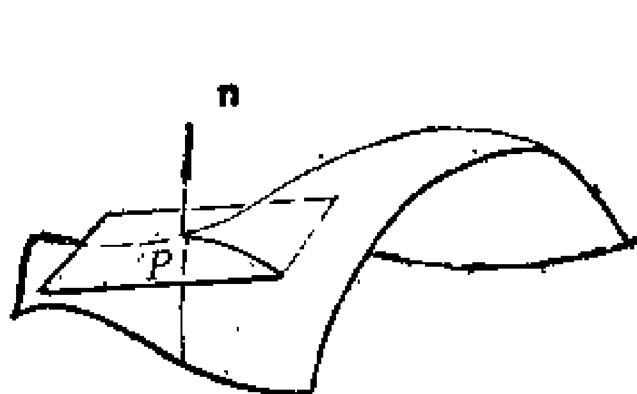


图3—21

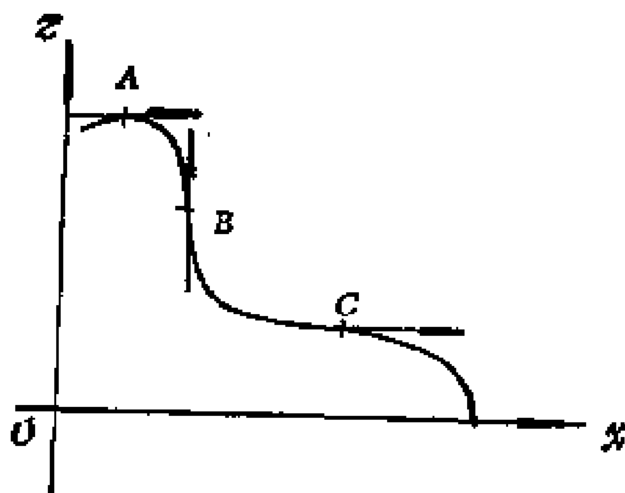


图3—22

$$\boldsymbol{r}_u=\{-a\sin u,\ a\cos u,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{0,\ 0,\ 1\}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ 0\}/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$$

而

$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{uu}}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=-a,\quad M=0,\quad N=0$$

所以 $LN-M^2=0$, 即 $K=0$。即圆柱面上点都是抛物点。

〔例 9〕在 yoz 面上已给曲线 c: $z=f(y)$, 若以 oz 为轴，旋转后生成旋转曲面为Σ，试证：

(i) 曲线C凹向旋转轴的弧$\overset{\frown}{AB}$所生成的曲面片Σ_1上的点都是椭圆点。

(ii) 曲线C凸向旋转轴的弧$\overset{\frown}{BC}$所生成的曲面片Σ_2上点都是双曲点。

(iii) 曲线C上切线垂直于旋转轴的切点以及切线平行于旋转轴的拐点A、B、C所生成的圆周上点都是抛物点。

(证明) 已知曲线 c: $z=f(y)$，绕 oz 轴旋转，取旋转角和 y的坐标为二独立参数 u, v，则旋转曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ f(v)\}\ (0\leqslant u<2\pi,\ 0\leqslant v)$$

为求得高斯曲率 K，计算第一、第二基本量E，F，G，L，M，N．先计算

$$\boldsymbol{r}_u=\{-v\sin u,\ v\cos u,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{\cos u,\ \sin u,\ f'(v)\}$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{f'v\cos u,\ f'v\sin u,\ -v\}$$

$$\boldsymbol{n}_u=\{-f'v\sin u,\ f'v\cos u,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{n}_v=\{f'\cos u+f''v\cos u,\ f'\sin u+f''v\sin u,\ -1\}$$

所以

$$E=v^2,\ F=0,\ G=1+f'^2$$

$$L=-f'v^2,\ M=0,\ N=-f''v$$

因此

$$K=k_1\cdot k_2=\frac{f'f''}{1+f'^2}v,\quad v\geqslant 0$$

(i) 在 $\overset{\frown}{AB}$上，因为 $\overset{\frown}{AB}$凹向旋转轴，所以 f' 与 f'' 同号，即 $K>0$．所以由 $\overset{\frown}{AB}$旋转所生成的曲面片Σ 上的点都是椭圆点（除掉 A、B 两点生成的圆）．

(ii) 在 $\overset{\frown}{BC}$上，因为 $\overset{\frown}{BC}$凸向旋转轴，所以 f' 与 f''，反号，即 $K<0$．所以由 $\overset{\frown}{BC}$旋转所生成的曲面片 Σ上的点都是双曲点．

(iii)在 点A、C，曲线的切向量垂直于旋转轴，在该点的 $f'=0$．而在点B，曲线的切向量平行于旋转轴，而且因为点B是曲线的拐点，所以 $f''=0$．这两种情形都使 $K=0$，所以由这种点旋转成曲面Σ上的圆，它上的点都是Σ的抛物点．

〔例10〕一个圆以和它共面的直线旋转则生成环面，试确定环面上椭圆点，双曲点和抛物点的区域．

（解）如图3—23。

(i) $\overset{\frown}{ABC}$凹向旋转轴，除点 A、C 外由$\overset{\frown}{ABC}$弧绕 oz 轴旋转所生成的曲面片上的点都是使 $K>0$ 的点。因此它们都是Σ上的椭圆点。

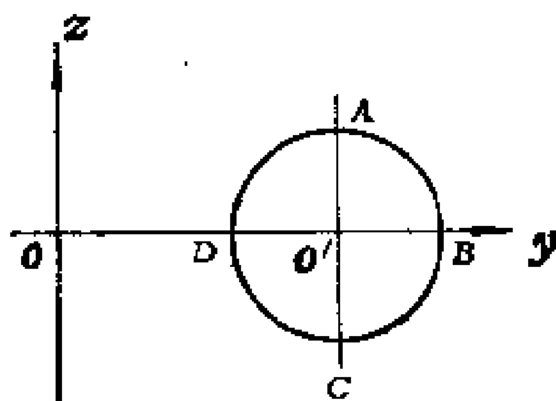


图3—23

(ii) $\overset{\frown}{ADC}$凸向旋转轴，除点A、C 外，由$\overset{\frown}{ADC}$弧绕 oz 轴旋转所生成的曲面片上的点都是使 $K<0$ 的点，因此它们都是Σ上的双曲点。

(iii)在点 A、C 的切向量垂直于 oz 轴，由点 A、C 所旋转成的圆周上点的 $K=0$，是抛物点。而在 B. D 两点的主曲率分别为 $k_1=\frac{1}{BO'}$，$k_2=\frac{1}{BO}$，和 $k_1=\frac{1}{DO'}$，$k_2=-\frac{1}{DO}$. 所以在由 B，D 两点旋转形成的圆周上，$K>0$ 和 $K<0$。即虽然切线平行于旋转轴，但它们不是拐点，所以也不是抛物点。

从上面的两个例子可以看到，从椭圆点 ($K>0$) 的区域过渡到双曲点 ($K<0$) 的区域，中间一定要通过它的界，即抛物点 ($K=0$) 的区域。

§3·4 曲面的渐近方向与渐近网、共轭方向与共轭网

我们知道，当在曲面上引进适当的坐标网时，往往使所讨论的问题的计算大为简化。为此在本节中，讨论两个重要的坐标曲线网。

(1) 渐近方向与渐近网

在3·1节中已经给出，如果点M的法曲率$\kappa_n=0$，则对应的方向 du/dv 称为曲面在M点的渐近方向的定义。

曲面上的曲线，如果它上面每一点的切线方向都是渐近方向，此曲线称为**渐近曲线**。渐近曲线的微分方程，由3·1节（3·2）式可知为

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

〔例11〕如果曲面上有直线，则它一定是曲面上的渐近曲线。

（证明）因为是直线，则曲率 $\kappa\equiv0$，由法曲率公式：

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

可知，因为

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2\neq0$$

所以由 $k_n=k\cos\theta$ 可知 $k_n=0$，即得

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

按定义，直线是曲面上的渐近曲线。

〔例12〕曲面在渐近曲线上的一点的切平面，一定是渐近曲线的密切平面。

（证明）因为曲线是渐近曲线，由定义知

$$k_n=\kappa\cos\theta=0$$

$\kappa=0$ 或 $\cos\theta=0$。当 $\kappa=0$渐近曲线是直线，这时曲面的切平面通过直线。因此它是直线的密切平面。另一方面若 $\kappa\neq0$，而$\cos\theta=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}=0$，则曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于渐近曲线的主法线向量 $\mathbf{v}$。因此，曲而的切平面通过渐近曲线的主法线向量，所以它是渐近曲线的密切平面。

【定义】若曲面Σ以渐近曲线为坐标曲线时，这个坐标网叫做渐近曲线网。但不是所有的曲面都存在这种渐近曲线网。

如果曲面上的点都是双曲点，则在曲面上存在两族渐近曲线，这两族渐近曲线构成曲面上渐近曲线网。但椭圆点的邻域不存在渐近曲线，因此也就不存在渐近曲线网。

【定理 9】曲面的坐标网是渐近曲线网的充分必要条件是

$$L=N=0$$

（证明）必要性：由渐近曲线的定义可知，渐近曲线的方程为

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

因为坐标曲线的微分方程为 $du=0$ 或 $dv=0$。因此，若 u 曲线是渐近曲线，即 $du\neq 0$，$dv=0$ 必满足渐近曲线的微分方程，把它代入上式，得 $Ldu^2=0$，因 $du\neq 0$，所以

$$L=0$$

同理，当 v曲线，即$du=0, dv\neq 0$是渐近曲线时，可得$N=0$。

充分性：若在曲面Σ的坐标网中 $L=N=0$，则渐近曲线方程变为 $Mdudv=0$，$M\neq 0$（否则第二基本微分形式不存在），所以有 $dudv=0$，因此，当 $du\neq 0$，$dv=0$ 时，u 曲线是渐近曲线，当 $du=0$，$dv\neq 0$ 时，v 曲线是渐近曲线。即

$$L=N=0$$

是Σ上坐标曲线网为渐近曲线网的充分必要条件。

（2）共轭方向与共轭网

【定义】沿曲面Σ上一条曲线 $c: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的单参切平面族的特征线方向 $\delta\boldsymbol{r}=\{\delta u, \delta v\}$与曲线 c的切线方向 $d\boldsymbol{r}=\{du, dv\}$ 之间满足条件

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+Ndv\delta v=0$$

时，则称 $\delta\boldsymbol{r}$与 $d\boldsymbol{r}$共轭。

【引理】曲面上任意点的二切线方向 $d\boldsymbol{r}_1, d\boldsymbol{r}_2$ 共轭的充分必要条件为 $d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}_1=0$，或 $d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}_2=0$。

（证明）必要性：设 $d\boldsymbol{r}_1=\{du_1,dv_1\}$，$d\boldsymbol{r}_2=\{du_2,dv_2\}$ 共轭，则有

$$Ldu_1du_2+M(du_1dv_2+du_2dv_1)+Ndv_1dv_2=0$$

即
$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_udu_1du_2+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v(du_1dv_2+du_2dv_1)+\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_vdv_1dv_2$$
$$=(\boldsymbol{r}_udu_2+\boldsymbol{r}_vdv_2)(\boldsymbol{n}_udu_1+\boldsymbol{n}_vdv_1)$$
$$=d\boldsymbol{r}_2\cdot d\boldsymbol{n}=0$$

充分性：在Σ上沿$d\boldsymbol{r}_1$ 为切线作曲线$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$。沿$C$作$\Sigma$的单参切平面族$\boldsymbol{n}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0$，再作这个族的特征线，即微分上式得 $\boldsymbol{n}'(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{n}'(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0$。令特征线方向为 $d\boldsymbol{r}$，则得

$$d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=0$$

若令
$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_udu_2+\boldsymbol{r}_vdv_2$$
$$d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_udu_1+\boldsymbol{n}_vdv_1$$

代入上式，则得

$$d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{r}_udu_2+\boldsymbol{r}_vdv_2)(\boldsymbol{n}_udu_1+\boldsymbol{n}_vdv_1)$$
$$=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_udu_1du_2+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v(du_1dv_2+dv_1du_2)$$
$$+\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_vdv_1dv_2$$
$$=Ldu_1du_2+M(du_1dv_2+dv_1du_2)+Ndv_1dv_2$$
$$=0$$

即曲线C的切线方向 dv_1/du_1 与特征线的方向dv_2/du_2共轭。

【定义】给出曲面上两族曲线，如果过曲面上每一点的两族坐标曲线的切线方向都是共轭方向时，则这两族坐标曲线所确定的坐标网称为曲面上的共轭网。

【定理10】曲面的曲线坐标网构成共轭网的充分必要条件是

$$M=0$$

（证明）必要性：设给定二族曲线的方向分别为 du/dv和

$\delta u/\delta v$，若二方向共轭则应满足共轭条件：

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+Ndv\delta v=0$$

若给出共轭曲线族中的一族曲线的微分方程

$$Adu+Bdv=0 \qquad \text{(a)}$$

我们能够求得与它共轭的曲线族的微分方程，这只要从上二式中，消去 du，dv，即得到

$$(BL-AM)\delta u+(BM-AN)\delta v=0 \qquad \text{(b)}$$

上式确定与 (a) 共轭的曲线族 (b)。

在特殊情况下，如果曲线是坐标曲线 u 即 $du\neq0$，$dv=0$，则它的共轭曲线族是

$$L\delta u+M\delta v=0$$

要使这族曲线是 v—曲线，即 $(\delta u=0,\ \delta v\neq0)$，则上式变为 $M\delta v=0$ 可知 $M=0$。

充分性：若 $M=0$，则共轭条件变为

$$Ldu\delta u+Ndv\delta v=0$$

当 $du\neq0$，$dv=0$时，从上式得 $Ldu\delta u=0$ 导出$\delta v\neq0$，$\delta u=0$。即坐标曲线 u与 v共轭，即坐标曲线网为共轭网。

【推论 8】曲面Σ上，自共轭方向是渐近方向。

（证明）设曲面上二共轭方向为 $du:dv$ 和 $\delta u:\delta v$。因为它们共轭，所以必满足共轭条件

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+Ndv\delta v=0$$

又因为它们自共轭，即

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

满足上式的方向 $du:dv$ 是渐近方向。因此，曲面Σ 上自共轭的方向必为渐近方向。

【推论 9】曲面Σ上正交共轭网是曲率线网。

（证明）我们根据本章§1·3的例题可知，曲面Σ上的网为

正交网的充分必要条件为 $F=0$，又由本节前面定理10可知曲线网为共轭网的充分必要条件是 $M=0$。因此，Σ 上曲线网为正交共轭网的充分必要条件为 $F=M=0$。

又由本章§3·2的定理 6 可知，坐标网为曲率线网的充分必要条件为 $F=M=0$。因此，正交且共轭的曲线网必为曲率线网。

§3·5　极小曲面

在微分方程的研究中贝克兰 (Backlund)变换很重要。它与极小曲面或负曲率曲面有密切关系，下面我们介绍极小曲面。

【定义】曲面Σ上各点的平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)\equiv 0$时，则称曲面$\Sigma$为极小曲面。

【定理11】曲面Σ上由一条闭曲线 C 所围成的面积 S 为极小时，则Σ是极小曲面。

〔证明〕对已给曲面Σ：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 做微小变动（图3—24），即

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\varepsilon\boldsymbol{n} \qquad \text{(a)}$$

其中 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}_1$ 分别是变动前后，对应点 M，M_1 的向径。$\boldsymbol{n}$ 是曲面Σ的法向量。ε 是任意小的正数，它与 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{n}$ 一样都是点的位置 (u,v) 的函数。做(a) 式的微分，得

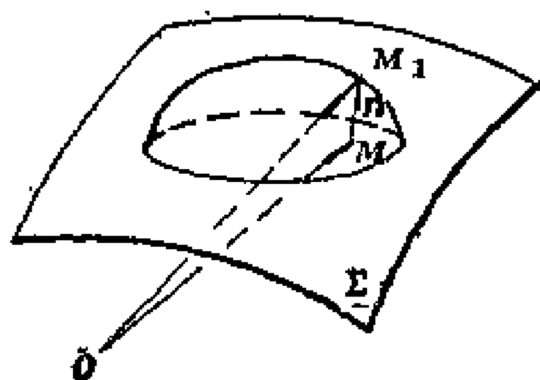


图3—24

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u}=\boldsymbol{r}_u+\varepsilon\boldsymbol{n}_u+\varepsilon_u\boldsymbol{n}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial v} = \boldsymbol{r}_v + \varepsilon \boldsymbol{n}_v + \varepsilon_v \boldsymbol{n} \tag{b}$$

求出变动后的曲面 Σ_1 的第一基本量，略去 ε 的高阶无穷小项，则得

$$E_1 = E - 2\varepsilon L, \quad F_1 = F - 2\varepsilon M, \quad G_1 = G - 2\varepsilon N \tag{c}$$

把它们代入公式，则有

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2) - 2\varepsilon(EN - 2FM + GN)$$
$$= (EG - F^2)(1 - 4\varepsilon H)$$

它在简单闭曲线 C 所围区域上的积分，即 C 所围的面积为

$$\iint\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,dudv = \iint\sqrt{EG - F^2}\;dudv$$
$$- 4\iint \varepsilon H\sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

所以面积的变分为

$$\delta s = -4\iint \varepsilon H ds$$

若使 C 所围面积最小，则 $\delta s = 0$，即平均曲率 $H = 0$。从定义可知该曲面 Σ 为极小曲面。

从平均曲率定义

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

可知，若曲面 Σ 为极小曲面，则第一、第二基本量满足条件：

$$EN - 2FM + GL = 0 \tag{3·27}$$

【推论10】在极小曲面 Σ 上，渐近曲线网是正交曲线坐标网。

（证明）已知曲面 Σ 的曲线坐标网为渐近曲线坐标网的充分必要条件为 $L = N = 0$ (a)

又知该曲面为极小曲面，即

$$EN - 2FM + GL = 0 \tag{b}$$

将条件(a)代入条件 (b)，则得

$$FM=0$$

因为$M\neq 0$（否则第二基本量同时为零），所以 $F=0$，而$F=0$是曲线坐标网是正交网的充分必要条件．因此，极小曲面上的渐近曲线网是正交曲线网．

【推论11】 极小曲面Σ是负曲率曲面．

（证明） 从极小曲面的定义可知

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$$

所以，在极小曲面上各点的二主曲率 k_1、k_2 的绝对值相等而符号相反．因此在该点的高斯曲率

$$K=k_1\cdot k_2<0$$

所以极小曲面是负曲率曲面．

【推论12】 在不是平面的极小曲面Σ上，渐近曲线网，曲率线网均是等温网．

（证明） 首先证明在极小曲面Σ上曲率线网是等温网．面为Σ上的网是曲率线网，因此在这个网中，Σ的第一、第二基本微分形式为

$$\varphi_1=E\,du^2+G\,dv^2$$

$$\varphi_2=L\,du^2+N\,dv^2$$

又因为曲面Σ是极小曲面，它的第一、第二基本量应满足满足条件

$$H=EN+GL=0$$

又根据柯达奇（Codazzi）方程*，可知

---

* Codazzi 方程是曲面第一，二基本量必须满足的方程：$\left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\frac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0$，$\left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)_v-L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0$ 可参看§ 4·3节的(4.28)式．

$$L_v = N_u = 0$$

即 $L = L(u)$，$N = N(v)$。因为 $E>0$，$G>0$，所以由 $(EN+GL=0$ 可知 L、N或均为 0，或异号．因为已假定 Σ不是平面，所以 L, N只是异号．现在设引进新参数为 $\bar{u}, \bar{v}$，使$L>0$，$N<0$，且

$$d\bar{u} = \sqrt{L}du \quad d\bar{v} = \sqrt{-N}\ dv$$

在这个坐标网中，Σ的第一基本微分形式为

$$\varphi_2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2 \ = (Ldu^2 + Ndv^2)$$

于是这时，由 $H = EN + GL = 0$ 的条件可知，Σ的第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = \sigma(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

其中$\sigma = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$。所以曲率线网是$\Sigma$的等温网。

其次证明Σ的渐近曲线网也是等温网。

现在在Σ上取 $d\tilde{u} = d\bar{u} + d\bar{v}$，$d\tilde{v} = d\bar{u} - d\bar{v}$ 为坐标曲线网的参数．若它是渐近曲线网，则$L = N = 0$，所以在这个网中，第二基本微分形式为

$$\varphi_2 = d\tilde{u}\cdot d\tilde{v}$$

又因为在这个网中，极小曲面的第一、第二基本量应当满足条件

$$H = EN - 2FM + GL = 2FM = 0,$$

但 $M\neq 0$（因为Σ不是平面），所以有$F = 0$。因此，Σ的第一基本微分形式可以写做

$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{2}(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$$

即渐近曲线网是等温网，而$\tilde{u}$ = 常数，$\tilde{v}$ = 常数是渐近曲线．

〔例13〕旋转极小曲面是悬链面．

（证明）设旋转曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{g(u)\cos v,\ g(u)\sin v,\ u\}\quad(g>0)$$

它第一、二基本量分别为

$$E=1+(g')^2,\ F=0,\ G=g^2$$

和 $L=-g''/\sqrt{1+(g')^2},\ M=0,\ N=g/\sqrt{1+(g')^2}$

在这个网中，极小曲面的条件式为

$$H=(1+(g')^2-gg''=0$$

或 $$\frac{g'}{g}=\frac{g'g''}{1+(g')^2}$$

积分得 $g=c\sqrt{1+(g')^2}$ （c 为常数）

解得 $$g'=\pm\sqrt{\left(\frac{g}{c}\right)^2-1}$$

即 $$du=\pm dg\bigg/\sqrt{\left(\frac{g}{c}\right)^2-1}$$

再积分，得

$$\frac{u}{c}+a=\pm\operatorname{ch}^{-1}\frac{g}{c}$$

即 $$g=c\operatorname{ch}\left(\frac{u}{c}+a\right)$$

其中 a为常数，显然旋转曲面为悬链面。

§4 曲面的基本定理

对曲面来说，在一般情形下来讨论，会使计算烦杂起来，为使得计算更为简单，我们将采用新的记号.

§4·1 指标记法

设曲面参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$$

今后用 u^1表示参数 u，用 u^2 表示参数 v，这时曲面参数方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\ u^2)$$

如用 i表示参数右上角号码，则参数方程又可以写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^i) \quad (i=1, 2) \tag{4·1}$$

曲面对参数的微分，按 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$，应写为

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$$

令

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$$

如果按新的记号则

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1 du^1+\boldsymbol{r}_2 du^2$$

又可以写成

$$d\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{r}_i du^i \tag{4·2}$$

根据上面记号，可以令 $\boldsymbol{r}_{uu}$ 为 $\boldsymbol{r}_{11}$，$\boldsymbol{r}_{vv}$ 为 $\boldsymbol{r}_{22}$，类似地 $\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{r}_{12}$，$\boldsymbol{r}_{vu}=\boldsymbol{r}_{21}$，因此，第一基本量按新的记号可以写做

$$E=\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1=g_{11}, \quad F=\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_{21}=g_{21}=g_{12}, \quad G=\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2=g_{22}$$

在这种记号下，

$$\begin{aligned}
ds^2&=(\boldsymbol{r}_1 du^1+\boldsymbol{r}_2 du^2)(\boldsymbol{r}_1 du^1+\boldsymbol{r}_2 du^2)\\
&=(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1)du^1du^1+(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)du^1du^2+(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_1)du^2du^1\\
&\quad+\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2 du^2du^2\\
&=g_{11}du^1du^1+2g_{12}du^1du^2+g_{22}du^2du^2\\
&=\sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}du^jdu^k
\end{aligned} \tag{4·3}$$

其中令 $\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_k=g_{jk}$. 由 $g_{jk}=\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{kj}$ 可知下指标是对称的。

将上面用新记号表示的公式，概括如下：

$$x^i=a_{ik}x^k \tag{4·4}$$

$$\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} \tag{4·5}$$

$$d\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{r}_i du^i \tag{4·6}$$

$$g_{jk}=\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{kj} \tag{4·7}$$

$$ds^2=\sum_{j,k=1}^{2}g_{jk}du^j du^k \tag{4·8}$$

其中 $i,\ j,\ k=1,2$.

（4·4）式中的 k，（4.6）式中的 i，（4·8）式中的j,k 它们表示 $i,j,k=1,2$ 时，有两项相加，是表示总和的．所以把这种指标称为**总和指标**．总和指标的特点是在一个式子的一项中同时出现，而且一个在上方，而另一个在下方．对这种指标一般地取 $1,2\cdots,\ n$ 的总和．总和指标与所用的字母无关．例如 $a_ib^i=a_kb^k=a_lb^l$ 等等．但必须注意在一个式子中不同的总和要用不同的字母作总和指标，以避免混淆．

另一方面，如上面（4·4）式，当 $i=1,2$时，实际上它同时表示两个式子．（4·7）式，当 $j,k=1,2$时，它表示四个式子．这样的指标 i,j,k 在式子中称为**自由指标**．它的特征是在每项中单独出现．

这种规定称为爱因斯坦(Einstein)的指标规定．在这种规定下，可以把总和记号Σ略去，而不能产生混淆．

〔例 1〕 $ds^2=g_{11}du^1du^1+2g_{12}du^1du^2+g_{22}du^2du^2$

$$=\sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}du^j du^k$$

$$=g_{jk}du^j du^k \quad (j, k=1, 2)$$

〔例 2〕 设 $f=f(x^1, x^2, x^3)$， 又 $x^i=(u^1, u^2)$ $\quad i=1, 2, 3$, 求 f 对 u^i 的偏导。

（解） $$\frac{\partial f}{\partial u^i}=\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^i}+\frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^i}+\frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^i}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$$

根据指标记号，这里的 α 是总和指标。所以可将和符号 Σ 省略，即

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \qquad (\alpha=1, 2, 3)$$

〔例 3〕 设 $S=a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \qquad (\alpha, \beta=1, 2, 3)$

试写出它的展开式。

（解）因为 α, β 是总和指标，又因为 $\alpha, \beta=1, 2, 3$, 所以

$$S=a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$$

$$=a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+a_{13}x^1x^3+a_{21}x^2x^1$$
$$+a_{22}x^2x^2+a_{23}x^2x^3+a_{31}x^3x^1+a_{32}x^2x^3+a_{33}x^3x^3$$

另一方面，为计算的方便，我们引进叫克朗尼克（Kronecker）δ 的记号，以下简称克氏记号：

$$\delta^i_j=\begin{cases}1 & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases} \tag{4·9}$$

其次，引进由第一基本量构成的矩阵 (g_{ik})

$$(g_{jk})=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{4·10}$$

已知它的行列式

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}=EG-F^2>0 \tag{4·11}$$

所以 (g_{jk}) 是满秩阵，因此存在逆阵 (g^{jk})，g^{jk} 中的元素为

$$g^{jk}=\frac{(-1)^{j+k}(g_{jk}\text{在}\ |g_{jk}|\ \text{中的余子式})}{|g_{jk}|} \tag{4·12}$$

于是 $$g^{jk}=\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \tag{4·13}$$

即 $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

它的逆阵为

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

从矩阵的运算性质可知

$$(g^{ij})(g_{jk})=\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g^{11}g_{11}+g^{12}g_{21}, & g^{11}g_{21}+g^{12}g_{22} \\ g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}, & g^{21}g_{12}+g^{22}g_{22} \end{pmatrix}=\delta^i_k,$$

因为 $$g^{11}g_{11}+g^{12}g_{21}=1 \quad g^{11}g_{12}+g^{12}g_{22}=0$$

$$g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}=0 \quad g^{21}g_{12}+g^{22}g_{22}=1$$

根据自由指标与总和指标的规定，上边四个式子可写成下面形式

$$\sum_{j\cdot k=1}^{2} g^{ij}g_{jk}=g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k \tag{4·14}$$

所以 $(g^{ij}g_{jk})=\begin{pmatrix}\delta^1{}_1 & \delta^1{}_2\\ \delta^2{}_1 & \delta^2{}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(\delta^i{}_k)$

现在将过去用的符号与今后用的指标记法的符号对应的列表如下：

u, v	$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$	$\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{r}_{vu}, \boldsymbol{r}_{vv}$	$E, \quad F, \quad G$	$L, \quad M, \quad N$
u^1, u^2	$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{r}_{11}, \boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_{21}, \boldsymbol{r}_{22}$	$g_{11}, g_{12}=g_{21}, g_{22}$	$H_{11}, H_{21}=H_{12}, H_{22}$

(4·15)

这里前四个部分，前面已作规定，而第二基本量又给以新的记号 H_{jk}。

下面，我们通过实例给出指标升降的运算。

〔例 4〕已给 $H^i{}_k=g^{ij}H_{jk}$，试将指标 i 下降，使$H^i{}_k$变为 H_{ik}。

（解）将等式 $g^{ij}H_{jk}=H^i{}_k$ 两边同乘以 g_{il} 得

$$g_{il}g^{i}{}_jH_{jk}=H^i{}_kg_{il}$$

因为 $g_{il}g^{ij}=\delta^j{}_l$，可得

$$\delta^j{}_lH_{jk}=H^i{}_kg_{il}$$

又因为 $\delta^j{}_lH_{jk}=\delta^1{}_lH_{1k}+\delta^2{}_lH_{2k}$

但 l也可取1，2．所以根据 (4·9)δ_i 记号性质可得，当$j=l$ 时 $\delta^j{}_l=1$，$j\neq l$ 时， $\delta^j{}_l=0$，所以

$$\delta^j_l H_{jk}=H_{lk}$$

由此可得

$$H_{lk}=H^i{}_kg_{il} \tag{4·16}$$

这样即将 $H^i{}_k$ 的上指标 i 下降，使 $H^i{}_k$ 变为 H_{lk} 这种运算称为指标下降。

同样，已知 $H_{lk}=H^i{}_kg_{il}$，将上式两边同乘以g^{jl} 即

$$g^{jl}H_{lk}=H^i{}_kg_{il}g^{jl}=H^i{}_k\delta^j{}_i$$

即有 $$g^{jl}H_{lk}=H^j{}_k \tag{4·17}$$

通过上述运算又把 H_{lk} 的指标 l 上升，使 H_{lk} 变为 $H^i{}_k$，将这种运算称为**指标上升**.

总之，当把下（上）指标上升（下降）时，就乘以与它有相同的一个总和指标的具有两个上（下）指标的 g， 这种运算，今后要用到.

§4·2 曲面上的相伴三棱形

在曲线论里，我们在曲线上正常点取三个相互正交的单位向量 τ，ν、β. 由这三个基本向量组构成曲线相伴三棱形. 并导出了 $F—S$ 公式. 这个公式在曲线论里占有极重要地位.

与曲线论里的 $F—S$ 公式类似地，在曲面上我们也引进同样的公式. 即在曲面上过每个正常点都有两个坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 以及与它们相垂直的法向量 $\boldsymbol{n}$，构成一个标架. 显然，此三个向量是线性无关的. 在一般情况下， $\boldsymbol{r}_u$与 $\boldsymbol{r}_v$ 不是垂直的. 现在我们研究当标架原点，作微小移动时，标架的变化规律.

【定义】曲面 Σ：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ 上任意点的三个向量组 $\{\boldsymbol{r}_i=\partial\boldsymbol{r}/\partial u^i,\ \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{r}_j/|\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{r}_j|=\boldsymbol{n}\}$ $(i,j=1,\ 2)$ 称为曲面Σ的**相伴三棱形**.

【定理】$\boldsymbol{r}_j$ 对 u^k的导函数 $\boldsymbol{r}_{jk}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_j}{\partial u^k}=\dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^j\partial u^k}$ 在相伴三棱形 $\{\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{n}\}$中的线性表示式为

$$\boldsymbol{r}_{jk}=\Gamma^i{}_{jk}\boldsymbol{r}_i+\Gamma_{jk}\boldsymbol{n}$$

其中 $\Gamma^i{}_{jk}=\Gamma^i{}_{kj}$，$\Gamma_{jk}=\Gamma_{kj}$，是关于指标 j、k 对称的未定系数.

（证明）因为曲面Σ上的点都是正常点，所以在曲面上任意点的标架$\{\boldsymbol{r}_i、\boldsymbol{n}\}$是无关向量. 在该点的任何向量都可以被这

无关向量组线性表出。因此，$\boldsymbol{r}_{j,k}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}_{j,k}=\Gamma^{i}{}_{jk}\boldsymbol{r}_{i}+\Gamma_{jk}\boldsymbol{n} \tag{4·18}$$

其中 $j,k=1,2$ 是自由指标，而 i 是总和指标，从而上式同时表示四个式子．即

$$\boldsymbol{r}_{1,1}=\Gamma^{1}{}_{11}\boldsymbol{r}_{1}+\Gamma^{2}{}_{11}\boldsymbol{r}_{2}+\Gamma_{11}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{r}_{1,2}=\Gamma^{1}{}_{12}\boldsymbol{r}_{1}+\Gamma^{2}{}_{12}\boldsymbol{r}_{2}+\Gamma_{12}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{r}_{2,1}=\Gamma^{1}{}_{21}\boldsymbol{r}_{1}+\Gamma^{2}{}_{21}\boldsymbol{r}_{2}+\Gamma_{21}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{r}_{2,2}=\Gamma^{1}{}_{22}\boldsymbol{r}_{1}+\Gamma^{2}{}_{22}\boldsymbol{r}+\Gamma_{22}\boldsymbol{n}$$

现在，我们计算系数 $\Gamma^{i}{}_{jk}$、Γ_{jk}．

首先，注意

$$\boldsymbol{r}_{j,k}\cdot\boldsymbol{n}=H_{jk}\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$$

则得
$$\Gamma_{jk}=H_{jk} \tag{4·19}$$

其次，确定 $\Gamma^{i}{}_{jk}$，为此，作

$$\boldsymbol{r}_{a}\cdot\boldsymbol{r}_{j}=g_{aj}$$

将上式对 u^{k} 微分，（记做$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{a}}{\partial u^{k}}=\boldsymbol{r}_{a,k}$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{j}}{\partial u^{k}}=\boldsymbol{r}_{j,k}$）得

$$\boldsymbol{r}_{a,k}\cdot\boldsymbol{r}_{j}+\boldsymbol{r}_{a}\cdot\boldsymbol{r}_{j,k}=g_{aj,k} \tag{4·20}$$

将
$$\boldsymbol{r}_{a,k}=\Gamma^{b}{}_{ak}\boldsymbol{r}_{b}+\Gamma_{ak}\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{r}_{j,k}=\Gamma^{b}{}_{jk}\boldsymbol{r}_{b}+\Gamma_{jk}\boldsymbol{n}$$

代入（4.20）式，并注意

$$\boldsymbol{r}_{b}\cdot\boldsymbol{r}_{j}=g_{bj},\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{j}=0$$

则得
$$\Gamma^{b}{}_{ak}g_{bj}+\Gamma^{b}{}_{jk}g_{ab}=g_{aj,k}$$

交换 j 与 k 得

$$\Gamma^{b}{}_{aj}g_{bk}+\Gamma^{b}{}_{kj}g_{ab}=g_{ak,j}$$

再交换 a 与 j，则得

$$\Gamma^{b}{}_{ja}g_{bk}+\Gamma^{b}{}_{ka}g_{jb}=g_{jk,a}$$

将前两式相加再减去第三式，并注意 $\Gamma^{i}{}_{jk}$ 及 g_{jk} 的下指标关于 j 与 k 对称，则

$$2\Gamma^b{}_{jk}g_{ab}=g_{aj,k}+g_{ak,j}-g_{jk,a}$$

其次，在该式两边乘以 $\frac{1}{2}g^{ia}$，就 $(a=1,2)$ 作总和，则得

$$\Gamma_{jk}{}^b(g^{ia}g_{ab})=\frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k}+g_{ak,j}-g_{jk,a})$$

然而 $\quad g^{ia}\cdot g_{ab}=\delta^i{}_b$

从而 $\quad \Gamma^b{}_{jk}(g^{ia}g_{ab})=\Gamma^b{}_{ij}\delta^i{}_b$

$$=\Gamma^1{}_{jk}g^i{}_1+\Gamma^2{}_{jk}\delta^i{}_2=\Gamma^i{}_{jk}$$

或记做$\left\{{i \atop jk}\right\}$，即

$$\left\{{i \atop jk}\right\}=\Gamma^i{}_{jk}=\frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k}+g_{ak,j}-g_{jk,a}) \qquad (4\cdot21)$$

我们令$\frac{1}{2}(g_{aj,k}+g_{ak,i}-g_{kj,a})=[jk,a]$叫克利斯多夫（Christoffel）第一类记号，把$\left\{{i \atop jk}\right\}=\Gamma^i{}_{jk}=g^{ia}[jk,a]$叫克利斯多夫第二类记号。显然它们都是仅由第一基本量 g_{jk} 和它的一阶偏导函数构成，所以 $\Gamma^i{}_{jk}=\Gamma^i{}_{kj}$ 是曲面内在几何重要基本量。将（4·19），（4·21）式代入（4·18）式得

$$\boldsymbol{r}_{j,k}=\left\{{i \atop jk}\right\}\boldsymbol{r}_i+H_{jk}\boldsymbol{n} \qquad (4\cdot22)$$

称之为高斯公式。

根据同样思想，在正常点的法向量 $\boldsymbol{n}$对参数u^k的偏导数，也同样可以用 $\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{n}$线性表示。

〔定理 2〕曲面Σ，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 的任意点的法向量$\boldsymbol{n}$，对参数 u^k的偏导数在该点按 $\{\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{n}\}$ 的分解式为

$$\boldsymbol{n}_{,k}=-g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i$$

（证明）设 $\boldsymbol{n}_{,k}$ 沿 $\{\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{n}\}$ 的线性分解式为

$$\boldsymbol{n}_{,k}=\Gamma_{,}{}^i{}_k\boldsymbol{r}_i+\Gamma_i\boldsymbol{n} \qquad (4\cdot23)$$

其中$\Gamma_{,}{}^i{}_k$、Γ_i 是待定系数。

由假设可知$\boldsymbol{n}$是单位向量，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$ 对 u^k求导可得

$$\boldsymbol{n}_{,k}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_{,k}=0$$

因而 $\boldsymbol{n}_{,k}\boldsymbol{n}=0$

将（4·23）式两边同乘以 $\boldsymbol{n}$即得 $\Gamma_i=0$，又因为 $\boldsymbol{r}_j\perp\boldsymbol{n}$，所以 $\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{n}=0$。将此式对 u^k 微分得

$$\boldsymbol{r}_{j,k}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{n}_{,k}=0$$

式中 $\boldsymbol{r}_{jk}$ 与$\boldsymbol{n}_{,k}$ 分别用高斯公式与 $\boldsymbol{n}_{,k}=\Gamma_{,k}^{\alpha}\boldsymbol{r}_\alpha$ 代入上式，并注意 $\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{n}=0$ 和 $\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_\alpha=g_{j\alpha}$，得

$$H_{jk}+\Gamma_{,}{}^{\alpha}{}_{k}g_{j\alpha}=0$$

将等式两边同乘以 g^{ij}，并注意对 j 求和$g^{ij}g_{j\alpha}=\delta^i_\alpha$，$\Gamma^\alpha{}_k\delta^i_\alpha=\Gamma^i{}_{,k}$ 则得

$$\Gamma^i{}_{,k}=-g^{ij}H_{jk}$$

若令 $g^{ij}H_{jk}=H^i{}_k$，则由（4·23）式可得

$$\boldsymbol{n}_{,k}=-g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i=-H^i{}_k\boldsymbol{r}_i \tag{4·24}$$

它表示法向量$\boldsymbol{n}$的偏导数按 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}_i$ 的分解式。也称此公式为**万加滕（Weingarten）公式**。

高斯公式和万加滕公式在曲面论中是很重要的公式，它类似曲线论的 F-S 公式，它们描述了曲面的相伴三棱形沿曲面上曲线做微小移动时，相伴三棱形相对于某固定相伴三棱形（标架）的运动规律。以后对某变量求导时，在不发生混淆时，可略去指标前的逗号。

〔例 5〕写出当曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 的坐标网为正交网时的高斯公式与万加滕公式。

（解）已知高斯公式为

$$\boldsymbol{r}_{j,k}=\Gamma^i{}_{jk}\boldsymbol{r}_i+\Gamma_{jk}\boldsymbol{n}$$

万加滕公式为

$$\boldsymbol{n}_{,k}=-g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i$$

其中 $\Gamma^i{}_{jk}=\dfrac{1}{2}\ g^{i\alpha}(g_{\alpha j,k}+g_{\alpha k,j}-g_{jk,\alpha})$

$$\Gamma_{jk}=H_{jk}$$

i，j，k 分别取1，2．又由坐标网为正交网，因此$F=0$。所以

$$g_{11}=E,\quad g_{12}=g_{21}=F=0,\quad g_{22}=G$$

$$g^{11}=\frac{1}{E},\quad g^{12}=g^{21}=0,\quad g^{22}=\frac{1}{G}$$

把它代入上式，可得，

$$\begin{cases}
\Gamma^1{}_{11}=\dfrac{1}{2}g^{11}\left(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}-\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right)=\dfrac{E_u}{2E}\\[2ex]
\Gamma_{12}{}^1=\dfrac{1}{2}g^{11}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right)=\dfrac{E_v}{2E}\\[2ex]
\Gamma^1{}_{22}=\dfrac{1}{2}g^{11}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}+\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right)=-\dfrac{Gu}{2E}\\[2ex]
\Gamma^2{}_{11}=\dfrac{1}{2}g^{22}\left(\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)=-\dfrac{E_v}{2G}\\[2ex]
\Gamma^2{}_{12}=\dfrac{1}{2}g^{22}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)=\dfrac{G_u}{2G}\\[2ex]
\Gamma^2{}_{22}=\dfrac{1}{2}g^{22}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}+\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right)=\dfrac{G_v}{2G}
\end{cases}$$

$$\Gamma_{11}=H_{11}=L,\quad \Gamma_{12}=\Gamma_{21}=H_{21}=H_{12}=M,$$

$$\Gamma_{22}=H_{22}=N$$

把它们代入高斯公式和万加滕公式，则得

$$\begin{cases}
\boldsymbol{r}_{11}=\Gamma^k{}_{11}\boldsymbol{r}_k+L\boldsymbol{n}=\dfrac{E_u}{2E}\boldsymbol{r}_1-\dfrac{E_v}{2G}\boldsymbol{r}_2+L\boldsymbol{n}\\[2ex]
\boldsymbol{r}_{12}=\Gamma^k{}_{12}\boldsymbol{r}_k+M\boldsymbol{n}=\dfrac{E_v}{2E}\boldsymbol{r}_1+\dfrac{G_u}{2G}\boldsymbol{r}_2+M\boldsymbol{n}
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
r_{22} = \Gamma_2{}^k{}_2 r_k + N n = -\dfrac{G_u}{2E} r_1 + \dfrac{G_v}{2G} r_2 + N n \\
n_{,1} = -\dfrac{L}{E} r_1 - \dfrac{M}{G} r_2 \\
n_{,2} = \dfrac{M}{E} r_1 - \dfrac{N}{G} r_2
\end{cases}
$$

〔例 6〕试将高斯公式用 E，F，G；L，M，N 表示。

（解）已知高斯公式为

$$r_{j,k} = \Gamma^i{}_{jk} r_i + \Gamma_{jk} n$$

因 $r_{j,k}$ 是向量，只要将其系数 $\Gamma^i{}_{jk}$，Γ_{jk} 用第一、第二基本量 $E, F, G; L, M, N$ 表示出来即可．从克利斯多夫记号可知

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ia} (g_{aj,k} + g_{ak,j} - g_{jk,a})$$

其中 $g_{11} = E$，$g_{12} = g_{21} = F$，$g_{22} = G$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

其中指标 a 是总和指标，按 1，2 展开求和，则得

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2g}(GE_u + FE_v - 2F_u)$$

$$\Gamma^2{}_{11} = \frac{1}{2g}(2EF_u - EE_v - FE_u)$$

$$\Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = \frac{1}{2g}(GE_v + FG_u)$$

$$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{2g}(EG_u - FE_v)$$

$$\Gamma^1{}_{22} = \frac{1}{2g}(2GF_v - GG_u - FG_v)$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2g}(EG_v-FG_u-2FF_u)$$

由H_{ik} 的约定已知 $H_{11}=L$, $H_{12}=H_{21}=M$, $H_{22}=N$,把它们代入高斯公式，则 $r_{ij,k}$ 的坐标可写成如下形式:

$$x_{uu}=\frac{1}{2g}[(GE_u+FE_v-FF_u)x_u+(2EF_u-EE_v-FE_u)x_v]+LX$$

$$x_{uv}=\frac{1}{2g}[(GE_v-FG_u)x_u+(EG_u-FE_v)x_v]+MX$$

$$x_{vv}=\frac{1}{2g}[(2F_vG-GG_u-FG_v)x_u+(EG_v+FG_u-2FF_v)x_v]+NX$$

$$y_{uu}=\frac{1}{2g}[(GE_u+FE_v-2FF_u)y_u+(2EF_u-EE_v-FF_u)y_v]+LY$$

$$y_{uv}=\frac{1}{2g}[(GE_v-FG_u)y_u+(EG_u-FE_v)y_v]+MY$$

$$y_{vv}=\frac{1}{2g}[(2GE_v-GG_u-FG_v)y_u+(EG_v+FG_u-2FF_v)y_v]+NY$$

$$z_{uu}=\frac{1}{2g}[(GE_u+FE_v-2FF_u)z_u+(2EF_u-EE_v-FE_u)z_v]+LZ$$

$$z_{uv}=\frac{1}{2g}[(GE_v-FG_u)z_u+(EG_u-FE_v)z_v]+MZ$$

$$z_{vv}=\frac{1}{2g}[(2GF_v-GG_u-FG_v)z_u+(EG_v+FG_u-2FF_v)z_v]+NZ$$

〔例7〕试用 E、F、G；L、M、N 把万加滕公式表示出来。

（解）已知万加滕公式为

$$\boldsymbol{n}_{,k} = -g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i = -H_{,}{}^{i}{}_{k}\boldsymbol{r}_i$$

所以 $\quad H^i{}_{,k} = g^{ij}H_{jk} \quad (i,j,k=1,2)$

则 $\quad H^1{}_{,1} = \dfrac{1}{g}(GL-FM),\quad H^2{}_{,1} = \dfrac{1}{g}(-FL+EM)$

$$H^1{}_{,2} = \frac{1}{g}(GM-FN),\quad H^2{}_{,2} = \frac{1}{g}(-FM+EN)$$

类似例2，可以将万加滕公式的座标写为

$$X_u = \frac{1}{g}[(GL-FM)x_u + (EM-FL)x_v]$$

$$Y_u = \frac{1}{g}[(GL-FM)y_u + (EM-FL)y_v]$$

$$Z_u = \frac{1}{g}[(GL-FM)z_u + (EM-EL)z_v]$$

$$X_v = \frac{1}{g}[(GM-FN)x_u + (EN-FM)x_v]$$

$$Y_v = \frac{1}{g}[(GM-FN)y_u + (EN-FM)y_v]$$

$$Z_v = \frac{1}{g}[(GM-FN)z_u + (EN-FM)z_v]$$

§4·3 曲面的基本定理

在曲线论中，我们通过曲线的相伴三棱形（P；$\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}$）的运动规律$F$—$\boldsymbol{S}$公式，证明了在空间，只要给出满足 F—$\boldsymbol{S}$ 公式的系数 $\kappa=\kappa(s)>0$ $\chi=\chi(s)$ 是 C^1 类函数，则在空间中存

在曲线而且除位置不同外，唯一确定。它的相伴三棱形是（P; τ, ν, β），而且它的各点的曲率与挠率的值恰是给定的函数在该点的值。

我们可以把曲线论基本定理的想法推广到曲面论。利用曲面上的相伴三棱形 $\{\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n}\}$ 的微小移动的运动规律，即高斯公式和万加滕公式。当它们系数满足一定规律时所确定的曲面。当然，曲面上相伴三棱形是二独立变量的函数。而且在一般情形下，（P; $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{n}$）这个标架向量 $\boldsymbol{r}_i$ 也不一定是单位正交的。

为此，把高斯公式和万加滕公式看作是关于 $\boldsymbol{r}_i$ 及 $\boldsymbol{n}$ 的偏微分方程，首先求出它的可积条件。

【定理 3】已给曲面 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$，它的高斯和万加滕公式为

$$\boldsymbol{r}_{j,k}=\left\{{i \atop jk}\right\}\boldsymbol{r}_i+H_{jk}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}_{,k}=-g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i$$

则它们的可积条件为

$$\left\{{i \atop jk}\right\}_{,l}-\left\{{i \atop jl}\right\}_{,k}+\left\{{a \atop jk}\right\}\left\{{i \atop al}\right\}-\left\{{a \atop jl}\right\}\left\{{i \atop ak}\right\}$$
$$=H_{jk}H^i{}_{,l}-H_{jl}H^i{}_{,k} \qquad (4.25)$$

$$H_{jk,l}-H_{jl,k}+\left\{{a \atop jk}\right\}H_{al}-\left\{{a \atop jl}\right\}H_{ak}=0 \qquad (4.26)$$

（证明）首先把高斯公式就 u^l 进行偏微分，则得

$$\boldsymbol{r}_{j,k,l}=\left\{{i \atop jk}\right\}_{l}\boldsymbol{r}_i+\left\{{a \atop jk}\right\}\boldsymbol{r}_{a,l}+H_{jk,l}\boldsymbol{n}+H_{jk}\boldsymbol{n}_l$$

将高斯和万加滕公式代入上式则得

$$\boldsymbol{r}_{j,k,l}=\left[\left\{{i \atop jk}\right\}_{,l}+\left\{{a \atop jk}\right\}\left\{{i \atop al}\right\}-H_{jk}H^i{}_{,l}\right]\boldsymbol{r}_i$$

$$+[H_{jk,l}+\left\{\begin{matrix}a\\jk\end{matrix}\right\}H_{al}]n$$

由微分方程的可积条件知

$$r_{j,k,l}-r_{j,l,k}=0$$

又由 r_i, n线性无关性，则得两个方程可积条件为

$$\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}_{,l}-\left\{\begin{matrix}i\\jl\end{matrix}\right\}_{,k}+\left\{\begin{matrix}a\\jk\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}i\\al\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}a\\jl\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}i\\ak\end{matrix}\right\}$$

$$=H_{jk}H^i{}_{,l}-H_{jl}H^i{}_{,k}$$

$$H_{jk,l}-H_{jl,k}+\left\{\begin{matrix}a\\jk\end{matrix}\right\}H_{al}-\left\{\begin{matrix}a\\jl\end{matrix}\right\}H_{ak}=0$$

前者称为高斯方程，后者称为柯达奇方程.

【推论1】在曲面的正交网中，高斯和柯达奇方程，用 E, F, G; L, M, N 可表示为

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}=\frac{LN-M^2}{EG} \tag{4.27}$$

和

$$\begin{cases}\left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\dfrac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-N\dfrac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0\\ \\ \left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\dfrac{M}{\sqrt{G}}\right)_v-L\dfrac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\dfrac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0\end{cases} \tag{4.28}$$

〔证明〕取 $i,j,k=1,2$，并把 $g_{11}=E$，$g_{12}=g_{21}=F=0$（正交网），$g_{22}=G$；$H_{11}=L$，$H_{12}=H_{21}=M$，$H_{22}=N$等代入高斯，柯达奇方程中，整理便得上式. 它们就是在正交网中的高斯——柯达奇方程.

【推论2】曲面的高斯曲率，由曲面的第一基本量所确定，它是等距变换的不变量.

（证明） 从高斯方程

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}=\frac{LN-M^2}{EG}$$

可知，它的右边$\frac{LN-M^2}{EG}=K$是高斯曲率，而式左边只是第一基本量及其偏导数构成的关系式，由此可知，曲面的高斯曲率，只决定于它的第一基本量。因为 E、F、G 是等距变换的不变量。所以高斯曲率 K 也是等距变换的不变量。

这里我们利用高斯曲率，再给出可展曲面的判定条件。

【定理 4】 曲面是可展曲面的充分必要条件是高斯曲率恒为零。

（证明） 必要性：若曲面为可展曲面，则一定为直纹面，因而它的方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)\qquad(\boldsymbol{\tau}^2=1)$$

求导，则有

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{\rho}'+v\boldsymbol{\tau}',\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{\rho}''+v\boldsymbol{\tau}'',\quad \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{\tau}',\quad \boldsymbol{r}_{vv}=0$$

由 $N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}$ 可知，$N=0$，我们又知道

$$M=\frac{(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}')}{\sqrt{EG-F^2}}$$

因为曲面为可展曲面，又从直纹面为可展曲面的条件知$(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}')=0$，所以

$$M=\frac{(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}')}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

因为高斯曲率 $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$，已证得$N=M=0$，故$K\equiv0$。

充分性：即，证 $K\equiv0$ 的曲面为可展曲面。我们只讨论曲

面不是平面的情形．曲面是平面，定理显然成立．

因为 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=k_1\cdot k_2=0$ 即曲面上点是抛物点．因此渐近方向也是主方向、渐近线也是曲率线．这时对应的主曲率为0．可设 $k_2=0$．并不失一般性．

这时将§3,2的公式（3.7）写成

$$k_n(Edu+Fdv)-(Ldu+Mdv)=0$$

$$k_n(Fdu+Gdv)-(M\ du+Ndv)=0$$

将第一、第二基本量 $E,F,G;L,\ M,\ N$，换成 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，$\boldsymbol{n}_u$，$\boldsymbol{n}_v$ 的数积的形式．稍加整理，又可以写成

$$\boldsymbol{r}_u(k_nd\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{n})=0$$

$$\boldsymbol{r}_v(k_nd\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{n})=0$$

$$\boldsymbol{n}(k_nd\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{n})=0$$

即 $k_nd\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，$\boldsymbol{n}$ 同时垂直．即得：

$$d\boldsymbol{n}=-k_nd\boldsymbol{r} \tag{4.29}$$

由 $k_n=0$ 得 $d\boldsymbol{n}=0$．即 $\boldsymbol{n}$ 有确定方向．由此可知渐近曲线是平面曲线，而且平面与 Σ 沿渐近曲线相切．对每一条渐近曲线，Σ只有唯一的切平面．由此可见，Σ是一个单参平面族的包络面．因而曲面是可展曲面．

【定理5】（波涅（Bonnet）定理）若在单连通区域中给定两个参数 u^j 的函数（$j=1$、2）g_{jk} 和 H_{jk}，它们对于指标 j，k 对称，且 g_{jk}（恒正）和 H_{jk} 都满足高斯和柯达奇方程．则除空间的位置差别外，唯一存在一个，以 g_{jk} 和 H_{jk}为第一、第二基本量的曲面．

（证明）已给 g_{jk} 和 H_{jk} 是满足高斯—柯达奇方程的u^i的函数，以它为系数，则曲面相伴三棱形的运动微分方程组

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^k} = \Gamma^l{}_{jk}\boldsymbol{r}_l + H_{jk}\boldsymbol{n}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^k} = -g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i$$

由定理3可知它们可积．设它的解为 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n}$, 且当 $u^i = u^i_0$时，它的解 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(u^i_0)$，$\boldsymbol{r}_{i0} = \boldsymbol{r}_i(u^i_0)$，$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}(u^i_0)$ 满足初始条件：

$$\boldsymbol{r}_{j0}\cdot\boldsymbol{r}_{k0} = g_{jk}(u^i_0),\quad \boldsymbol{r}_{j0}\cdot\boldsymbol{n}_0 = 0,\quad \boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n}_0 = 1 \qquad (4.30)$$

现在将证，对任意的 u^i 值，该方程组的解 $\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{n}$ 之间也有

$$\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_k - g_{jk} = 0,\quad \boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{n} = 0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} - 1 = 0$$

的关系．为此，我们设

$$\begin{cases} A_{jk} = \boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_k - g_{jk} \\ A_j = \boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{n} \\ A = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} - 1 \end{cases}$$

显然它们都是 u^k 的函数，对 u^k 微分上面的方程组，并以(4.30)为初始条件，则得

$$\begin{aligned} d(A_{jk}) &= d(\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_k - g_{jk}) = d\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_j d\boldsymbol{r}_k - dg_{jk} \\ &= (\Gamma^i{}_{jl}du^l\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_j(\Gamma^i{}_{kl}du^l\boldsymbol{r}_i) - dg_{jk} \\ &\quad + (H_{jl}du^l\boldsymbol{n})\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_j(H_{kl}du^l\boldsymbol{n}) \\ &= \Gamma^i{}_{jl}du^l(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k - g_{ik}) + \Gamma^i{}_{kl}du^l(\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i - g_{ki}) \\ &\quad + (H_{jl}du^l\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{n} + H_{kl}du^l\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n}) \\ &\quad + \left(\Gamma^i{}_{jl}g_{ik} + \Gamma^i{}_{kl}g_{ki} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)du^l \end{aligned}$$

但 $g_{ij,l} = \Gamma^i{}_{jl}g_{ik} + \Gamma^i{}_{kl}g_{ki}$，所以最后一项为0，于是

$$d(A_{jk}) = d(\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k - g_{jk}) = \Gamma^i{}_{jl}du^l(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_k - g_{ik})$$

$$+\Gamma^{i}{}_{kl}du^{l}(r_k r_i - g_{ki})$$

$$+H_{jl}du^{l}r_k n + H_{kl}du^{l}r_j n$$

$$d(A) = d(nn-1) = 2ndn = -2g^{ij}H_{jk}du_j(r_k n)$$

$$d(A_i) = d(r_i n) = dr_i n + r_i dn$$

$$= \Gamma^{i}{}_{ij}du^{j}(r_k n) + H_{ij}du^{j}(nn)$$

$$-r_i g^{kj}H_{jk}du^{j}r_k$$

$$= \Gamma^{k}{}_{ij}du^{j}(r_k\cdot n) + H_{ij}du^{j}(nn-1)$$

它们是关于函数 $r_i r_k - g_{ik}$，$r_i\cdot n$及 $n\cdot n-1$ 的线性齐次微分方程组，它必有零解，即

$$r_i r_k - g_{ik} = 0,\quad r_k n = 0,\quad nn - 1 = 0$$

且当 $u^i = u_0^i$ 时满足条件

$$\begin{cases} r_{j0}\cdot r_{k0} - g_{jk}(u_0^i) = 0 \\ r_{j0}\cdot n_0 = 0 \\ n_0\cdot n_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

容易算得，第一、第二基本微分形式为

$$\varphi_1 = dr\cdot dr = (r_i du^i)(r_k du^k) = g_{ik}du^i du^k$$

$$\varphi_2 = -dn\cdot dr = (g^{ij}H_{jk}du^k r_i)\cdot(r_l du^l)$$

$$= H_{lk}du^l du^k$$

所以这个曲面的第一、二基本微分形式是以给定的 g_{ik}和 H_{ik} 为系数。

又从高斯公式 $r_{j,k}$ 对指 j,k 的对称性可知

$$\frac{\partial r_j}{\partial u^k} = \frac{\partial r_k}{\partial u^j}$$

从而，由 $r = (r_0) + \int r_i du^i$

可得曲面的方程

$$r = r(u^1,\ u^2)$$

而这个解，由初值条件 $(r)_0$，$(r_i)_0$，$(n)_0$ 唯一确定。且任意点的三个方向，可以经过运动与 $(r_i)_0$，$(n)_0$ 的长度和内积相等。从而证明了波涅定理。

§5 曲面上向量的列维—齐维他(Levi-Civita)平行移动

所谓列维—齐维他平行移动，实际上是把空间或平面上向量平行移动的概念推广到一般曲面上。

在二维、三维欧氏空间中向量的平行移动概念我们是熟悉的，如把始点为 M 的向量 v 平移到始点为 M' 的向量 v'，则在笛卡儿坐标系中，它们的分量是相同的，而且这种平移有下面的基本性质：

（1）保持线性关系：

如果在 M 点的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 分别与 M' 点的向量 $\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}'$ 平行，则对任何系数 λ，μ，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与向量 $\lambda\boldsymbol{a}'+\mu\boldsymbol{b}'$ 也彼此平行。

（2）保持内积：

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}'$ 平行，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}'$ 平行，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$$

即然，列维—齐维他平移是平面上或空间的向量平移在曲面上的推广。我们也希望保持这种平移基本特征，为此我们作如下讨论。

设在曲面上给出一条曲线 $L: u^i=u^i(t)$，在 $M_0(t_0)$ 点给出 Σ 的切向量为 v^i，而在 M_0 点邻近的 L 上点 $M(t+\Delta t)$ 点，Σ 的切向量为 v^i+dv^i。而 v^i+dv^i 在 M_0 点切平面上正投影设为 $v^i+\delta v^i$、现在定义 v^i 沿曲线 L 的列维—齐维他的平行移动。

【定义】在曲线L上M点，为曲面Σ的切向量v^i+dv^i在M_0点的切平面上的正投影等于在M_0点Σ的切向量v^i时，则说v^i+dv^i与v^i沿曲线L是**列维一齐维他平行的**。

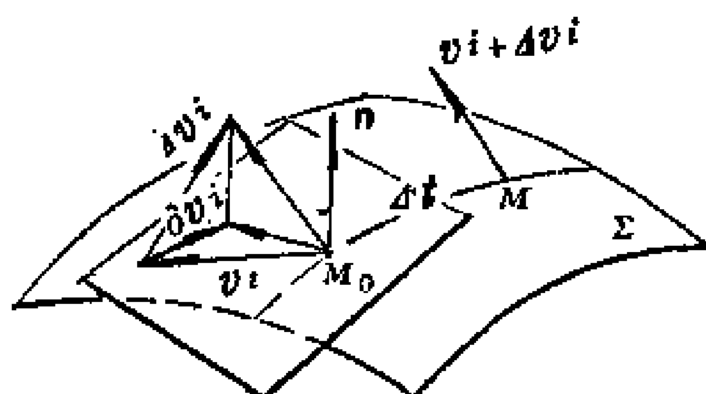


图3—25

一般情况下，v^i+dv^i在M_0点切平面上的正投影$v^i+\delta v^i$不一定恰好是v^i，按平行的定义可知，v^i+dv^i沿曲线L为列维一齐维他平行的充分必要条件为$\delta v^i=0$。δv^i称为**沿曲线L的绝对微分**。因此v^i+dv^i与v^i在列维一齐维他意义下平行的充分必要条件也是v^i的绝对微分$\delta v^i=0$。

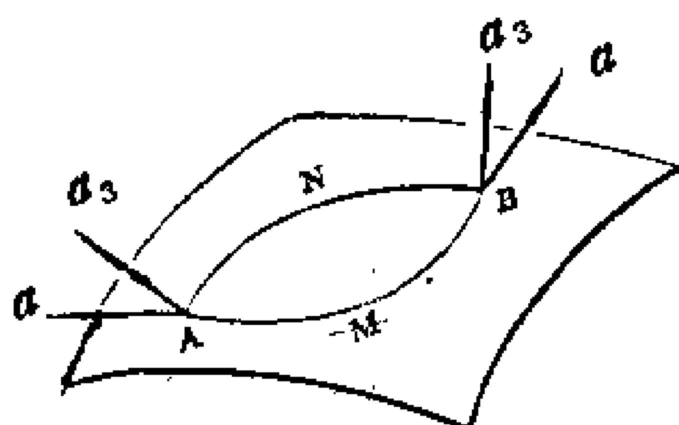


图3—26

【定理1】 曲面Σ的切向量v^i沿曲线L：$u^i=u^i(t)$为列维一齐维他平行移动的充分必要条件为

$$\delta v^i=dv^i+\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}v_j du^k=0 \tag{5.1}$$

（证明）设M_0点在L上，$\boldsymbol{r}(u^i)$的切向量为$v^i\boldsymbol{r}_i$，又在邻近点$\boldsymbol{r}(u^i+du^i)=\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$的切向量为

$$(v^i+dv^i)(\boldsymbol{r}_i+d\boldsymbol{r}_i)=v^i\boldsymbol{r}_i+dv^i\boldsymbol{r}_i+v^id\boldsymbol{r}_i+dv^id\boldsymbol{r}^i$$

我们只要精确到一阶无穷小，而把高阶无穷小项$dv^id\boldsymbol{r}_i$略去，根据总和指标规定，同一式子不同项总和指标用不同字母，以示区别，所以将上式中的$v^id\boldsymbol{r}_i$的指标写为j于是得

$$(v^i + dv^i)(\boldsymbol{r}_i + d\boldsymbol{r}_i) = v^i\boldsymbol{r}_i + dv^i\boldsymbol{r}_i + v^j d\boldsymbol{r}_j$$

将 $d\boldsymbol{r}_j$ 用高斯公式

$$d\boldsymbol{r}_j = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} du^k \boldsymbol{r}_i + H_{jk} du^k \boldsymbol{n}$$

代入，得到在点 $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ 的切向量在 M_0 点标架中的分解式

$$v^i\boldsymbol{r}_i + (dv^i + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} v^j du^k)\boldsymbol{r}_i + H_{jk} v^j du^k \boldsymbol{n}$$

而它在 M_0 点切平面上的正投影为上式中的 $H_{jk}v^j du^k \boldsymbol{n} = 0$ 即

$$v^i\boldsymbol{r}_i + \delta u^i\boldsymbol{r}_i = v^i\boldsymbol{r}_i + (dv^i + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} v^j du^k)\boldsymbol{r}_i$$

由上式可得

$$\delta v^i = dv^i + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} u^j du^k$$

因此由平行移动的定义可知，v^i 沿曲线 L 平行移动的充分必要条件为

$$\delta v^i = dv^i + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} v^j du^k = 0$$

或者写成：

$$\frac{\delta v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} v^j \frac{du^k}{dt} = 0$$

【推论 1】 切向量 v^i 在列维—齐维他平行移动下，长度不变。

（证明） 设切向量 v^i 的长度为 $(v)^2 = g_{ij}v^i v^j$，证明其长度不变，只要证明，对此式微分为 0 即可。因此，就参数 t 微分上式：

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(g_{ij}v^i v^j)$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{dt} v^i v^j + g_{ij}\frac{dv^i}{dt}v^j + g_{ij}v^i \frac{dv^j}{dt}$$

为计算方便，将第二项总和指标 i 换成 a，将第三项总和指标 j 换成 b，因此上式等号右边可写成：

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t^k}\ \frac{du^k}{\partial t}\ v^i v^j + g_{aj}\frac{dv^a}{dt}v^j + g_{ib}\frac{dv^b}{dt}v^i$$

其中 $$\frac{dv^a}{dt} = -\begin{Bmatrix} a \\ ik \end{Bmatrix}\frac{du^k}{dt}v^i$$

$$\frac{dv^b}{at} = -\begin{Bmatrix} b \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^k}{dt}v^j$$

将此二式代入上式得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\ \frac{du^k}{dt}\ v^i v^j - g_{aj}\begin{Bmatrix} b \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^k}{dt}v^j v^i - g_{ib}\ \begin{Bmatrix} b \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du_k}{dt}v^j v^i$$

$$= \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - g_{aj}\begin{Bmatrix} a \\ ik \end{Bmatrix} - g_{ib}\begin{Bmatrix} b \\ jk \end{Bmatrix}\right]\frac{du^k}{dt}v^i v^j$$

将$\begin{Bmatrix} a \\ ik \end{Bmatrix}$与$\begin{Bmatrix} b \\ jk \end{Bmatrix}$用$\frac{1}{2}g^{ia}(g_{ij,k} - g_{ik,j} + g_{jk,a})$

分别代入得

$$\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\delta g_{kj}}{\delta u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)\right]\cdot\frac{du^k}{dt}v^i v^j$$

$$= \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right]\frac{du^k}{dt}v^i v^j = 0$$

即在列维一齐维他平行移动下，v^i 的长度不变。

【推论 2】设二向量 $\{a^i\}$、$\{b^i\}$ 的夹角为 θ，θ 在列维一齐维他平行移动下不变。

（证明）设二向量的坐标为 a^i、b^i，它们沿曲线 $u^i = u^i(t)$ 做列维一齐维他平行移动，其夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{g_{jk}a^j b^k}{|a^i|\ |b^i|}$$

由定义可知有

$$\frac{\delta a^i}{dt}=0\qquad\frac{\delta b^i}{dt}=0$$

又
$$\frac{d}{dt}(\cos\theta)=\frac{1}{|a^i|\ |b^i|}\left(g_{jk}\frac{da^j}{dt}b^k+g_{jk}\frac{db^k}{dt}\right)$$
$$=\frac{1}{|a^i|\ |b^i|}\left(g_{jk}\frac{\delta a^j}{dt}b^k+g_{jk}\frac{\delta b^k}{dt}a^j\right)$$
$$=0$$

因此 $\cos\theta$ 等于常数，即得在列维一齐维他平行移动下角度不变。

又设在曲面Σ上给出一曲线 $u^i=u^i(t)$，在曲线上各点作曲面Σ的切平面，则产生单参平面族，它存在一个包络曲面，这个包络曲面与曲面Σ沿曲线L相切，显然曲线L可随单参平面族展开到平面上。

现在设沿曲线L给出列维一齐维他意义下的平行向量为$v^i(t)$。因此，它也是沿曲线 L 的单参平面族的包络上的平行向量。因为列维一齐维他意义下的平行移动是决定于量$\left\{{i \atop jk}\right\}$，而它是仅由第一基本量所确定的。因此，曲面上沿曲线列维一齐维他平行性在曲面的扭曲变形（不折裂、不伸缩）下不变。即在曲面扭曲变形后，平行向量还变为平行向量。

总之，对于已知曲面Σ，沿它上已给曲线L在列维一齐维他意义下的平行向量，它也是沿曲线L的单参切平面族的包络面（可展曲面）上沿曲线L的平行向量。当包络面展开到平面上时，则这个列维一齐维他意义下平行的向量变为沿平面曲线

L 在平面上的普通意义下的平行向量。这个操作过程叫沿曲线L的展开。从而得到如下推论。

【推论3】在平面上，沿曲线作列维—齐维他平移的结果和向量的普通平移的结果是一致的。

【推论4】由定义可知，若二曲面Σ_1和Σ_2沿一条曲线L相切，则V向量在 Σ_1 上沿L的列维—齐维他平移和在 Σ_2 上沿 L 的列维—齐维他平移结果相同。

【推论5】当曲面Σ上一条曲线L 在平面 π上展开时，在Σ上沿曲线L的列维—齐维他平移的向量化为在平面 π 上普通意义下的平行向量。

§6 测地线

我们知道过曲面上两已知点的曲线有无限多条，其中必有一条比其它都短，利用它可以度量两点间的距离，把这种曲线称为测地线，为了避免用变分法，我们先从测地曲率的讨论开始，通过它再来定义测地线。

§6.1 测地曲率

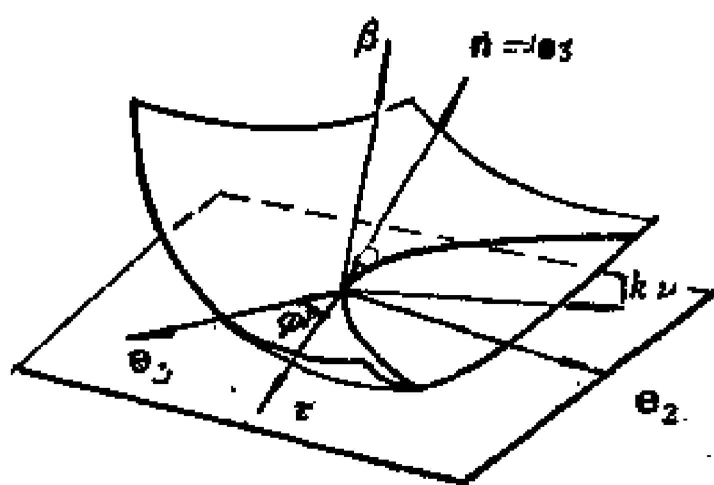
【定义】在曲面 Σ上，曲线C在点P的曲率向量 $k\mathbf{v}$，在曲面Σ上点P的切平面上的投影值，称为曲线C在点P的测地曲率，用符号 k_g 表示。

【定理1】曲面Σ上曲线 C：$u^i=u^i(s)$ 在点P的测地曲率k_g为

$$k_g=\pm\sqrt{g}\begin{vmatrix} u^{1\prime} & u^{2\prime} \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix} \tag{6·1}$$

其中 $$a^i=u^{i\prime\prime}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}u^{j\prime}\ u^{k\prime}\quad(i=1,2)$$

（证明）设曲面Σ上曲线C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^i(s))$在点$P$的相伴三棱形为$\{\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\beta}\}$，而在点$P$处曲面$\Sigma$的相伴三棱形为$\{\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n}\}$，设$\boldsymbol{\nu}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为$\theta$，$\bar{\boldsymbol{n}}$为$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{\tau}$的外积。即：



$$\bar{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}'$$

图3—27

根据二向量外积的性质，显然它在Σ上点P的切平面上。又$\bar{\boldsymbol{n}}\perp\boldsymbol{\tau}$，所以$\bar{\boldsymbol{n}}$在垂直于$\boldsymbol{\tau}$的$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{\nu}$所决定的平面上，按测地曲率的定义，则

$$k_g=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\cdot\bar{\boldsymbol{n}}=\kappa\boldsymbol{\nu}\cdot\bar{\boldsymbol{n}}$$

$$=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}''=(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')$$

但是
$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_iu^{i\prime}$$

$$\boldsymbol{r}''=\left(u^{i\prime\prime}+\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}u^{j\prime}u^{k\prime}\right)\boldsymbol{r}_i+H_{jk}u^{j\prime}u^{k\prime}\boldsymbol{n}$$

$$=\boldsymbol{r}_ia^i+H_{jk}u^{j\prime}u^{k\prime}\boldsymbol{n}\qquad\left(\text{其中}a^i=u^{i\prime\prime}+\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}u^{j\prime}u^{k\prime}\right)$$

这里须注意：$\boldsymbol{r}''$是对参数s求二阶偏导，中间变量为u^i，然后按高斯公式代入上式，则得

$$k_g=(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\ \ (u^{1\prime}a^2-u^{2\prime}a^1)$$

$$=\pm\sqrt{g}\begin{vmatrix}u^{1\prime}&u^{2\prime}\\a^1&a^2\end{vmatrix}$$

〔例1〕试证明曲面Σ上曲线C在点P的曲率κ，法曲率k_n和测地曲率k_g之间有

$$\kappa^2=k_n^2+k_g^2\qquad(6.2)$$

(解) 已知法曲率 $k_n = \kappa\cos\theta$

而测地曲率为

$$k_g = \boldsymbol{r}'' \cdot \bar{n} = \kappa \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}) = \kappa(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{n} = \kappa(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})$$

$$= \kappa\cos(90° - \theta) = \pm\kappa\sin\theta$$

所以 $\quad k^2_g + k^2_n = k^2\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta = \kappa^2$

〔例2〕试证，如果二曲面 Σ_1，Σ_2 沿曲线 C 相切，适当调整法向量 $\boldsymbol{n}$ 使之方向相同，则曲线 C 在 Σ_1，Σ_2 上的测地曲率 k_g 值相等。

(解) 由测地曲率的定义可知

$$k_g = \boldsymbol{r}''\bar{n} = \kappa(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})$$

从上式看到 k_g 仅与曲线 C 的曲率 κ，付法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和曲面在该点的法向量 $\boldsymbol{n}$ 有关。这里 κ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 仅与曲线 C 有关而与它所在的曲面无关，又对 $\boldsymbol{n}$ 调整后，使沿 C 各点相等，因此，从上面计算公式可知 C 在 Σ_1 与 Σ_2 上的测地曲率相等。

§6.2 测地线

现在我们研究测地线及其性质。

【定义】曲面上测地曲率 $k_g \equiv 0$ 的曲线叫作测地线。从测地曲率的定义

$$k_g = \kappa(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})$$

可以看出，$k_g \equiv 0 = \kappa(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})$，若 $\kappa = 0$，则曲线 C 是直线，若 $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，则曲线 C 的密切平面与曲面的切面垂直，那 $\boldsymbol{\nu} = \pm\boldsymbol{n}$。

现在，我们求测地线的微分方程。

【定理2】曲面 Σ：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ 上的测地线 C：$u^i = u^i(s)$ 的微分方程为

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \frac{du^j}{ds} \cdot \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (i,\ j,\ k = 1, 2)$$

（证明）根据前节测地曲率 κ_g 的公式

$$k_g = \pm\sqrt{g}\begin{vmatrix} u^{1\prime} & u^{2\prime} \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}$$

而 $a^i = u^{i\prime\prime} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} u^{j\prime} u^{k\prime}$

因为C是测地线，根据测地线定义可知

$$k_g = \pm\sqrt{g}\,(u^{1\prime}a^2 - a^1 u^{2\prime}) = 0$$

因为$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}$ 是第一基本微分形式的判别式，所以 $\sqrt{g} \neq 0$，又 $u^{i\prime} = \dfrac{du^i}{ds}$ 是曲线的切向量也不能为零，因此只能 $a^i = 0$。因为 $u^{1\prime}$，$u^{2\prime}$ 是各自独立的 自 变 数，若 $u^{1\prime}/u^{2\prime} = a^1/a^2$，则 u^1，u^2 是相关的，从而

$$a^i = u^{i\prime\prime} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} u^{j\prime} u^{k\prime} = 0$$

即测地线的微分方程为

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\,\frac{du^k}{ds} = 0 \tag{6.3}$$

当按 i、j、k 展开后得

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^1{}_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^1{}_{12}\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + \Gamma^1{}_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \tag{6.4}$$

$$\frac{dv^2}{ds^2} + \Gamma^2{}_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2{}_{12}\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + \Gamma^2{}_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \tag{6.5}$$

〔例 3〕在正交网中，测地线方程可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi-\frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right)\\&\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi,\quad\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(6.6)$$

（解）因为 $\boldsymbol{r}^2_u=E$，$\boldsymbol{r}^2_v=G$，如果用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别表示u曲线与 v 曲线方向上的单位向量，显然可得：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$$

设 τ为单位切向量，用 φ表示从 $\boldsymbol{r}_u$ 到 τ 的正向夹角，φ是 s 的函数，所以

$$\tau=\boldsymbol{e}_1\cos\varphi+\boldsymbol{e}_2\sin\varphi$$

又因 $$\tau=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_u\frac{dv}{ds}$$

$$=\sqrt{E}\,\boldsymbol{e}_1\frac{du}{ds}+\sqrt{G}\,\boldsymbol{e}_2\frac{dv}{ds}$$

上述二式相比较可得：

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi,\quad\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi$$

为了求得在正交坐标系中，测地线的微分方程，我们先求得在正交网中的测地曲率．

由前面知道测地曲率为

$$\kappa_g=\sqrt{g}\begin{vmatrix}u^{1\prime}&u^{2\prime}\\a^1&a^2\end{vmatrix}=\sqrt{g}\,|\,u^{1\prime}a^2-u^{2\prime}a^1\,|$$

$$=\sqrt{g}\,\left|u^{1\prime}\left(u^{2\prime\prime}+\begin{Bmatrix}2\\jk\end{Bmatrix}u^{j\prime}u^{k\prime}\right)-u^{2\prime}\left(u^{1\prime\prime}+\begin{Bmatrix}1\\jk\end{Bmatrix}u^{j\prime}u^{k\prime}\right)\right|$$

将此式按 $j,k=1,2$ 展开得

$$
\begin{aligned}
k_g = \sqrt{g}\ \Big\{ & \frac{du}{ds}\left(\frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right. \\
& \left. + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\ \frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right) \\
& - \frac{dv}{ds}\left(\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right. \\
& \left. + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\ \frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right) \Big\}
\end{aligned}
$$

因为坐标网是正交的，则由本章§4〔例5〕已知

$$
\Gamma^1_{11} = \frac{E_u}{2E},\quad \Gamma^1_{12} = \frac{E_v}{2E},\quad \Gamma^1_{22} = -\frac{G_u}{2E}
$$

$$
\Gamma^2_{11} = -\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G},\quad \Gamma^2_{22} = \frac{G_v}{2G}
$$

将此式及$\frac{du}{ds}$，$\frac{dv}{ds}$表示式代入，详加整理可得：

$$
k_g = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi - \frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right)
$$

此式又可以写成：

$$
\begin{aligned}
k_g = & \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\ \frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\varphi \\
& + \frac{1}{2\sqrt{E}}\ \frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\varphi
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

这就是计算测地曲率的刘维尔(Liouviue) 公式.

公式中只与第一基本量 E、F、G 有关，所以测地曲率k_g是曲面的内在几何量，由此可知在正交网中的测地线方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi-\dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right) \\
\dfrac{du}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi \\
\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi
\end{cases}
\tag{6.8}
$$

【推论】通 过曲面上的每个点P，沿任意方向都存在一条测地线。

（证明）

$$
\frac{d^2u^i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\ \frac{du^k}{ds}=0
$$

是一个二阶常微分方程组，在初始条件

$$
s=0,\quad u^i=u^i_0,\quad \frac{du^i}{ds}=\eta^i
$$

时，根据微分方程理论里的存在定理可知，该方程就有一个唯一的解．也就是说，过一点及过这点的一个已知单位切向量，可以引出唯一的一条测地线 $u^i=u^i(s)$．

【推论 2】测地线是它的切向量在列维—齐维他意义下自身平行的曲线．

（证明）设已给曲线C：$u^i=u^i(s)$， 如果它是测地线，则测地曲率 $k_g\equiv 0$，即 $a^i=0$．所以得

$$
\frac{d^2u^i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\ \frac{du^k}{ds}=0=\frac{\delta v^i}{ds}
$$

$$
=\frac{dv^i}{ds}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}v^j\ \frac{du^k}{ds}
$$

即切向量 v^i 的绝对微分为0，所以切向量 v^i 沿 C在列维—齐维他意义下平行．

反之，如果沿曲线 C 切向量 v^i 在列维—齐维他意义下平行，则必有 $\frac{\delta v^i}{ds}\equiv 0$，即

$$\frac{\delta v^i}{ds}=\frac{dv^i}{ds}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} v^j \frac{du^k}{ds}=0$$

所以 $$\frac{\delta v^i}{ds}=\frac{d^2u^i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0$$

而上式，即

$$a^i=\frac{d^2u^i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0$$

因此

$$k_g\equiv \pm\sqrt{g}\begin{vmatrix} u'^1 & u'^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}=0$$

即 $$k_g\equiv 0$$

所以曲线 C 是测地线。

【定义】在曲面 Σ 上过一点 P 的非直线的测地线 C：$u^i=u^i(s)$，以单位切向量 $\tau=\frac{du^i}{ds}r_i$ 为初始方向。我们称这条测地线 C 在 P 点的挠率为曲面 Σ 在 P 点关于 τ 方向的测地挠率。用 τ_g 表示。

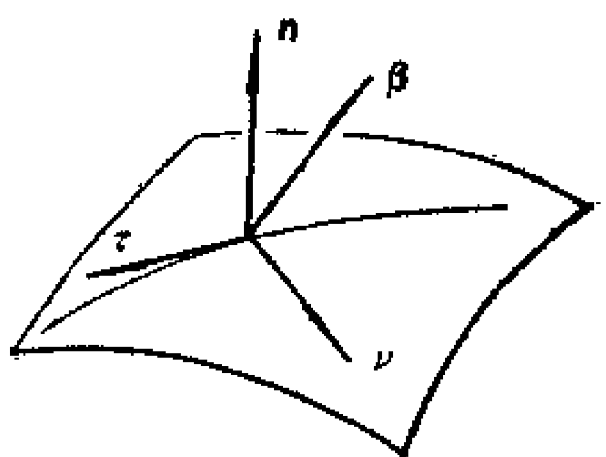


图3—28

【定理 3】在 Σ 上过 $P(u^i)$ 的非直线测地线 C，在该点沿 τ 方向的测地挠率

$$\tau_g=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 & -\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} & \left(\frac{du}{ds}\right)^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}$$

（证明）由曲线 $c: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 的 F-S 公式可知

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=-\kappa\boldsymbol{\tau}+\chi\boldsymbol{\beta}$$

将等式两边与 $\boldsymbol{\beta}$ 作内积可得

$$\chi=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\boldsymbol{\beta}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{r})=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\ \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{r}\right)$$

由测地线挠率的定义可知

$$\tau_g=\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},\ \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{n}\right)$$

又因 $\quad\dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\boldsymbol{n}_u\dfrac{du}{ds}+\boldsymbol{n}_v\dfrac{dv}{ds},\quad \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{dv}{ds}$

把它们代入上式，作混合积，于是

$$\tau_g=(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{r}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\Big[(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{r}_v)$$
$$+(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_v,\boldsymbol{r}_u)\Big]\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_v,\boldsymbol{r}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

因为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$，利用拉格朗日恒等式，经计算可得：

$$\tau_g=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 & -\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} & \left(\frac{du}{ds}\right)^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}\tag{6.9}$$

若上式右端等于0，则它恰是曲率线微分方程，由此可得：

【定理4】曲面上一条曲线C为曲率线的充要条件是在曲线C的每点处，关于它的切线方向的测地挠率为0。

下面我们考虑曲面上的测地线所构成的曲线坐标网。

【定义】曲面上的一个坐标曲线网，其中一族是测地线，另一族是这族测地线的正交轨线，或叫**测地平行线**，称这种坐标曲线网为**半测地坐标网**。

〔例4〕平面上的极坐标即是半测地坐标网。

（证明）它的一族坐标曲线是从原点出发的射线，这是平面上的测地线，另一族坐标曲线是以原点为心的同心圆，它们是上述测地线的正交轨线．因此也可以把这种半测地坐标网看成是平面上极坐标网的一个推广．

事实上，过曲面上曲线C的每一点，都存在唯一的一条测地线与C垂直，由此可以得到与C正交的测地曲线族，然后再作这一族测地线的正交轨线，它必包括给定的测地线，这样两族曲线就构成曲面Σ上的半测地网，显然，它是正交网。

【推论3】在曲面上的半测地坐标网中，第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = du^2 + G dv^2$$

（证明）因为半测地坐标网是正交网，所以在这个网中$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = F = 0$，因面曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = E du^2 + G dv^2$$

设u-曲线是测地线，则v曲线为测地平行线。u曲线应当满足测地线方程。我们从正交网情况下的测地线方程得到

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} = 0$$

因而　　$E_v = 0$

所以　　$E = E(u)$，　$E(u) > 0$

说明 E只是 u的函数，与 v无关。

当取 $\int E(u)\,du = \bar{u}$ 时，则 $E(u) = 1$。曲面的第一基本微分形式变为

$$\varphi_1 = d\bar{u}^2 + G(u, v)\ dv^2 \tag{6·10}$$

【推论 4】在连接曲面Σ上二定点的曲线中，测地线是最短线（或叫短程线）。

（证明）在曲面Σ上引入半测地坐标网。u-坐标曲线是测地线，设过u 上任意两点$A(u_1, v_1)$，$B(u_2, v_0)$ 引曲线。由前面性质可知，在这个坐标网中，曲面的第一基本微分形式为

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

所以连接两点A，B的曲线弧长为

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_{u1}^{u2} \sqrt{du^2 + G dv^2}$$

$$= \int_{u1}^{u2} \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du$$

如果使S为最小值，显然必有 $dv = 0$。这时$dv = 0$，而 $du \neq 0$它确定了u曲线。因为 u曲线是测地线，所以连接 A、B两点的曲线之中以测地线为最短线。

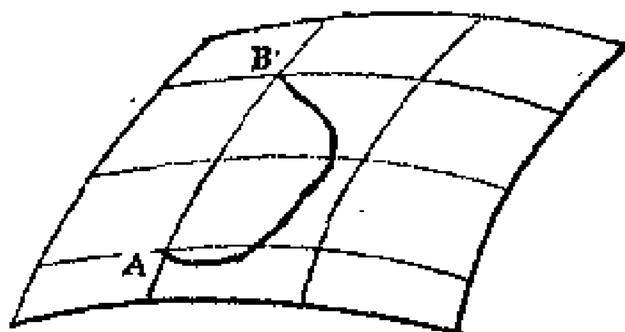


图3—29

需要注意，我们这里所指出的测地线是连结两点之间的最短线，是在局部范围而言的。而在一般情况下，这个结论是不成立的。如半径为R的球面上的大圆弧必为测地线。但当大圆弧 AB的长度 $>\pi R$时，AB连线就不是最短的了。

〔例 5〕试证在曲面上正交网中，两条测地线的交角 φ满足

$$\frac{d\varphi}{dv}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \tag{6·11}$$

（解）设二测地线 c_1、c_2 的交角为 φ，且 c_1 为 u曲线，则此正交网构成半测地坐标网。这时测地线方程应为

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi-\frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right),$$

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi$$

$$\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi$$

将上面的后二式代入第一式得

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(E_v\frac{du}{ds}-G_u\frac{dv}{ds}\right),$$

或

$$d\varphi=\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v du-G_u dv)$$

因为在半测地坐标网中，已知 $E=1$，则上式又变为

$$d\varphi=-\frac{1}{2\sqrt{G}}G_u dv$$

所以 $$\frac{d\varphi}{dv}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\left[(G)^2\right]_u=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

§7 常用率曲面

我们曾讨论过曲面的高斯曲率 K 只与曲面的第一基本量有关，因而对于两个互为扭曲、贴合的曲面，在对应点必有相等的高斯曲率，也就是说，对于两个曲面在对应点的高斯曲率相等是它们贴合的必要条件。相反，若两个曲面的点之间有一种一一对应，使二曲面在对应点有相等的高斯曲率，这两个曲面未必互相贴合，也就是说，在对应点高斯曲率相等不是两曲面互相贴合的充分条件。但是我们可以证明具有相同的常数高斯曲率曲面是可以互相贴合的。

【定义】如果一个曲面Σ，它上面各点的高斯曲率 K是常数，把这种曲面称为**常曲率曲面**。

【定理 1】设常曲率曲面的高斯曲率为 K，如果：

(i) $K=\dfrac{1}{a^2}>0$，则第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+a^2\sin^2\frac{u}{a}dv^2 \tag{7·1}$$

(ii) $K=-\dfrac{1}{a^2}$，则第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+a^2\operatorname{sh}^2\frac{u}{a}dv^2 \tag{7·2}$$

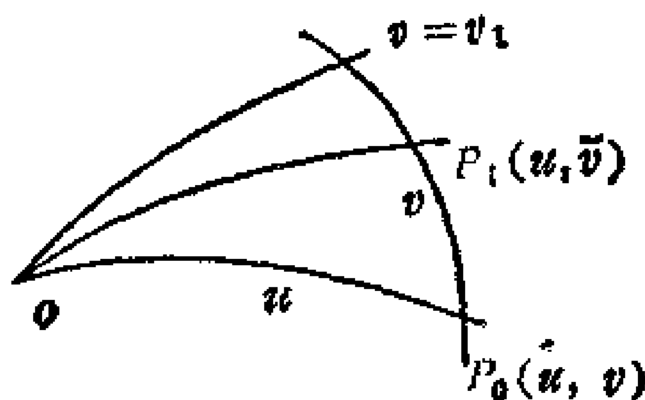
(iii) $K=0$，则第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+u^2dv^2 \tag{7·3}$$

(证明) 为证明方便，我们在曲面上引进测地极坐标网，即在Σ上取一定点O，过O沿各方向引测地线族。设它为u曲线，与u曲线正交的曲线族为v曲线。u 表示测地线的弧长，而 v表示

以 u = 常数为半径的点的轨迹。称为测地圆。

对于 $v=0$ 和 $v=v_1$ 两测地线间所夹 v 曲线的弧长为



$$\overset{\frown}{P_0P_1}=\int_0^v\sqrt{G(u,\bar{v})}\,d\bar{v}$$

图3—30

当 $u\longrightarrow 0$ 时，即当 u 很小时，可以把测地线弧 $\overset{\frown}{P_0P_1}$ 看作圆弧（图 3 —30），即当 $u\to 0$ 时，$\dfrac{\overset{\frown}{P_0P_1}}{u}\longrightarrow v$。另外我们又可以看到，在 O 点，曲线 u 变成一点，因而在 O 点 $G(0,v)=0$，由此我们可以得到

$$v=\lim_{u\to 0}\frac{\int_0^v\sqrt{G(u,v)}\,dv}{u}$$

$$=\int_0^v\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{G(u,v)}-\sqrt{G(0,v)}}{u}\,dv$$

$$=\int_0^v\left[(\sqrt{G})_u\right]_{u=0}dv$$

关于 v 微分，得 $[(\sqrt{G(u,v)})_u]_{u=0}=1$。

这样曲面 Σ 的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+G(u,v)\,dv^2$$

而我们又得到测地极坐标所满足的两个条件：

$$G(0,v)=0\qquad\left[\frac{\partial\sqrt{G(u,v)}}{\partial u}\right]_{u=0}=1\tag{7·3}$$

这里 u 表示极径，而 v 表示极角。

在这个测地极坐标系中，因为是正交的，又 $E=1$ 所以克

利斯多夫记号

$$\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}G_u,\quad \left\{\begin{matrix}2\\22\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2G}G_v,\quad \left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2G}G_u$$

其他均为0，因此高斯方程

$$K=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]$$

变为 $$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} \tag{7·4}$$

按偏微分方程通解公式，分三种情形来计算。

(i) 当 $K=\frac{1}{a^2}>0$ 时，

由高斯方程得

$$\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

即 $$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}+\frac{1}{a^2}\sqrt{G}=0$$

从通解公式得

$$\sqrt{G}=f(v)\cos\frac{u}{a}+g(v)\sin\frac{u}{a} \tag{7·5}$$

因为 $G(o,v)=0,\quad \left[\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=o}=1$

所以 $f(v)=0,\quad g(v)=a$

则 $\sqrt{G}=a\sin\frac{u}{a}$

从而 $\varphi_1=du^2+a^2\sin^2\frac{u}{a}dv^2$

(ii) 当 $K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时

由高斯方程得

$$-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

即 $$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}-\frac{1}{a^2}\sqrt{G}=0$$

从通解公式得

$$\sqrt{G}=f(v)\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}+g(v)\,\mathrm{sh}\frac{u}{a} \tag{7·6}$$

因为 $G(0,v)=0$，$\left[\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0}=1$

所以 $f(v)=0 \quad g(v)=a$

即 $$\sqrt{G}=a\,\mathrm{sh}\frac{u}{a}$$

从而 $$\varphi_1=du^2+a^2\mathrm{sh}^2\frac{u}{a}dv^2 \tag{7·7}$$

(iii) 当 $K=0$ 时，则高斯方程为

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$$

由通解公式得

$$\sqrt{G}=f(v)u+g(v) \tag{7.8}$$

因为 $G(0,v)=0$，$\left[\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0}=1$

所以 $f(v)=1$， $g(v)=0$

即 $\sqrt{G}=u$

从而有 $$\varphi_1=du^2+u^2dv^2 \tag{7·9}$$

由上面可知，经过适当的参数选择，具有相同的常数的高斯曲率曲面，有相同的第一基本微分形式。从而证明了这类曲面是等距等价。

〔例 1〕已给 yz 面上曲线 $C: z=f(y)$，$y\geqslant 0$，以 oz 轴为旋转轴的旋转曲面Σ，当

(i) $K=\frac{1}{a^2}>0$ 时，Σ为球面。

(ii) $K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时，Σ为拟球面。

(iii) $K=0$ 时，Σ为平面。

〔解〕已知旋转曲面M是由曲线

$$c: z=f(y), \quad y\geqslant 0$$

绕轴旋转而成。因此，它的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ f(\rho)\} \quad \rho\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

它的第一基本微形式为

$$\varphi_1=(1+f'^2)d\rho^2+\rho^2 d\theta^2$$

由于 $G=\rho^2>0$，在讨论曲面Σ的性质时，我们总令$\rho>0$。Σ的第二基本微分形式为

$$\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(f''d\rho^2+\rho f'd\theta^2)$$

于是Σ的高斯曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{f'f''}{\rho(1+f'^2)^2} \tag{7·10}$$

现在令 K为常数并把（7.10）式改写为

$$-K\rho d\rho=-\frac{f'df'}{(1+f'^2)^2}$$

积分得

$$\frac{1}{1+f'^2}=C-K\rho^2$$

解出 f' 得

$$f'=\pm\sqrt{\frac{1-C+K\rho^2}{C-K\rho^2}}$$

所以产生旋转曲面Σ的平面曲线C的方程为

$$z=\int\pm\sqrt{\frac{1-C+Ky^2}{C-Ky^2}}\,dy \qquad (7\cdot11)$$

这里C是积分常数，它的值可以任意选择并不影响Σ的形状。

（1）令 $K=\frac{1}{a^2}>0$ $(a>0)$ 则曲线C的方程（7.11）

化为

$$z=\int\pm\sqrt{\frac{a^2(1-c)+y^2}{a^2c-y^2}}\,dy \qquad (7\cdot12)$$

显然C必须大于0，否则式中根号里的函数对于一切正值 y 都是负的。令 $c=b^2$，$(b>0)$，则（7.12）式变为

$$z=\int\pm\sqrt{\frac{a^2(1-b^2)+y^2}{a^2b^2-y^2}}\,dy \qquad (7\cdot13)$$

(i) $b^2=1$，此时(7.13)成为

$$z=\int\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{a^2-y^2}}$$

或者 $\qquad z=\mp\sqrt{a^2-y^2}+z_0$

即 $\qquad y^2+(z-z_0)^2=a^2$

即曲面Σ是半径为 a的球面。

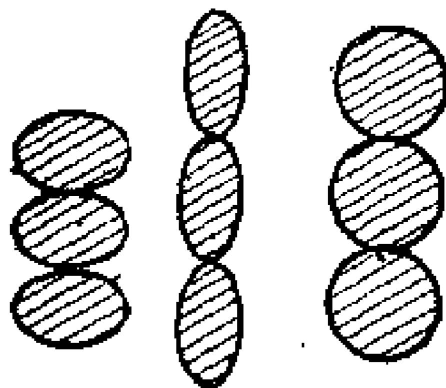


图3—31

(ii) $0<b^2<1$，此时从（7.13）式可知

$$y\leqslant ab$$

当 $y=ab$ 时，曲线 C 的切线平行于 oz 轴，当 $y=0$ 时，

$$\frac{dz}{dy}=\pm\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}\neq 0$$

所以 c 与 oz 轴交成锐角。

(iii) $b^2>1$，此时令（7.13）式根号里的函数大于等于零，则得

$$a\sqrt{b^2-1}\leqslant y\leqslant ab$$

当 $y=a\sqrt{b^2-1}$ 时，C 的切线和 oz 轴垂直，当 $y=ab$ 时 C 的切线与 oz 轴平行（如图3—13）

（2）令 $K=-\frac{1}{a^2}<0$，则曲线 C 变为

$$z=\int\pm\sqrt{\frac{a^2(1-c)-y^2}{a^2c+y^2}} \qquad (7\cdot 14)$$

这里 $c<1$，否则根号里的值将为负值。

若令 $c=1-b^2$ $(b>1)$ 则（7.14）式化为

$$z=\int\pm\sqrt{\frac{a^2b^2-y^2}{a^2(1-b^2)+y^2}}dy \qquad (7.15)$$

(i) $b^2=1$，这时（7.15）变为

$$z=\int\pm\sqrt{\frac{a^2-y^2}{y^2}}dy$$

令 $y=a\cos\varphi\left(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，并适当选取原点，则得积分曲线

$$\begin{cases} y=a\cos\varphi \\ z=\pm a[l_n(\sec\varphi+\text{tg}\varphi)-\sin\varphi] \quad (0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad (7\cdot 16)$$

这是曳物线，它在 $y=a$，$z=0$ 有一个尖点，y 轴是它在尖点的切线，oz 轴是它的渐近线。它绕 oz 轴旋转所得的曲面是拟球面（图3—32，3—33）

(ii) $0<b^2<1$，这时 C 上点

$y\leqslant ab$

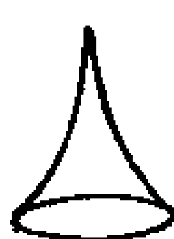
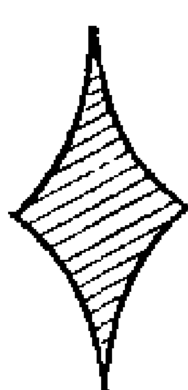
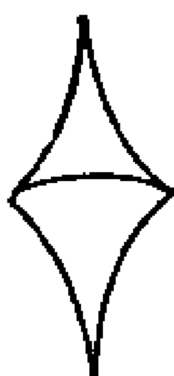




图3—32

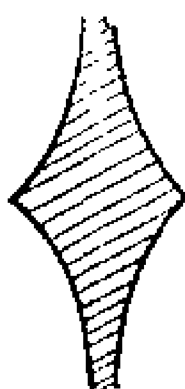




图3—33

当 $y=ab$ 时，C 的切线与 oz 轴垂直，当 $y=0$ 时，

$$\frac{dz}{dy}=\pm\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}\neq 0$$

所以 c 与 oz 轴交于锐角。

(iii) $b^2>1$，这时对 C 上点

$$a\sqrt{b^2-1}\leqslant y\leqslant ab$$

而且当 $y=a\sqrt{b^2-1}$ 时，C 的切线与 oz 轴平行，当 $y=ab$ 时，C 的切线与 oy 轴垂直。

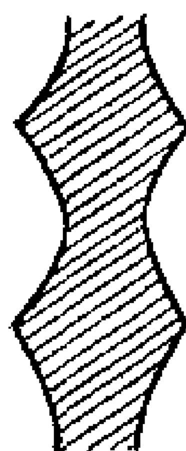
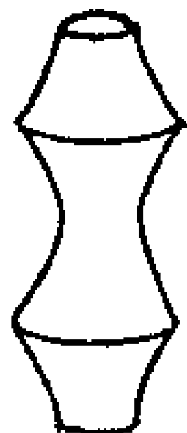




图3—34

（3）令 $K=0$，这时（7.11）式化为直线

$$z=Ay+B$$

(i) 若 $A\neq 0$ 则 Σ 是个锥面。

(ii) 若 $A=0$，$B\neq 0$，则 Σ 是一个平面。

(iii) 若 $y=y_0$ 绕 oz 旋转，则 Σ 是柱面（图 3—34）总括上面讨论的结果可以看到代表常曲率曲面的典型模型是球面，

拟球面和平面。

〔例2〕已给拟球面 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\{\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ f(\rho)\}$ $0\leqslant\theta<2\pi$，其中 $\rho=a\cos\varphi$，$f(\rho)=a[l_n(\sec\varphi+\mathrm{tg}\varphi)-\sin\varphi]$，求这个拟球在平面上的等角表示。

（解）从 $f(\rho)=a[l_n(\sec\varphi+\mathrm{tg}\varphi)-\sin\varphi]$ 可以算得

$$f'(\rho)=-\mathrm{tg}\varphi$$

所以
$$\boldsymbol{r}_\rho=\{\cos\theta,\ \sin\theta,\ -\mathrm{tg}\varphi\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\ 0\}$$

所以第一基本微分形式为

$$\varphi_1=\sec^2\varphi d\rho^2+\rho^2d\theta^2=\frac{a^2}{\rho^2}d\rho^2+\rho^2d\theta^2$$

$$=a^2\rho^2\left[\left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{a}\right)^2\right]$$

作参数代换

$$u=\frac{\theta}{a}\quad 0\leqslant u\leqslant\frac{2\pi}{a}$$

$$v=\frac{1}{\rho}\quad v\geqslant\frac{1}{a}$$

代入上式得

$$\varphi_1=\frac{a^2}{v^2}(du^2+dv^2)$$

它与平面上直角坐标系的第一基本微分形式比较，只差一个因子$\frac{a^2}{v^2}$，因此拟球面与平面等角等价。

现在写出拟球面的测地线方程，从第一基本微分形式可知 $E=G=\frac{a^2}{v^2}$，把它代入测地线微分方程（旋转曲面的坐标曲

线网是正交网）．

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\dfrac{E_\varphi}{\sqrt{E}}\cos\varphi-\dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right) \\ \dfrac{du}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi \\ \dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi \end{cases} \tag{7·17}$$

则得

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{ds}=-\dfrac{1}{a}\cos\varphi \\ \dfrac{du}{ds}=\dfrac{v}{a}\cos\varphi \\ \dfrac{dv}{ds}=\dfrac{v}{a}\sin\varphi \end{cases} \tag{7·18}$$

如果 $\varphi\neq\pm\frac{\pi}{2}$，则$\cos\varphi\neq0$，则由上式可得

$$\begin{cases} du=-vd\varphi \\ dv=-v\mathrm{tg}\varphi d\varphi \end{cases}$$

积分上式第二式得

$$u=c\cos\varphi \quad (c\text{是积分常数}) \tag{7·19}$$

把它代入第一式，再积分得

$$u=-c\sin\varphi+u_0 \tag{7·20}$$

由（7.19）、（7.10）两式消去 φ，则得

$$(u-u_0)^2+v^2=c^2 \quad (v>0)$$

这时上面测地线在平面上的象是以 u，v 为正交轴的平面上，中心在 u轴上半径为 c的圆（图3—35）．

如果，$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，则由(7·18)式得

$$du=0$$

即 $$u=u_0$$

它在平面上的象是与 u 轴正交的半直线。

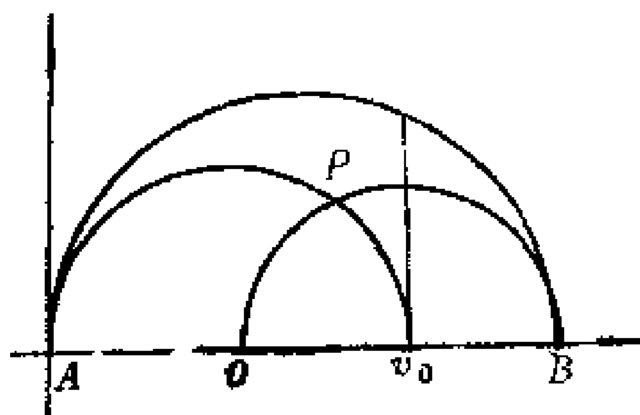


图3—35

总之拟球面上测地线在平面上的等角映射是中心在轴上的半圆或是垂直与轴的半直线。

因此，过拟球面上任意两点都存在一条测地线，而且在已给的拟球面Σ的测地线C和不在它的任一点P，则过点P的测地线中有无穷多条不和C相交，其中有两条和C平行，把这两条测地线叫与C平行的测地线。

设 g是测地线，点P不在 g上，g 在平面的象是半圆C；设它与 u轴交于 A、B 两点，过点A，P，作圆C_1，过点B，P作圆 C_2。C_1，C_2 都是拟球面Σ上过点 P 的测地线的象，过P的测地线中只在△角中的与C相交而在某个角中的测地线不与C相交，因此在Σ上过测地线 g 外一点只存在 g_1，g_2 测地线与 g平行，而在无三角形的角内的测地线与 g 不相交。

下面我们讨论在曲面的单连通区域内，由三条测地线围成的测地三角形的三内角和的问题。

【定理 2】（高斯—波涅（Gauss—Bonnet）定理）在高斯曲率 K为常数的曲面Σ上，由测地线围成的测地三角形的三内角和

(i) $K>0$ 时，$KS=(\theta_1+\theta_2+\theta_3)-\pi>0$。

(ii) $K<0$ 时，$KS=(\theta_1+\theta_2+\theta_3)-\pi<0$。

(iii) $K=0$ 时，$KS=\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=0$。

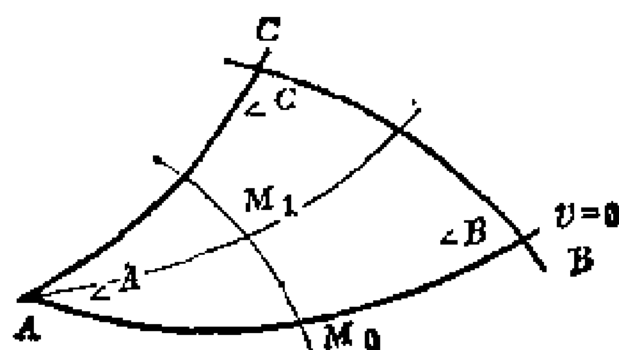
（证明）设 A，B，C 是测地三角形顶点，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AC}$是三条测地线，它们的内角各为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，为了引进测地极坐标系，我们取 A 为极点，$\overset{\frown}{AB}$为u曲线而$\overset{\frown}{M_0M_1}$ 为测地平行线，即u曲线（图—36）。在这个半测地网中，已知

$$\varphi_1=du^2+Gdv^2$$

因为 $E=1$，所以高斯方程为

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\ \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

且$\left[\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0}=1$，$G(o,v)=0$，



而曲面的面积元为

$$d\sigma=\sqrt{G}\ \ du\ \ dv$$

图3—36

(7·21)

因此，在这个曲面上的全曲率（各点高斯曲率的总和）即（7.4）与（7.21）式之积。则得

$$Kd\sigma=-\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}du\ \ dv$$

从而积分上式

$$\iint K\,d\sigma=-\int_0^{\angle A}\int_0^u\frac{\partial^2\sqrt{G(uv)}}{\partial^2 u}du\ \ dv$$

$$=-\int_0^{\angle A}\frac{\partial\sqrt{G(u,v)}}{\partial u}\Bigg|_{u=0}^{u=u}dv$$

$$=\int_0^{\angle A}\left(1-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)dv$$

从前面例题可知二测地线的交角为

$$\frac{d\varphi}{dv}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

代入上式得

$$\int_0^{\angle A}\left(1+\frac{d\varphi}{dv}\right)dv=\angle A+\varphi(u,v)\Big|_{v=0}^{v=\angle A}$$

$$=\angle A+\angle C-(\pi-\angle B)$$

$$=\angle A+\angle B+\angle C-\pi$$

在常曲率曲面上 $K=$常数，设三角形面积$\int d\sigma=S$ 是正常数，则上式变为

$$KS=\angle A+\angle B+\angle C-\pi \tag{7·22}$$

如果(i) $K>0$，则$\angle A+\angle B+\angle C>\pi$。

(ii) $K<0$，则$\angle A+\angle B+\angle C<\pi$。

(iii) $K=0$，则$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$。

习　　题

1. 求下列曲面的第一基本微分形式。

（1）椭圆抛物面$\boldsymbol{r}=\{u+v,\ u-v,\ u^2+v^2,\}$

（2）正螺旋面　$\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av+b,\}$。

（3）柱　　面　$\boldsymbol{r}=\{f(u),\ g(u),\ v,\}$。

（4）锥　　面　$\boldsymbol{r}=\{v\cos u\cos\alpha,\ v\sin u\cos\alpha,\ v\sin\alpha\}$。

（5）旋转曲面　$\boldsymbol{r}=\{f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ g(t)\}$。

（6）一般曲面　$z=f(x,y)$。

2. 简单曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$在参数变换 $\theta=\theta(u,v)$ $\varphi=\varphi(u,v)$ 下，变为曲面 $\boldsymbol{r}^*(\theta,\ \varphi)$，且 $\frac{\partial(\theta\ \varphi)}{\partial(u\ v)}\neq0$，证明 $\varphi_1(du,dv)=\varphi_1{}^*(d\theta,d\varphi)$；并写出第一基本量间的变换式。

3. 已知曲面为 $\boldsymbol{r}=(u+v)\boldsymbol{e}_1+(u-v)\boldsymbol{e}_2+uv\boldsymbol{e}_3$，引入参数变换

$\theta=u+v$，$\varphi=u-v$，则给定曲面变为$r^*=\theta e_1+\varphi e_2+\frac{1}{4}(\theta^2-\varphi^2)e_3$，试求 r与r^*的第一基本微分形式，并求 r和r^*在对应点 $u=1$，$v=1$ 处的第一基本量。

4．求锥面 $r=(u\cos\theta)e_1+(u\sin\theta)e_2+ue_3$ 上的曲线 $u=e^{\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)\theta}$（$\beta$=常数，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）的弧长，并证明此曲线与锥面$u$曲线交成定角$\beta$。

5．已知曲面的第一基本微分形式为 $\varphi_1=d^2u+f(u,v)d^2v$，求证 u 曲线和 v曲线正交，并且任意两 v曲线被所有 u曲线截成等长的弧。

6．已知曲线方程为$u=v$及其曲线所在的曲面的第一基本微分形式为 $ds^2=du^2+\operatorname{sh}^2u\,dv^2$，求曲线的弧长。

7．求证，若曲面 $r(u,v)$上一点的切平面上的两个向量 $a=\lambda r_u+\mu v$，$b=\lambda' r_u+\mu' r_v$ 的交角为α，则

$$\cos\alpha=\frac{E\lambda\lambda'+F(\lambda\mu'+\lambda'\mu)+G\mu\mu'}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}\sqrt{E\lambda'^2+2F\lambda'\mu'+G\mu'^2}}$$

8．已知曲面的第一基本微分形式为$\varphi_1=du^2+(\mu^2+a^2)du^2$，求其曲面上的曲线 $u+v=0$，$u-v=0$ 的交角。

9．微分方程 $Adu+Bdv=0$ 代表某一曲面上一族曲线，求这族曲线的正交轨线的微分方程。

10．求证对任意参数曲面，坐标曲线与任意曲线的交角公式为

u—曲线 $\cos\theta=\frac{Edu^*+Fdv^*}{\sqrt{E}\ ds^*}$

v—曲线 $\cos\theta=\frac{Fdu^*+Gdv^*}{\sqrt{G}\ ds^*}$

11．求证平分曲面上坐标曲线间夹角的曲线的微分方程为$\sqrt{E}du^*+\sqrt{G}dv^*=0$，与 $\sqrt{E}du^*-\sqrt{G}dv^*=0$。

12．在正螺旋面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=av$ 上，求出微分方程 $du=\sqrt{u^2+a^2}\ dv$ 的积分曲线的正交轨线。

13．求平分旋转抛物面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$ $z=\frac{1}{2}u^2$ 的坐标曲线间交角的曲线方程。

14．在曲面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=a\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})$ 上，求出与 u 曲线交于定角 θ 的曲线。

15．求抛物面 $z=mxy$ 的直母线的正交轨线。

16．在球面上求与子午线交成定角的曲线方程。

17．若二次方程 $Adu^2+2Bdudv+Cdv^2=0$ 存在两个解，则这两个解是曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上正交曲线族的方向的必要充分条件是 $EC-2FB+GA=0$。

18．求曲面 $z=f(x,y)$ 的参数方程表达式以及第二基本量，同时再写出该曲面上某区域 D 的面积计算公式

19．求环面 $\boldsymbol{r}=(b+a\sin\varphi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\varphi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\varphi)\boldsymbol{e}_3$ 的表面面积。

20．求证圆锥上的曲线 $v=ce^{a\varphi}$ 与其直母线的交角为常数。

21．已知曲面的第一基本微分形式为 $\varphi_1=du^2+(u^2+a^2)dv^2$，求曲线 $u=\pm\frac{1}{2}av$，$v=1$ 所交成的曲线三角形的周长，三个内角和面积。

22．求证旋转曲面 $\boldsymbol{r}=(\cos\theta\operatorname{ch}v)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\operatorname{sh}v)\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3$ 与锥面 $\boldsymbol{r}^*=(u\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2+\varphi\boldsymbol{e}_3$ 等距等价。

23．若 $f'^2(t)=g'^2(t)+\frac{a^2}{u^2}$，则螺旋面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, g(u)+av\}$ 与旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{t\cos\varphi, t\sin\varphi, f(t)\}$ $(t>0)$ 等距等价。

24．求证螺旋曲面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, u+v\}$ 与旋转曲面 $\boldsymbol{r}^*=\{\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{\rho^2-1}\}$ 等距等价。

25．求证曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u\cos v, u\sin v, a\operatorname{ch}^{-1}\frac{u}{a}\right\}$ 与曲面 $\boldsymbol{r}^*=\{t\cos\theta, t\sin\theta, c\theta\}$ 等距等价。

26．设曲面 $\boldsymbol{r}=\{w\cos v-w_v\sin v, w\sin v+w_v\cos v, u\}$ 与柱面 $\boldsymbol{r}^*=\{a\cos v, a\sin v, u\}$ 等角等价，求证 $w=f(u,v)$，并证明 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是一旋

转曲面（其中$\omega_v=\frac{\partial\omega}{\partial v}$）

27. 求证旋转曲面中唯一的极小曲面是悬链面。

28. 求证曲面$z=l_n\frac{\cos y}{\cos x}$是极小曲面。

29. 若锥面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v)\boldsymbol{e}_1+(u\sin v)\boldsymbol{e}_2+\varphi(v)\boldsymbol{e}_3$ 是极小曲面，则它一定是正螺面。

30. 求球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\varphi\}$ 的第二基本微分形式。

31. 求悬链面 $x=\sqrt{u^2+a^2}\cos v,\ y=\sqrt{u^2+a^2}\sin v,\quad z=al_n(u+\sqrt{u^2+a^2})$的第二基本微分形式。

32. 求曲面 $z=f(x,y)$ 的第二基本微分形式。

33. 求曲面$\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2-v^2)\boldsymbol{e}_3$ 的第二基本微分形式。

34. 求螺旋面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)+av\}$ 的第二基本微分形式。

35. 证明下列等式

(1)

$$(\boldsymbol{r}_{11},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_{22},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{22}, & \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1, & \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_2\\ \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{22}, & E, & F\\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_{22}, & F, & G\end{vmatrix}$$

(2)

$$(\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{12}^2, & \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1, & \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_2\\ \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1, & E, & F\\ \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_2, & F, & G\end{vmatrix}$$

(3)

$$LN-M^2=\frac{1}{g}[(\boldsymbol{r}_{11},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_{22},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)-(\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)^2]$$

(4)

$$\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{2}E_1\qquad\qquad \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{2}E_2$$

$$r_{22}r_2=\frac{1}{2}G_2 \qquad r_{12}r_2=\frac{1}{2}G_1$$

$$r_{11}r_2=F_1-\frac{E_2}{2} \qquad r_{12}r_1=F_2-\frac{G_1}{2}$$

（5）

$$n_1=\frac{(FM-GL)r_1+(FL-EM)r_2}{g}$$

$$n_2=\frac{(FN-GM)r_1+(FM-EN)r_2}{g}$$

其中 $r_1=r_u$， $r_2=r_v$， $r_{11}=r_{uu}$ $r_{12}=r_{uv}$ $r_{22}=r_{vv}$

$r_{22}=r_{vv}$ $E_1=E_u$ $E_2=E_v$ $F_1=F_u$ $F_2=F_v$

$G_1=G_u$ $G_2=G_v$， $g=EG-F^2$。

36．求证简单曲面为平面的充分必要条件是 $L=M=N=0$。

37．求证对于正螺面和悬链面上的所有点有 $EN-2FM+GL=0$。

38．求证直纹面 $r=\rho(u)+v\tau(u)$ 为可展曲面的充分必要条件是 $LN-M^2=0$。

39．在曲面Σ的各点P的法线同方向上，从点P 取一定距离的点的轨迹，称为曲面Σ 的平行曲面．求证旋转曲面的平行曲面仍是旋转曲面．

40．给定曲面 $r(u,v)$，在参数变换 $\theta=\theta(u,v)$ $\varphi=\varphi(u,v)$ 下该曲面为 $r^*(\theta,\varphi)$ 且 $\frac{\partial(\theta\ \varphi)}{\partial(u\ v)}>0$，求证：$\varphi_2(u,v)=\varphi^*{}_2(\theta,\varphi)$； 并求出第二基本量间的变换式。

41．求球面 $r=(R\cos\theta\sin\varphi)e_1+(R\sin\theta\sin\varphi)e_2+(R\cos\varphi)e_3$ 的法曲率。

42．指出曲面 $r=ue_1+ve_2+(u^2-v^2)e_3$ 在点 $u=0$ $v=0$ 的邻域内法曲率k_n的变化率。

43．求曲面

$$\left.\begin{aligned}x&=\cos v-(u+v)\sin v\\y&=\sin v+(u+v)\cos v\\z&=u+2v\end{aligned}\right\}$$

的主曲率。

44. 求具有脊线的可展曲面 $r=\rho(u)+v\tau(u)$ 的主曲率。

45. 求曲面 $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$ 的主曲率半径。

46. 求证抛物线绕其准线旋转所得的曲面的主曲率半径之比是常数。

47. 求抛物面 $2z=5x^2+4xy+2y^2$ 在坐标原点的主曲率。

48. 求曲面 $r=ue_1+ve_2+(u^2+v^2)e_3$ 上的曲线 $u=t^2, v=t$ 在点 $t=1$ 的法曲率和法曲率向量。

49. 求证在两个曲面的交线 C 上点 P 的曲率 k 满足方程 $k^2\sin^2\alpha = k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\alpha$。（其中 k_1, k_2 分别是两个曲面在点 P 的法曲率，α 是两曲面在对应点 u的法向量夹角）。

50. 求证在简单曲面 $r(u,v)$ 上每一点 P, 下面等式成立 $n_u\times n_v = K(r_u\times r_v)$（其中 n 是曲面的单位法向量，K 是曲面的高斯曲率）。

51. 求证实数 k_0 是曲面 $r(u,v)$ 在点 P 的对应主方向 $du_0:dv_0$ 的主曲率的必要充分条件是 k_0 与 $du_0:dv_0$ 满足方程组

$$\left.\begin{aligned}(L-k_0E)du_0+(M-k_0F)dv_0=0\\(M-k_0F)du_0+(N-k_0G)dv_0=0\end{aligned}\right\}$$

这里 $du_0^2+dv_0^2\neq 0$。

52. 求证方向 $du:dv$ 是曲面 $r(u,v)$ 在点 P 的主方向的必要充分条件是 $dn=-k\,dr$。（这里 k 是曲面 $r(u,v)$ 在点 P 关于主方向 $du:dv$ 的主曲率，n 是曲面对应点的单位法向量）。

53. 求曲面 $r=ue_1+ve_2+(u^2+v^2)e_3$ 在点 $u=1\ v=1$ 的主方向，并验证罗德里克(Rodrigues)公式（$dn=-k_n dr$）。

54. 若两个曲面 M_1, M_2 交成定角（沿交线两曲面的法向量成定角）、若交线是曲面 M_1 的曲率线，那么交线也必为 M_2 的曲率线。

55. 假设曲面 $r(u,v)$ 对参数 u,v 二阶连续可微，P 是曲面 $r(u,v)$ 上任一点，则存在点 P 的某一邻域，使其坐标网是曲率线网。

56. 设曲面 $r(u,v)$ 的单位法向量为 n，则称 $\varphi_3=dn\cdot dn$ 为曲面的第三基本微分形式，设 H,K 是曲面 $r(u,v)$ 的平均曲率和高斯曲率，

求证下列等式成立

$$\varphi_3 - 2H\varphi_2 + K\varphi_1 = 0$$

57. 求证曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$上的渐近曲线（非直线）的挠率 $\varkappa$与曲面的高斯曲率 K满足关系式 $\varkappa^2 = -K$.

58. 求证曲面 $f(x_1\ x_2\ x_3)=c$ 的主方向是下列微分方程组的解

$$\left.\begin{aligned} & f_{x1}dx_1 + f_{x2}dx_2 + f_{x3}dx_3 = 0 \\ & \det\begin{pmatrix} dx_1 & f_{x1} & df_{x1} \\ dx_2 & f_{x2} & df_{x2} \\ dx_3 & f_{x3} & df_{x3} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}\right\}$$

59. 求曲面 $X=\frac{a}{2}(u-v)$, $y=\frac{b}{2}(u+v)$ $z=\frac{uv}{2}$ 的曲率线的微分方程.

60. 求正螺面 $X=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$ 的曲率线.

61. 求证若某一曲率线L 的密切平面与曲面沿 L 的切平面构成定角，则曲率线是平面曲线.

62. 求曲面 $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$的曲率线并验证点 $u=0$, $v=0$是曲面的脐点.

63. 在曲面$\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$ 上引曲率线为坐标曲线，并求主曲率.

64. 求曲面 $\boldsymbol{r}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$ 的曲率线.

65. 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$ 的高斯曲率和平均曲率.

66. 求旋转曲面$r=\{g(t)\cos\theta,\ g(t)\sin\theta,\ g(t)\}$ 的高斯曲率和平均曲率.

67. 求正螺面的主曲率，高斯曲率和平均曲率.

68. 求曲面 $z=f(x,\ y)$ 的平均曲率和高斯曲率.

69. 求曲面 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u+v$, 的高斯曲率和平均曲率.

70. 求环面 $\boldsymbol{r}=(b+a\sin\varphi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\varphi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+$

$(a\cos\theta)\boldsymbol{e}_3$，$(b>a)$的高斯曲率与平均曲率。

71．求证直纹曲面的高斯曲率 $K\leqslant 0$。

72．求证锥面$x=u\cos v$，$y=u\sin\theta$，$z=f(v)$（$f(v)$是参数 v 的解析函数）的主曲率半径符号相反。

73．求证悬链面的平均曲率为0。

74．求证曲面为球面或平面的必要充分条件为 $H^2=K$。

75．求证曲面 $\boldsymbol{r}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(l_nu)\boldsymbol{e}_3$ 与曲面 $\boldsymbol{r}^*=(u^*\cos\theta^*)\boldsymbol{e}_1+(u^*\sin\theta^*)\boldsymbol{e}_2+u^*\boldsymbol{e}_3$在对应点 $u^*=u$，$\theta^*=\theta$ 有相等的高斯曲率，但两曲面不等距等价。

76．求曲面 $xyz=1$ 的脐点。

77．求证曲线的切线曲面上的点全是抛物点。

78．求曲面 $\boldsymbol{r}=\{u,v,u^2+v^3\}$ 上的椭圆点，抛物点和双曲点。

79．求证椭圆面 $\boldsymbol{r}=\{a\sin u\cos v,\ b\sin u\sin v,\ c\cos u\}$ 上的点都是椭圆点。

80．求曲面 $x=v^3$，$y=u^2$，$z=u+v$ 上抛物点的轨迹。

81．设曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$对参数 u,v 三阶连续可微，试讨论曲面在其平点（$L=M=N=0$的点）邻域的状态。

82．讨论曲面 $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^3+v^3+u^4)\boldsymbol{e}_3$在点 $u=0$，$v=0$ 邻域的状态。

83．若旋转曲面 $\boldsymbol{r}=(f(t)\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(f(t)\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3$（$f(t)>0$）上每一点都是抛物点，则已知曲面是柱面或是圆锥面。

84．求出曲面 $z=c\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$上的渐近曲线。

85．求曲面 $z=xy^2$的渐近曲线。

86．求曲面 $z=x^3+y^2$ 的抛物点的轨迹，并讨论该曲面的渐近曲线在抛物点邻域的状态。

87．求证直纹曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{\dfrac{a}{2}(u+v),\ \dfrac{b}{2}(u-v),\ \dfrac{1}{2}uv\right\}$ 的参数曲线是渐近曲线。

88. 求证曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上坐标曲线是渐近曲线的必要充分条件为 $L=N=0$。

89. 若简单曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的所有方向都是渐近方向，则曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是平面。

90. 求曲面 $z=y\sin x$ 上的渐近曲线。

91. 求旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{t\cos\varphi,\ t\sin\varphi,\ \ln t\}$ 的渐近曲线。

92. 求证曲面 $\boldsymbol{r}=\{f_1(u),\ v\varphi_1(u),\ f_2(u)+\varphi_2(u)\}$ 上的坐标曲线是平面曲线，且构成共轭网。

93. 求证抛物面 $z=Ax^2+By^2$ 的坐标曲线组成共轭网。

94. 求证曲面 $\boldsymbol{r}=(\cos u)\boldsymbol{e}_1+(\sin u+\sin v)\boldsymbol{e}_2+(\cos v)\boldsymbol{e}_3$ 的参数曲线是圆，并且组成共轭网。

95. 证明在曲面上任一点，每对共轭方向的法曲率半径之和为 $\frac{2H}{K}$。

96. 求证渐近曲线的正交轨线的法曲率等于曲面的平均曲率的2倍。

97. 在旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{t\cos\varphi,\ t\sin\varphi,\ e^t\}$ 上求一族曲线，与曲线族 $t-\varphi=C$ 构成共轭网。

98. 已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一族曲线其微分方程为 $Adu+Bdv=0$，在曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上求与已知曲线族共轭的另一族曲线族的微分方程。

99. 在曲面 $\boldsymbol{r}=(t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(\ln t)\boldsymbol{e}_3$ 上引渐近曲线为坐标曲线。

100. 求证曲面上两族渐近曲线恒交于定角的必要充分条件是主曲率半径之比为定值。

101. 求证曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的点 P 是椭圆点或双曲点的必要充分条件是点 P 的每一个方向有唯一的共轭方向。

102. 求证曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=C$ 的渐近方向是微分方程 $dx_1df_{x_1}+dx_2df_{x_2}+dx_3df_{x_3}=0$ 的解，并求曲面 $x_3-x_1\sin x_2=0$ 上的渐近方向。

103. 把下列表达式用总和符号表出。

（1）$a_1x^1x^1+a_2x^2x^1+\cdots+a_nx^nx^1$。

（2）$A^{21}B_1+A^{22}B_2+A^{23}B_3+\cdots+A^{2n}B_n$。

（3） $A^j{}_1B^1 + A^j{}_2B^2 + A^j{}_3B^3 + \cdots + A_n{}^jB_n$.

（4） $g^{21}g_{11} + g^{22}g_{21} + g^{23}g_{31} + \cdots + g^{2n}g_{n1}$.

（5） $B^{121}{}_{11} + B^{122}{}_{12} + B^{221}{}_{21} + B^{222}{}_{22}$.

（6） $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \cdots + (x^n)^2$.

（7） $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{d\phi}{\partial x^n}dx^n$.

（8） $\frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dx} + \frac{\partial\bar{x}^k}{dx^2}\frac{dx^2}{dt} + \cdots + \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}\frac{dx^n}{dt}$.

（9） $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 - g_{33}(dx^3)^2$.

（10） $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}dx^pdx^q$.

104.写出下面总和的各项。

（1） $a_{jk}x^k$.

（2） $A_{pq}A^{qr}$.

（3） $\bar{g}_{rs} = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}$ $(n=3)$.

（4） $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$ $(n=3)$.

（5） $A^{ik}B^j{}_kC_j$ $(n=2)$.

（6） $\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$.

（7） $a_{pq}x^q = b_p$ $(p=1,2\cdots n)$.

105.设曲面为$F(u^i)$，$i=1,2$。 r_i 与r_{ij} 是曲面 $r(u^i)$对参数 u^i 的一阶与二阶导向量，符号：$\Gamma_{ijk} = r_{ij}\cdot r_k$ 叫做 carist offel 第一符号，求证下列等式成立。

（1） $\Gamma_{ijk} = g_{k\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{ij}$.

（2） $\Gamma^k{}_{ij} = g^{k\alpha}\Gamma_{ij\alpha}$.

（3） $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij}$

(4) $\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$.

(5) $\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{ka}\left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ai}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^a}\right)$.

106. 设 $g=det\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ $g^{ij}=\frac{G(ij)}{g}$, $G(ij)$是g_{ij}的代数余子式，求证下列等式成立

(1) $g_{ia}g^{aj}=\delta^j_i$.

(2) $\frac{\partial g}{\partial u^i}=2g\Gamma^a_{ai}$.

(3) $\Gamma^j_{jm}=\frac{\partial}{\partial u^m}(ln\sqrt{g})$.

107. 若 $\bar{g}_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq}$，证明 christoffel 符号的变换规律为

(1) $\bar{\Gamma}_{jk,m}=\Gamma_{pq,r}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}+g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \bar{x}^k}$.

(2) $\bar{\Gamma}^s_{jk}=\Gamma^r_{pq}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^q}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \bar{x}^k}$.

(3) $\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}=\bar{\Gamma}^s_{jk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s}-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^m_{pq}$.

108. 用第一基本量及其导数把 christoffel 符号表示出来，并写出 Gauss 公式。

109. 用第一基本量和第二基本量把 Weingarten 公式表示出来。

110. 求旋转曲面 $\boldsymbol{r}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g(u)\boldsymbol{e}_3$的 Gauss方程与 Weingarten 方程。

111. 验证曲面 $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2-f(uv)\boldsymbol{e}_3$ 的 Gauss 与 Weingarten方程为

$$g\boldsymbol{r}_{uu}=pr\boldsymbol{r}_u+qr\boldsymbol{r}_v+rg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{n}$$

$$g\boldsymbol{r}_{uv}=ps\boldsymbol{r}_u+qs\boldsymbol{r}_v+sg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{n}$$

$$gr_{vv}=ptr_u+qtr_v+tg^{\frac{1}{2}}n$$

$$g^{\frac{3}{2}}n_u=(spq-rq^2-r)r_u+(rpq-sp^2-s)r_v$$

$$g^{\frac{3}{2}}n_v=(tpq-sq^2-s)r_u+(spq-tp^2-t)r_v$$

这里　$p=f_u$，$q=f_v$，$r=f_{uu}$，$s=f_{uv}$，$t=f_{vv}$，$g=1+p^2+q^2$。

112.应用 Weingasten 方程证明 $\varphi_3-2H\varphi_2+K\varphi_1=0$ 这里 $\varphi_3=dndn$ 是第三基本微分形式，H与K是曲面的平均曲率和高斯曲率。

113.求证 $K(EG-F^2)^2=(r_{uu},r_u,r_v)(r_{vv},r_u,r_v)$

$$-(r_{uv},r_u,r_v)^2.$$

114.求证 $K(EG-F^2)^2=(F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu})(EG-F^2)$

$$+\det\begin{pmatrix}0 & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{pmatrix}.$$

115.设 $H_{ij}(i,j=1,2)$ 是曲面 $r(u^i)(i=1,2)$ 的第二基本量。记号 $R_{mijk}=H_{ik}H_{jm}-H_{ij}H_{km}$ 与 $R^p{}_{ijk}=g^{\alpha p}R_{\alpha ijk}$ 分别称为 Riemann 第一符号与第二符号，求证下列等式成立

（1） $R_{mijk}=g_{\alpha m}R^{\alpha}{}_{ijk}$.

（2） $R^p{}_{ijk}=H_{ik}H^p{}_{\cdot j}-H_{ij}H^p{}_{\cdot k}$.

（3） $R_{imjk}=-R_{mijk}$，　$R_{mikj}=-R_{mijk}$.

（4） $R_{mmjk}=R_{ijkk}=0$.

（5）Gauss 曲率 $K=\frac{1}{g}R_{1212}=\frac{1}{g}R_{2121}$（其中 $g=EG-F^2$）。

116.求证：$R^1{}_{112}=R^2{}_{221}=-R^1{}_{121}=-R^2{}_{212}=FK$

$$R^1{}_{212}=-R^1{}_{221}=GK,\quad R^2{}_{121}=-R^2{}_{121}=EK$$

（其中K是 Gauss曲率）。

117.设曲面 $\boldsymbol{r}(u^i)$对其一般参数 $u^i(i=1.2)$，三阶连续可微，则其 Codazzi方程与 Guass 方程为

$$L_v-M_u=L\Gamma^1{}_{12}+M(\Gamma^2{}_{12}-\Gamma^1{}_{11})-N\Gamma^2{}_{11}$$

$$M_v-N_u=L\Gamma^1{}_{22}+M(\Gamma^2{}_{22}-\Gamma^1{}_{12})-N\Gamma^2{}_{12}$$

$$\begin{aligned}LM-M^2=F[&(r^2{}_{22})_u-(\Gamma^2{}_{12})_v+\Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{11}\\&-\Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{12}]+E[(\Gamma^1{}_{22})_u-(\Gamma^1{}_{12})_v\\&+\Gamma^1{}_{22}\Gamma^1{}_{11}+\Gamma^2{}_{22}\Gamma^1{}_{12}-{}^1{}_{21}\Gamma^1{}_{12}\\&-\Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22}]\end{aligned}$$

118.已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的第一与第二基本量为 $E=G=1$，$F=0$；$L=-1$，$M=N=0$ 求曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的方程。

119.是否存在以 $E=L=1$，$F=M=0$，$G=N=\sin^2u$为第一和第二基本量的曲面？若存在写出曲面的方程。

120.应用 Weingasten 公式验证等式，

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=\sqrt{EG-F^2}\;K\boldsymbol{n}$$

121.求圆锥面 $\boldsymbol{r}=(u\sin\alpha\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\alpha\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(u\cos\alpha)\boldsymbol{e}_3$ 上的测地线。

122.已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本量为 $E=F(u)$ $F=0$, $G=G(u)$, $\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 是已知曲面的测地线，求证$\sqrt{G}\cos\theta=C$ （c为常数，θ是测地线与 v曲线夹角）。

123.若曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本量为 $E=E(u,)$，$F=0$，$G=G(u)$，求证下面事实成立。

（1）u 曲线是测地线。

（2）v 曲线是测地线当且仅当 $G_u(u)=0$.

（3）曲线 $\boldsymbol{r}(u,v(u))$是测地线当且仅当

$$v = \pm \int \frac{C\sqrt{E}du}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}} \quad (c\text{是常数})$$

124.已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本量为 $F=0 \quad E=G=f(u)+g(v)$，$\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 是 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的测地线，测地线与 u 曲线夹角为 θ，求证 $f(u)\sin^2\theta + g(v)\cos^2\theta = C$。

125.求证曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标曲线的测地曲率为

$$kg_u = \Gamma^2{}_{11}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}} \quad (u \text{ 曲线})$$

$$kg_v = -\Gamma_{22}{}^1\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}} \quad (v \text{ 曲线})$$

若坐标曲线是正交曲线则

$$k_{gu} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \qquad k_{gv} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

126.求抛物面 $\boldsymbol{r}=(t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+t^2\boldsymbol{e}_3$ 的 θ曲线的测地曲率，并验证公式 $\mathrm{kg}_\theta = \left.\frac{G_t}{2G\sqrt{E}}\right| t=t_0$。

127.求半径为 R的球面上半径为 a的圆周曲线的测地曲率($a<R$)。

128.求光滑曲线 $y=f(x)$ 绕 ox 轴旋转的旋转曲面的平行圆的测地曲率。

129.求球面曲线的测地曲率公式。

130.求证旋转曲面的子午线为测地线。

131.求螺旋面 $r=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$的测地线。

132.求证第一基本微分形式为 $d^2s=v(d^2u+dv^2)$的曲面的测地线在 u,v 平面上是抛物线。

133.求证若曲面 $\boldsymbol{r}(u\ v)$的坐标曲线是曲率线则 Codazzi 方程为

$$\frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(k_2-k_1)$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{G_u}{G}(k_1-k_2)$$

(k_1与 k_2是曲面 $\boldsymbol{r}(u\ v)$的主曲率)。

134. 设曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的 v 曲线族是测地曲率为常数的测地平行圆族，则曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 与某一旋转曲面等距等价。

135. 已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标曲线正交，且第一基本微分形式为 $\varphi_1 = \lambda^2(du^2+dv^2)$，求 Gauss 曲率 K。

136. 曲面 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的第一基本微分形式为 $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{(x^2+y^2+c)^2}$，

求证 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 是常曲率曲面。

137. 已知曲面的第一基本微分形式为 $ds^2 = du^2 + 2e^{2u}wdv^2$，求 Gauss 曲率 K。

138. 已知曲面的第一基本微分形式为 $ds^2 = du^2 + 2\cos\theta du dv + dv^2$，求 Gauss 曲率 K。

139. 已知曲面的第一基本微分形式为 $ds^2 = a^2(\cos^2\theta du^2 + \sin^2\theta dv^2)$ 求高斯曲率 K。

140. 求旋转曲面 $\boldsymbol{r} = (t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 - t^2\boldsymbol{e}_3$ 的测地坐标，并求高斯曲率。

第四章 *黎曼(Riemann)流形上的几何

在本章中介绍大范围微分几何的基本知识．因为不仅仅考虑微分几何的新发展方向，同时还想通过它介绍做为现代数学基础的微分流形的知识．虽然涉及新概念较多，我们尽量使本章能做到自给自足．在讨论问题时，尽量把它们限制在三维空间的二维曲面上，我们认为在前面局部微分几何的基础上读者是能够接受的．

§1 预备知识

§1·1 拓扑空间

现在介绍在集合上定义拓扑的方法．关于集合运算的$\in$，$\cup$，$\cap$，$\subset$符号的意义，假定读者已知．

【定义】设M是一个集合，M的子集族用$\mathfrak{S}$表示．当$\mathfrak{S}$满足下列条件

（1）设M和空集ϕ属于$\mathfrak{S}$．

（2）设K与L属于$\mathfrak{S}$，交$K\cap L$也属于$\mathfrak{S}$．

（3）设$\{Y\}$为属于M的子集族，它们的并$\cup Y$也属于$\mathfrak{S}$．

这时称$\mathfrak{S}$为M的一个**拓扑结构**．当集合M具有这种拓扑结构时，称M为**拓扑空间**，用符号$(M,\mathfrak{S})$表示．$\mathfrak{S}$的任意元都叫做M的**开集**．

设点$P\in M$，则M中含点P的开集U叫做M中点P的邻域，记做$U(P)$。点P在M中所有邻域的集合记做$\mathfrak{u}(P)$，显然$\mathfrak{u}(P)$具有下列性质。

(i) $\mathfrak{u}(P)\neq\phi$，若$U\in\mathfrak{u}(P)$，则$P\in U$。

(ii) 若$U_1, U_2\in\mathfrak{u}(P)$，则存在$U_3\subset U_1\cap U_2\in\mathfrak{u}(P)$。

(iii) $U\in\mathfrak{u}(P)$，若 $Q\in U$，则存在 $V\subset U$，且 $V\in\mathfrak{u}(Q)$。

我们把 $\Sigma=\{\mathfrak{u}(P);\ P\in M\}$ 叫做M的**基本邻域系**。

对于集M，由基本邻域系Σ给出集M的拓扑结构，则(M, Σ)构成拓扑空间。容易验证 $(M,\mathfrak{T})$与 (M,Σ)等价。

另方面，对于拓扑空间 (M, Σ) 还满足条件：

(iv) 对于点$P, Q\in M$，$P\neq Q$，如果存在P的邻域U与Q的领域V，且 $U\cap V=\phi$。这时，(M, Σ)叫做**豪斯道夫(Hausdorff)**空间。

〔例 1〕 数空间R^n。

对于有序n实数组$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$。这样的两个数组在同指标的实数对中，至少有一对实数不等时，则认为这两组是不同的。如果 $x^1, x^2, \cdots, x^n$取区间$(-\infty, \infty)$的任意值，这样实数组全体构成集合M，对于M的元 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，关于$\varepsilon>0$，取满足

$$|x^i-y^i|<\varepsilon,\ (i=1, 2, \cdots, n). \qquad (1.1)$$

的元 $y=(y^1, y^2, \cdots, y^n)$的集合记做$U_\varepsilon(x)$。例如$Q$为正有理数全体的集合，设

$$U(x)=\{U_\varepsilon(x)\mid \varepsilon\in Q\}$$

则$U(x)$，$(x\in M)$的全体构成M的基本邻域系，从而可知M构成拓扑空间，这个空间叫做 n**维数空间**，用R^n表示。用R^1表示**数直线**。

〔例 2〕 度量空间

已给集M，对于M的各对元素A, B都对应有满足下列条件的实数$\rho(A, B)$.

（1）如果$A \neq B$，则$\rho(A, B) > 0$，或$\rho(A, A) = 0$.

（2）$\rho(A, B) = \rho(B, A)$.

（3）A, B, C 为任意三点，则$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$. 这时称$M$为**度量空间**. ρ叫做**度量函数**. 度量空间是拓扑空间. 因为对于每个元$A \in M$，则有$\varepsilon > 0$，使

$$U_\varepsilon(A) = \{P \in M;\ \rho(A, P) < \varepsilon\}$$

取它做为A的基本邻域系，即

$$U(A) = \{U_\varepsilon(A) \mid \varepsilon \in Q\}$$

它显然构成拓扑空间.

考虑有序n实数组 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的集合M，对于M的元$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$和 $y = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$，如果取

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2} \tag{1.2}$$

则M是以ρ为距离函数的度量空间，也叫n维欧儿里得空间，用R^n或E^n表示.

〔例3〕直积空间.

已给两个拓扑空间M, N，由$P \in M$，$Q \in N$的所有点对(P, Q)的集合，用 $M \times N$ 表示. 设 M, N 的基本邻域系为 $\Sigma_M = \{U(P) \mid P \in M\}$，$\Sigma_N = \{V(Q) \mid Q \in N\}$，取

$$W(P, Q) = \{U \times V \mid U \in U(P),\ V \in V(Q)\}$$

显然，$M \times N$是以$\Sigma_{M \times N} = \{W(P, Q) \mid P \in M,\ Q \in N\}$ 为基本邻域系的拓扑空间. 这个拓扑空间是 M，N 的拓扑积. 数平面R^2是两条数直线的拓扑积$R \times R$. 对于n维线性空间R^n可以看做$R^p \times R^q$，$(p + q = n)$的拓扑积，或者看做是数直线 $R \times R \times \cdots$

$\times R$的n重积，记做R^n。

〔例4〕子空间。

设M是拓扑空间，$\Sigma=\{U(P)|P\in M\}$是它的邻域系。若N为M的子集，对于各个$P\in N$有

$$U_N(P)=\{U\cap N|U\in U(P)\}$$

易于验证N是以$\Sigma_N=\{U_N(P)|P\in N\}$为基本邻域系的拓扑空间。这个拓扑空间$N$叫做$M$的**子空间**。赋给$N$的拓扑叫做$M$的**相对拓扑或叫诱导拓扑**。

下面讨论拓扑等价问题。对于集合M，一般说来，由于基本邻域系的选取不同，拓扑空间也不相同。

【定义】设Σ_1,Σ_2是集合M的两个基本邻域系，Σ_1的开集族为O_1，Σ_2的开集族为O_2，一般地O_1与O_2不一定相同。如果O_1与O_2等价，则由Σ_1，Σ_2给M以相同的基本邻域系，这时，(M,Σ_1)与(M,Σ_2)给M以**等价的拓扑或叫拓扑等价**。

显然Σ_1，Σ_2给M以相同拓扑的充分必要条件是对各个$U_1\in U_1(P)$，$P\in M$，存在$U_2\subset U_1$的$U_2\in U_2(P)$。又对于$V_2\in U_2(P)$，则存在$V_1\subset V_2$的$V_1\in U_1(P)$。

例如，由有序的n数组$x=(x^1,\cdots,x^n)$全体所构成的集合M，由做为数空间的基本邻域系与做为欧几里得空间E^n的度量，容易证明，它们赋给M以相同的拓扑。若只着眼于M所引入的拓扑结构，则E^n与R^n是拓扑等价的。

【定义】设$\{U_\lambda\}$，λ是集族的指标集Λ的元，Λ不限于是可数集。对于任意的$P\in M$，如果存在$U_\lambda\ni P$的$\lambda\in\Lambda$，即$M=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$则$\{U_\lambda\}$，$(\lambda\in\Lambda)$叫做$M$的**复盖**。如果$U_\lambda$是开集，则$\{U_\lambda\}$，$(\lambda\in\Lambda)$叫做$M$的**开复盖**。又已给$M$的任意开复盖$\{U_\lambda\}$，$(\lambda\in\Lambda)$，若其中总有限个开集复盖$M$时，即存在$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$使$M=U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n}$，则拓扑空间$M$叫做**紧致的**。拓扑空间的子

集N，做为M的子空间而且紧致，则称N为M的**紧致子集**。

下面我们讨论拓扑空间之间的映射。

【定义】给定两个集合 M，N。如果对于M的元都有N的一个元与它对应，这个对应叫做从M到N的**映射**，用记号$f:M\to N$表示。与元$P\in M$对应的N的元 $f(P)$ 叫做在映射 f 下元 P 的**象**，以记号 $f(P)$ 表示。

如果M的不同的二元P,Q 的象 $f(P)$，$f(Q)$ 也不同，则称 f 为从M到N的**一一映射**或叫**单射**。对于$Q\in N$，使 $Q=f(P)$，$(P\in M)$ 的集，以 $f^{-1}(Q)$ 表示，叫做 f 的**逆映射**。对于任意的$Q\in N$，如果 $f^{-1}(Q)$ 不空，则称 f 为从M到N的**满射**。如果是单射且满射时，则 f 叫**满单射**也叫**双射**或叫**到上一一的映射**。

【定义】设f是从拓扑空间M到拓扑空间N的映射。对于某点$P\in M$的邻域U，有它的象$f(U)\in N$的邻域V，使$f(U)\subset V$时，则称映射 f **在点P连续**。特别是 f 在M所有点都连续，则称 **f 在M连续**。

设 $f:M\to N$是满单射。如果 f，f^{-1}都连续，则 f 叫**同胚映射**。若两拓扑空间M,N之间存在同胚映射 f，则称这两个拓扑空间**同胚**。显然同胚的拓扑空间的拓扑结构是等价的。

【定义】直线R （变量 $t\in(-\infty,\infty)$ ）的区间 $[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$，(a,b) 的任一个都用记号I表示。I关于R的诱导拓扑也构成拓扑空间. $f:I\to M$的连续映射叫做**连续曲线**。用记号 $c=f(I,\ f,\ M)$来表示。显然它是点 $f(t)$，$t\in I$ 连续变动而描出来的图象。当 $I=[a,b]$时，$f(a)$，$f(b)$ 是连续曲线的**始点**和**终点**。这两点也可以看做是由连续曲线连接起来的。对于拓扑空间M，其任意两点都存在连接它们的连接曲线时，则称M为**弧状连通的**。

【定义】设 B 为拓扑空间的开集族，如果对于M的任意开集都可以表示为 B 中开集的并，则称 B 为M的**基**。拓扑空间M如果存在至多可数个开集所构成的基时，则说M满足**第二可数公理**。如果M是满足第二可数公理的拓扑空间，则对于M的任意开复盖 $\{U_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$，则有属于它的可数个开集复盖M。即M存在可数开复盖。

【定义】设N为拓扑空间M的子集，如果对于 $P\in M$的任意邻域U，总含有与P不同的N的点时，则称P为N的**聚点**。当N包含它的所有聚点时，称之为拓扑空间M的闭集。显然，N是M的闭集的充分必要条件是N的余集 $M—N$是M的开集。

N与N的聚点全体的并叫做N的**闭包**，用记号$\overline{N}$表示，显然$\overline{N}$是闭集。紧致拓扑空间的闭集是紧致的。豪斯道夫空间的紧致子集是闭集。这两个结论从聚点性质可以给出证明，这里不证。

§1·2　R^n的可微曲线

在微分几何中所讨论的曲线不是连续曲线，而是以可微曲线做为研究的基本对象。

【定义】设 R 为数直线（参数为 t），而 I 是它的任意区间，考虑R^n的连续曲线 $c=(I, f, R^n)$，它与用 R^n 中 $f(t)$，$(t\in I)$ 的坐标函数 $(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t))$ 来表示是等价的。在这里对映射 f 做下列要求：

（1）映射 $f:I\to R^n$ 的函数 $x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)$，$(t\in I)$。在它的定义域上是$C^r$类 $(r\geqslant1)$，(c^r类是指 $f(t)$ 在 I 上有r阶连续偏导数）。这时 f 叫做**c^r类可微映射**。

（2）对t的导数用点 · 表示。函数$\dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \cdots, \dot{x}^n(t)$不同时为零，即

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2>0 \qquad (1.3)$$

满足条件（1）、（2）的 $f:I\to R^n$ 叫做 I 到 R^n 的 c^r 类**浸入**。由 c^r 类浸入给定的曲线叫做 R^n 的 c^r 类**可微曲线**。

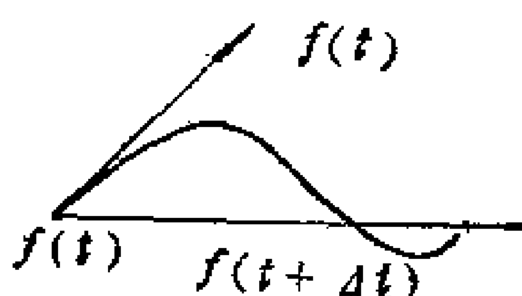


图4—1

对于点 $t\in I$，这条曲线的切向量由

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

给出。它的分量为 $(\dot{x}^1(t),\ \dot{x}^2(t),\ \cdots,\ \dot{x}^n(t))$，由（2）可知各点的切向量不是零向量。又由（1）可知，始点和方向都连续变动，所以 c^r 类曲线也叫 c^r 类**光滑曲线**。

设 J 也是区间（变量为 s）。同胚映射 $\varphi:I\to J$，在严格的意义下是单调增函数 $s=s(t)$，$(t\in I)$，我们假定这个函数 $s(t)$ 是 c^r 类，且 $\dot{s}(t)$ 在 I 上到处不为零（从而为正值）。将这个函数就 t 解之，则得 $t=t(s)$，$(s\in J)$，也是 c^r 类的，且 $t'=\dfrac{dt}{ds}>0$。

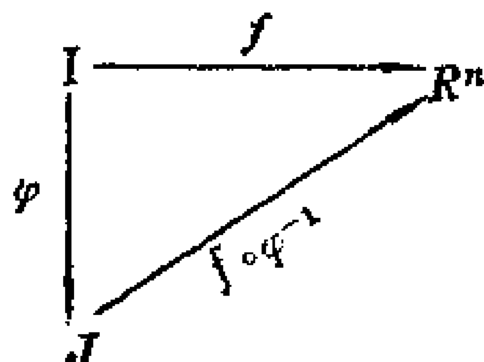


图4—2

现在考虑 $f\circ\varphi^{-1}:J\to R^n$，它由 $s\to f(\varphi^{-1}(s))=(x^1(t(s)),\ \cdots,\ x^n(t(s)))$ 给出。容易看出 $x^1(t(s))$，$x^2(t(s))$，…，$x^n(t(s))$ 是 s 的 c^r 类函数。由于 dx^1/ds，…，dx^n/ds 在 J 的各点不同时为零，从而

$$f\circ\varphi^{-1}:J\to R^n$$

是 c^r 类可微曲线。

如果两个可微线 $f:I\to R^n$，$f\circ\varphi^{-1}:J\to R^n$ 它们的象以及点运动的方向都一致，则说这**两条曲线是相同的**。

如果把 R^n 的曲线中相同的做为等价类，在等价意义下，

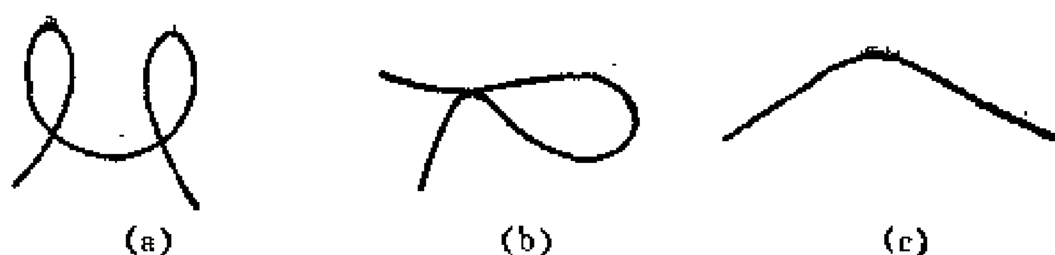


图4—3

$f: I \to R^n$无非是可微曲线的参数表示，区间I的变量t是参数．

【定义】当 $f: I \to R^n$ 是 c^r浸入时，但并不限于 f 是单射（图4—3(a)，(b)）．特别是当 f 是单射的c^r浸入时，则 f 叫做**嵌入**（图 4—3(c)）．

闭区间$I=[a,b]$的连续映射 $f: I \to R^n$，如果满足条件$f(a)=f(b)$，则称这条连续曲线为**闭曲线**．

§1·3 微分流形

【定义】在n维欧几里得空间R^n中，$(u^1, u^2, \cdots, u^n)$是它的坐标．满足

$$(u^1)^2+(u^2)^2+\cdots+(u^n)^2<a^2$$

的点$(u^1, u^2, \cdots, u^n)$的集合叫做半径为a的**n维开球**．当不等号改为等号时，叫做半径为a的**$n-1$维球面**．

【定义】一个豪斯道夫空间M满足下列条件：

（1）满足第二可数公理，

（2）它的各点具有与R^n的开球同胚的邻域，这时，把M叫做（无边界）**n维拓扑流形**．

设U是满足条件（2）的邻域，$\varphi: U \to R^n$是使$\varphi(U)$与开球同胚的同胚映射．对U的各点P与R^n的$\varphi(P)$的坐标对应而在邻域U中引进坐标，这种坐标叫**局部坐标**．组(U, φ)叫做**区图或卡**．随着眼于坐标还是着眼于邻域而把它叫做**局部坐标系**或**坐标邻域**．

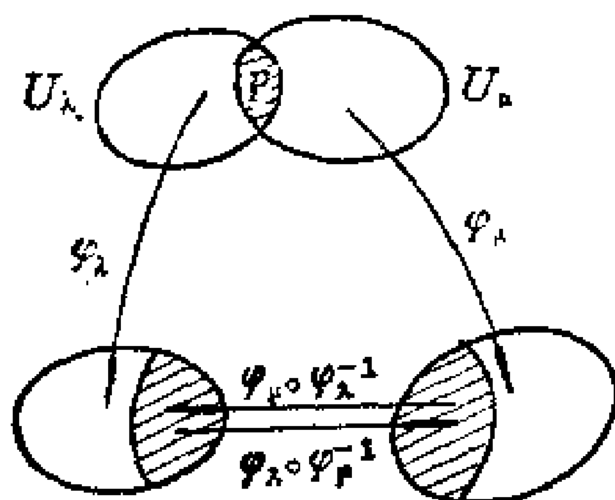


图4—4

对于拓扑流形M，取坐标邻域$(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$（局部坐标为$u^i_{(\lambda)}$）$(\lambda\in\Lambda)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，和坐标邻域$(U_\mu,\ \varphi_\mu)$（局部坐标为$u^i_{(\mu)}$）$(\mu\in\Lambda)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,n)$。对于$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$的各个$\lambda,\ \mu\in\Lambda$，$R^n$的区域之间的映射为

$$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)$$

而$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$是$P\in U_\lambda\cap U_\mu$从$\varphi_\lambda(P)$映为$\varphi_\mu(P)$的映射。因为$P$关于$(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$的局部坐标为$u^i_{(\lambda)}$，而$P$关于$(U_\mu,\ \varphi_\mu)$的局部坐标为$u^i_{(\mu)}$，所以映射$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$的解析表示式为

$$u^i_{(\mu)}=u^i_{(\mu)}(u^1_{(\lambda)},u^2_{(\lambda)},\cdots,u^n_{(\lambda)})\ (i=1,2,\cdots,n)\qquad(1.4)$$

上式无非是表示两个坐标邻域$(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$，$(U_\mu,\ \varphi_\mu)$的共同区域中各点局部坐标之间的变换式。

（3）由坐标邻域构成M的开覆盖$\{(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)\}$（局部坐标为$u^i_{(\lambda)}$）$(\lambda\in\Lambda)$中，对于$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$的各个$\lambda,\ \mu\in\Lambda$，当表示同胚映射$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$的$n$个函数（1.4）都是$c^r$类$(r\geqslant1)$的可微函数时，则称$M$为**$n$维$c^r$类（无边界）微分流形**。如果（1.4）是解析的，则称M为**n维解析流形**。

【定义】当$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$时，表示$\phi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$和$\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1}$的$n$个函数

$$u^i_{(\lambda)}=u^i_{(\lambda)}(u^1_{(\mu)},u^2_{(\mu)},\cdots,u^n_{(\mu)}),\quad u^i_{(\mu)}\in\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\qquad(1.5)$$

显然是c^r类的。因为$u^i_{(\lambda)}$是$(u^1_{(\mu)},\ \cdots,\ u^n_{(\mu)})$的函数，而$u^i_{(\mu)}$又是$(u^1_{(\lambda)},\ \cdots,\ u^n_{(\lambda)})$的函数。由复合函数微分法的莱布尼兹(Leibniz)法则可知

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u^i_{(\lambda)}}{\partial u^j_{(\mu)}} \frac{\partial u^j_{(\mu)}}{\partial u^k_{(\lambda)}} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \qquad (1.6)$$

成立，上式的行列式是（1.4），（1.5）式的函数行列式之积，其值等于1。

微分流形M，由它的坐标邻域所构成的开复盖$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，$(\lambda \in \Lambda)$，对于 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$的 λ，μ，如果常可选取局部坐标变换（1.4）的函数行列式为正，则称流形 M 是**可定向的**。否则为**不可定向的**。

【定义】设M的坐标邻域（U, φ）（局部坐标为 u^i）对于$U \cap U_\lambda \neq \phi$的各个$\lambda \in \Lambda$，在 $U \cap U_\lambda$上的局部坐标变换式为 c^r类时，则称之为**容许坐标邻域**。

在微分流形M的某个区域Ω上定义的函数 f，可以看做是$f: \Omega \to R$的映射。当$\Omega \cap U_\lambda \neq \phi$，则做为映射 $f \circ \varphi_\lambda^{-1}: \varphi_\lambda(\Omega \cap U_\lambda) \to R$可以用$n$个变量的实函数

$$(f \circ \varphi_\lambda^{-1})(u^1_{(\lambda)}, \cdots, u^n_{(\lambda)}), \quad (u^i_{(\lambda)} \in \varphi_\lambda(\Omega \cap U_\lambda))$$

表示。当它满足微分流形的条件（3）时，则对于 $\Omega \cap U_\lambda \neq \phi$的各个 $\lambda \in \Lambda$，这个函数若为c^s类（$s \leqslant r$），则称f 在Ω上为c^s类函数。这样在M的区域上定义的函数与在 R^n 中定义的函数一样。这样为在流形上使用分析学开辟了道路。

对于（无边界）n 维微分流形，由拓扑空间是否紧致来定义紧致流形（叫闭流形）或非紧致流形（开流形）。

〔例 5〕欧几里得空间是流形。

〔例 6〕欧几里得空间R^3的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 是解析流形。

（证明）首先由R^3在球面S^2上引入诱导拓扑。因为R^3是满足第二可数公理的豪斯道夫空间，所以S^2也是满足第二可数公

理的豪斯道夫空间。显然S^2的各个点都存在与R^3的圆片同胚的邻域。设$P\in S^2$在R^3中的坐标为$(x(P),y(P),z(P))$，取$U_x^+=\{P|\ P\in S^2, x(P)>0\}$，$U_x^-=\{P|\ P\in S^2, x(P)<0\}$，$P$在$U_x^+$中的局部坐标为$(y(P), z(P))$，而在$U_x^-$中为$\{z(P), y(P)\}$。这时确定$U_x^+$的局部坐标的同胚映射为从$U_x^+$到$(y, z)$面上的正投影，而$U_x^-$的正投影面是$(y, z)$而对直线$y=z$做对称变换后的平面（保持定向性）。同理可确定局部坐标邻域U_y^+，U_z^+，U_y^-，U_z^-。显然它们覆盖S^2。

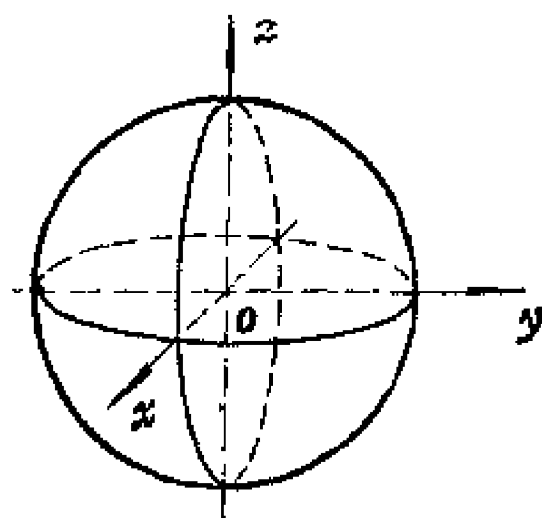


图4—5

例如对于$U_y^+\cap U_z^+$的点，当把点看做U_y^+的点时，它的局部坐标为(z,x)，看做U_z^+的点时，它的局部坐标为(x,y)。因此，局部坐标的变换式为：

$$x=x,\quad y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$$

而雅可比函数行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,x)}=-\frac{\partial y}{\partial z}=z/y>0$$

而对于$U_y^+\cap U_z^-$中，U_z^-的局部坐标为(y,x)，所以

$$\frac{\partial(y,x)}{\partial(z,x)}=-z/y>0$$

对于交不空的其它任两坐标邻域之间的坐标变换也是一样，从而S^2是可定向的二维解析流形。

同理，设R^{n+1}的坐标为$(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$，则中心在原点半径为$a$的超球（$n$维球面）$S^n$为

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2+(x^{n+1})^2=a^2$$

这个S^n是n维解析流形。

〔例 7〕 在R^3中由 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面是微分流形。

(证明) 设F是在 Euclid R^3 中定义的函数。满足方程 $F(x, y, z)=0$的点集M叫做曲面，又设F是c^r类$(r\geqslant 1)$ 的函数，而且在M上任何点，F_x，F_y，F_z不同时为0，因此在M上的任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$的切平面唯一确定，即

$$(F_x)_0(x-x_0)+(F_y)_0(y-y_0)+(F_z)_0(z-z_0)=0$$

确定。这说明M本身无奇点。我们证明它与S^2同样是二维微分流形。

在M上引入从R^3诱导的拓扑，显然它是满足第二可数公理的豪斯道夫空间。假定在$P_0\in M$有$(F_z)_0\neq 0$，考虑映射 $\psi: R^3\to R^3$，即 $(x, y, z)\to(x, y, F(x, y, 0))$，由于 $(F_z)_0\neq 0$，由反函数定理可知在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的充分小邻域 W，它的象 $\psi(W)$ 在点 $(x_0, y_0, F(x_0, y_0, z_0))$ 即 $(x_0, y_0, 0)$ 的邻域中，ψ是受W限制 $\psi|W:\to\psi(W)$的同胚映射。在这里 (x,y)平面用R^2表示，设$V=\psi(W)\cap R^2$，显然 $(\psi|W)^{-1}(V)=W\cap M$，$(\psi|M)^{-1}(V)$的点 $z(x,y)$做为在V上定义的函数记做 $(x, y, z(x, y))$，它满足

$$F(x, y, z(x,y))=0,\quad z(x_0, y_0)=z_0 \qquad (1\cdot 7)$$

$(\psi|W)^{-1}$是把V映入M的映射，$\psi|W$ 是同胚映射，注意M具有相对拓扑，因此V与M的子集 $(\psi|W)^{-1}(V)$同胚。从而在M的各点P，具有与R^2的开集（开圆片）同胚的邻域。令$U=(\psi|W)^{-1}(V)$，取 $\psi|U: U\to V\in R^2$，则 $(U, \psi|U)$是点P_0的坐标邻域，且 (x, y)是它的局部坐标。

我们假定在P_0处 $(F_z)_0\neq 0$，显然同样地也会有 $(F_x)_0\neq 0$，($(F_y)_0\neq 0$)，则在点P_0周围可取以 (y,z) （(z,x)）为坐标的坐

标邻域，因为点P_0是M上的任意点，所以M可以被这样的坐标邻域所覆盖。现在设(U,φ)，(U',φ')是M的上述的两个坐标邻域，且$U\cap U'\neq\phi$。如果它们同时以(x,y)为局部坐标，则在$U\cap U'$中的坐标变换是$\varphi(U\cap U')\subset R^2$的恒等变换。又如果在$(U,\varphi)$中的局部坐标为$(x,y)$在$(U',\varphi')$中的局部坐标为$(y,z)$时，则在$U\cap U'$中的坐标变换，可利用(1·7)式的函数$z(x,y)$，即

$$y=y,\quad z=z(x,y)$$

它是c^r类的可微函数。同理可知

$$x=x(y,z),y=y$$

也是c^r类可微函数。其它情形也是一样，从而证明了M是c^r类的二维微分流形。

〔例 8〕射影平面P^2是微分流形。

（证明）射影平面P^2，做为集合可看做不同时为零的三实数组(x,y,z)全体的集合M，M的两个元(x,y,z)，(x',y',z')，当存在实数$\rho\neq0$且

$$x'=\rho x,\quad y'=\rho y,\quad z'=\rho z \tag{1·8}$$

时叫做等价的，这样等价类的全体构成P^2。

当把(x,y,z)看做欧几里得空间R^3的点的直角坐标，O为原点，过O的直线为l，以$l-\{O\}$为等价类，则用

$$P^2=(R^3-\{O\})/\sim$$

来表示（$/\sim$是表示将$R^3-\{O\}$的等价点分为等价类）。

$$\pi: R^3-\{O\}\to R^2$$

是它的自然射影（对$R^3-\{O\}$的各点与它所属等价类对应的映射），这样在P^2中引入了商拓扑。即P^2的子集U，它的逆象$\pi^{-1}(U)$是$R^3-\{O\}$的开集，且仅限于这时定义为P^2的开集。设P^2的两点为P，Q，过O与P和O与Q的直线各为l，m用$l-$

$\{O\}$，$m-\{O\}$表示，在上述拓扑下 P，Q 在P^2上邻近是局限于 l，m 在 R^3 中有较小的夹角。

显然各等价类有单位球面S^2：$x^2+y^2+z^2=1$ 上的一组直径的对径点与它对应。在这里如果规定S^2上各点与它的对径点等价，则 $P^2=S^2/\sim$。由自然射影 $\pi:S^2\to P^2$，它在P^2中引入商拓扑。显然与前面的拓扑相同。

对于 S^2 的各点与它的对径点对应的映射叫**对径映射**，用 a：$S^2\to S^2$表示。取 $\iota:S^2\to S^2$ 为恒等映射，因为，$a^2=\iota$ 所以 $\Gamma=\{\iota,a\}$是作用于S^2的变换（同胚映射）所构成的群。P^2可以看做S^2以Γ为模的商空间（各个 $P\in S^2$ 和属于Γ的各变换的象的集合看做等价类，在等价类的集合中引入商拓扑）用

$$P^2=S^2/\Gamma$$

表示。

显然上面给定拓扑的P^2是满足第二可数公理的豪斯道夫空间。在 S^2 上定义的映射 π：$S^2\to P^2$，使 $U_x=\pi(U_x^+)$。因为 $\pi^{-1}(U_x)=U_x^+\cup U_x^-$是$S^2$的开集，所以$U_x$是$P^2$上的开集。$P^2$ 上的坐标邻域为 U_x，$P\in U_x$ 的局部坐标为 $\pi^{-1}(P)\cap U_x^+$ 的坐标 (y, z)。同样地来确定 U_y，U_z的局部坐标。

$\{U_x, U_y, U_z\}$ 覆盖P^2，为了考虑 $U_y\cap U_z$ 的坐标变换，把$U_y\cap U_z$分成两个连通分支，即$\pi(U_y^+\cap U_z^+)$，$\pi(U_y^+\cap U_z^-)$。显然在 $(U_y^+\cap U_z^+)$中坐标变换的函数行列式在 $U_y^+\cap U_z^-$ 中是正的。对于$\pi(U_y^+\cap U_z^-)$ 中点$P(x, y, z)\in U_y^+\cap U_z^-$的坐标 (z,x)与S^2中 P 的对径点 $a(P)=(x', y', z')\subset U_z^+$的坐标 (x', y')之间的坐标变换为 $x'=-x$，$y'=-y$，且 $y>0$，$z<0$ $(z'>0)$，所以它的函数行列式为

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(z, x)}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(z, x)}=-\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{z}{y}<0.$$

关于 $U_x \cap U_z$，$U_z \cap U_y$的坐标变换也是一样．它说明P^2是不可定向的二维解析流形。

同理可知，n维射影空间P^n是n维解析流形．但是当 P^n 的 n为偶数时是不可定向的，n为奇数时是可定向的．

〔例 9〕一般线性群 $GL(2,R)$ 构成微分流形．

（证明）在代数中已知，由行列式不为零的二阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2)$ 的全体，关于阵的乘法构成群．这个群叫做二阶的一般线性群，用记号 $GL(2,R)$ 表示．为了在这个群上引进拓扑，令$A=(a_{ij})$与数空间R^4的点$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$对应．设这个对应为 $\varphi: GL(2,R)\to R^4$．这样用R^4的拓扑诱导出 $GL(2,R)$ 的拓扑．设U为$GL(2,R)$的子集，仅当 $\varphi(U)$ 为R^4的开集时定义为 $GL(2,R)$的开集．在R^4中去掉$x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}=0$的点 $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$所构成的闭集$F$，这时 $GL(2,R)$ 与 R^4-F在φ下同胚．但R^4-F仅由R^4的一个坐标邻域所覆盖，所以 $GL(2,R)$ 是可定向的 4 维解析流形．但是这个流形与 $\det(A)>0$，<0 相应地分为两个弧状连通的微分流形．

对于微分流形$GL(2,R)$的元A, B,做为解的元定义积AB,设为 $G=GL(2,R)$．这样从直积空间$G\times G$到G的映射 $f: G\times G\to G$ 看做 $f(A,B)=AB$，从G的诱导拓扑与矩阵积的定义可知 f 是连续映射．同样，与一G 的各元对应的逆元的映射 $g: G\to G$也是连续映射．一般地当集合G满足条件：

（1）G是n维微分流形．

（2）G是抽象群．

$(3)_1$ 给出群的结合法则的映射 $f: G\times G\to G$ 是连续映射．

$(3)_2$ 给出群的逆元的映射$g: G\to G$是连续映射．

这时G叫做李(Lie)群．显然$GL(2,R)$是 4 维李群．同理

n 维一般线性群 $GL(n,R)$是n^2维李群。

下面我们介绍关于有边界流形的概念。

设欧几里得空间R^n的坐标为 $(u^1,\cdots,u^n)$，现在考虑半空间 $u^n\geqslant 0$，对它从R^n引进诱导拓扑所得到的拓扑空间为H^n，它与开球$\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2<a^2$，$(a>0)$的交为$D^n$，为方便把它叫做半开球。

【定义】设豪斯道夫空间N满足：

（1）满足第二可数公理，

（2）它的各点有与开球或半开球同胚的邻域。

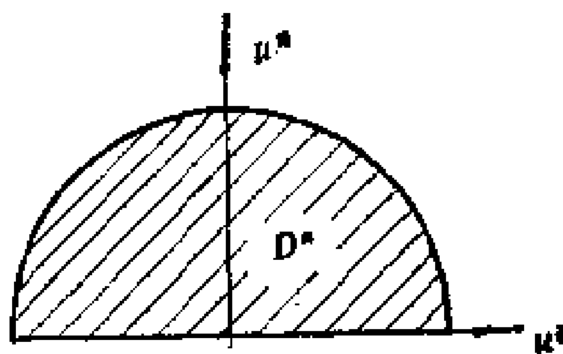


图4—6

设U是与半开球D^n同胚的邻域，$\varphi:U\to D^n$是同胚映射，(U,φ)是坐标邻域，而局部坐标为$(u^1,u^2,\cdots,u^n)$。在R^n中把满足 $u^n=0$的点集看做R^{n-1}。如果$P\in U$而$\varphi(P)\in R^{n-1}$ 时，则P的任何坐标邻域(V,ψ)不与开球同胚。因为如果它与开球同胚，于是有 $P\in U\cap V$ 的邻域W，使$\varphi(W)$是$D^n\subset H^n$的开集。因为$\varphi(W)$含点$\varphi(P)$ $(\in R^{n-1})$，做为R^n的点集，它不能是开集。另方面$\psi(W)$是开球$\psi(V)\subset R^n$的开集，因此在同胚映射 $\psi_0\varphi^{-1}:\varphi(W)\to\psi(W)$ 使非开集映为开集则产生矛盾。因此，取P的任何充分小的邻域都与半开球同胚，具有这种性质的点叫做N的**边界点**，它的全体叫做N的**边界**，以记号 ∂N表示。具有边界的微分流形N叫做**有边界的n维流形**。

§1·4 切向量与切空间

设含点$P_0\in M$的容许坐标邻域为 (U,φ)，局部坐标为$(u^1,$

$\cdots, u^n)$，P_0的坐标为 $(u_0^1, \cdots, u_0^n)$. 设以P_0为始点含于U的可微曲线由 $\lambda:[0,1]\to U\subset M$给出. $\varphi(\lambda(t))\subset\varphi(U)\subset R^n$ 的局部坐标 $u^i(t)$是可微函数. 又对于各 $t\in[0,1]$在 $\lambda(0)=P_0$ 处 $\dot{u}^i(t)$, $(n=1, 2, \cdots, n)$ 不同时为零. 现在定义曲线的切向量.

【定义】设在点 P_0 的邻域中定义的可微函数全体的集合为 $\mathfrak{F}$. 如果$f\in\mathfrak{F}$的定义域为 $D(f)$，则 $\varphi(Df\cap U)$上的函数$f\circ\varphi^{-1}$是n个变量 $(u^1, \cdots, u^n)$的可微函数. 因此

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\lambda(t))-f(\lambda(0))}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\varphi^{-1})\varphi(\lambda(t)))-(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(\lambda(0)))}{t}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\right)_{u0}\cdot\left(\frac{du^i}{dt}\right)_0 \tag{1·9}$$

上式右边$(\ \ )_{u0}$表示括弧内函数在 $u^i=u^i_0$的值，$(\ \ )_0$是在 $t=0$ 时的值. 上式右边确定 R^n 中曲线 $\varphi\cdot\lambda:[0,1]\to R^n$ 在点 $\varphi(P_0)$ 的切向量（可以看做是曲线$\lambda:[0,1]\to U$在点 P_0 的切向量在φ下的象），它由分量 $\left(\frac{du^i}{dt}\right)$来确定，因此式(1.9) 的值可以看做是切向量作用于 f 所产生的值，记做

$$Xf=\lim_{t\to 0}\frac{f(\lambda(t))-f(\lambda(0))}{t} \tag{1.10}$$

用 (1·10) 式定义作用于$\mathfrak{F}$的**算子X**.

对于上述算子X，当 $a,b\in R$; $f,g\in\mathfrak{F}$显然有

$$X(af+bg)=aXf+bXg \tag{1.11$_1$}$$

$$X(f\cdot g)=Xf\cdot g(P_0)+f(P_0)\cdot Xg \tag{1.11$_2$}$$

成立.

【定理 1】 若存在算子 $X: \mathscr{F} \to R$ 满足条件 (1.11)，则在 $U(P_0)$ 内有以 P_0 为始点的可微曲线 $\lambda: [0,1] \to U$，而对任意的 $f \in \mathscr{F}$，Xf 可表示为 (1.10) 式。

（证明） 首先对于 $(1.11)_2$ 式，令 $f \equiv a \neq 0$ （常数），$g \equiv 1$，可知 $X(1) = 0$，另方面对 $(1.11)_1$ 式，令 $f \equiv 1$，$b = 0$，则 $X(a) = a \cdot X(1)$ 可知 $X(a) = 0$。

其次，对于 $f \in \mathscr{F}$ 在 $D(f) \cap U$ 内 P_0 的邻域 V 中，使 R^n 的线段 $\overline{\varphi(P_0)\varphi(P)} \subset \varphi(V)$ 成立构成星形，这时考虑函数 $f \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(V)$ 上的限制 $F = f \cdot \varphi^{-1} | \varphi(V)$，令

$$G(u,t) = F(u_0 + t(u - u_0)) \quad t \in [0,1]$$

这里 $G(u,t)$ 是 $G(u^1, \cdots, u^n, t)$，$F(u)$ 是 $F(u^1, \cdots, u^n)$ 的简写，因为

$$G(u,1) - G(u, 0) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t} dt$$

设 $F_i = \partial F / \partial u^i$，则得

$$F(u) - F(u_0) = \sum_{i=1}^{n} (u^i - u_0^i) \int_0^1 F_i(u_0 + t(u - u_0)) dt$$

这里设

$$G_i(u) = \int_0^1 F_i(u_0 + t(u - u_0)) dt$$

则有

$$F(u) = F(u_0) + \sum_{i=1}^{n} (u^i - u_0^i) G_i(u)$$

对这个等式，利用 V 上的 $2n$ 个函数

$$\psi^i = u_0^i \varphi, \quad g_i = G_i \circ \varphi$$

则函数 f 在 V 上可分解为

$$f = f(\varphi_0) + \sum (\psi^i - u^i_0) g_i$$

对这个函数，作用以算子 X，由 (1·11) 式得

$$Xf = X(f(P_0)) + \Sigma X(\psi^i - u_0{}^i)g_i(P_0)$$
$$+ \Sigma(\psi^i(P_0 - u_0{}^i)Xg_i$$

由于 $f(P_0)$ 是常数，$X(f(P_0)) = 0$，同样 $X(u_0{}^i) = 0$，又

$$\psi^i(P_0) = u^i(\psi(P_0)) = u_0{}^i$$
$$g_i(P_0) = G_i(\varphi(P_0)) = G_i(u_0) = F_i(u_0)$$

所以

$$Xf = \Sigma(X\psi^i)\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}\right)_{u0} = \Sigma\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\right)_{u0}\xi^i \quad (1\cdot12)$$

这里设

$$\xi^i = X\psi^i \quad (\xi^i\text{是实数})$$

在这里，从 V 内点 P_0 出发的曲线 $\lambda:[0,1]\to V$ 在 φ 下的象曲线 $\varphi\circ\lambda:[0,1]\to R^n$，确定在点 $\varphi(P_0)$ 以 ξ_i 为分量的向量是切向量。如果用 $u^i(t)$，$(t\in[0,1])$ 来表示则 $(du^i/dt) = \xi^i$，而且可知

$$Xf = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\right)_{u0}\left(\frac{du^i}{dt_0}\right). \quad (1\cdot13)$$

它表明从(1·11)式导出(1·10)式成立。这说明满足条件(1·11)的算子 X 可以看做是在点 P_0 处 M 的切向量。

【定义】在满足条件(1·11)的算子 X 全体的集合 M_p 中，定义加法和数乘运算，即

$$(X+Y)f = Xf + Yf$$

和
$$(cX)f = c(Xf)$$

则 M_p 构成向量空间。而且它的元 X 叫做在点 P 处 M 的切向量。

【定义】 现在用

$$e_i(f) = \left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\right)_{u0} \quad (1\cdot14)$$

定义 $e_i:\mathfrak{F}\to R$，$(i=1, 2, \cdots, n)$。e_i 也是在点 P_0 的切向量可知在条件(1·11)中将 X 换成 e_i 也成立。e_i 可以看做是在 $\varphi(U)$ 中过

点$\varphi(P_0)$与u^i轴平行的直线的切向量$(\partial/\partial u^i)_{u0}$（分量为（0，…，0，1，0，…，0），1是第$i$个分量）在$\varphi$下的原象。由(1·12)式可得

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i \tag{1·15}$$

所以M_{p0}的维数至多是n，另方面当$\Sigma c^i e_i\in M_{p0}$，$(c^1, c^2, \cdots, c^n\in R)$等于$M_{p0}$的0元时，将这个算子作用在$U$上函数$u^k\circ\varphi$，（固定$k=1, 2, \cdots, n$），可知$c^k=0$，则$e_1, e_2, \cdots, e_n$是$M_{p0}$上线性无关的向量，从而$M_{p0}$的维数等于$n$。$\{e_1, \cdots, e_n\}$是向量空间$M_{p0}$的基底。而且在邻域$U$内各个点都是确定的。因为它与坐标邻域$(U,\varphi)$自然结合，所以叫做**自然基底或自然标架。**

【命题1】对于已给二坐标邻域(U,φ)（局部坐标为$u^1, \cdots, u^n$），$(\bar{U},\bar{\varphi})$，（局部坐标为$\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n$），当$U\cap\bar{U}\neq\phi$时，在$U\cap\bar{U}$中局部坐标变换式为$\bar{u}^a=\bar{u}^a(u^1, \cdots, u^n)$。则自然标架$\{e_i\}$与$\{\bar{e}_a\}$之间有

$$e_i=\Sigma\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\bar{e}_a \tag{1·16}$$

（证明）设$P_0\in\bar{U}\cap\bar{U}$，f为P_0邻域上定义的可微函数，因此

$$e_i(f)=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}=\frac{\partial(f\circ\bar{\varphi}^{-1}\circ\bar{\varphi}\varphi^{-1})}{\partial u^i}$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial(f\cdot\bar{\varphi}^{-1})}{\partial\bar{u}^a}\ \frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}=\Sigma\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\bar{e}_a(f)$$

【定义】设M是n维，M'是m维的c^r类$(r\geqslant1)$微分流形。关于连续映射$\phi: M\to M'$。对于在M'的任意区域Ω'中所定义的各个c^r类可微函数$f':\Omega'\to R$，如果在M的开集$\phi^{-1}(\Omega')$中所定义的函数$f'\circ\phi:\phi^{-1}(\Omega)\to R$也是$c^r$类可微函数时，则$\phi$叫做$c^r$类

的可微映射.

对于M的各点P，含P的容许坐标邻域为(U,φ)（局部坐标为u^i，$i=1,2,\cdots,n$）。含$\phi(P)$的M'的容许坐标邻域为(V,ψ)（局部坐标为v^α，$\alpha=1,2,\cdots,m$）.因为v^α是V上的c^r类可微函数，所以$v^\alpha\circ\phi$是$U\cap\phi^{-1}(V)$的c^r类可微函数。这个映射ϕ在$U\cap\phi^{-1}(V)$上的限制，可写微

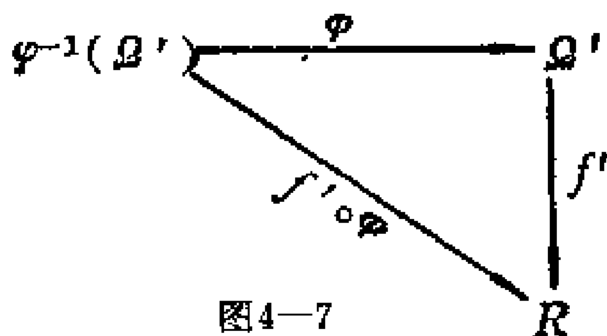


图4—7

$$v^\alpha=v^\alpha(u^1,\ \cdots,\ u^n)\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\tag{1·17}$$

右边m个函数是$\varphi(U\cap\phi^{-1}(V))\subset R^n$的$n$个变量的$c^r$类可微函数。反之如果这样的函数常为$c^r$类，则$\phi$是$c^r$类可微映射。如果映射$\phi:M\to M'$是满单射，且$\phi$，$\phi^{-1}$都是$c^r$类，则$\phi$叫做**$c^r$类同胚映射**。这时说$M,M'$为**$c^r$类同胚**.

【命题 2】设M,M'是微分流形，$\phi:M\to M'$是可微映射。$P\in M$，$X\in M_p$，$P'=\phi(P)$。设$\mathfrak{F}'$是在M'中P'的邻域内所定义的可微函数全体的集合。而且$X':\mathfrak{F}'\to R$，$f'\in\mathfrak{F}'$用

$$X'f'=X(f'\circ\phi)\tag{1·18}$$

定义，则X'是在点P'处M'的切向量.

（证明）这个事实可通过关于X'类似的（1·11）条件式来验证。

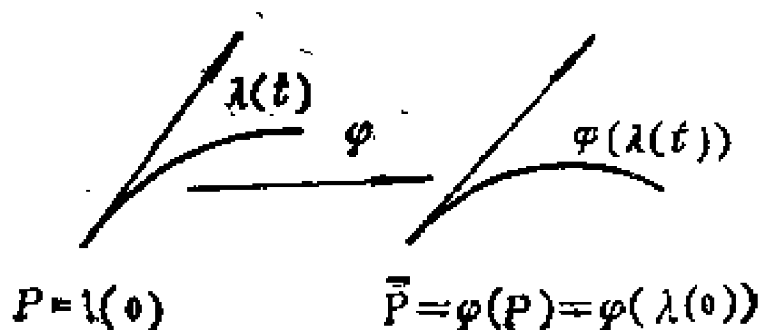


图4—8

如果取X是曲线 $\lambda:[0,1]\to M$，$(\lambda(0)=P)$ 在 P 的切向量，则

$$X(f'\circ\phi)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(f'\circ\phi)\lambda(t))-(f'\circ\phi)(\lambda(0))\}$$

所以 $$X'f'=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{f'(\phi(\lambda(t)))-f'(\phi(\lambda(0)))\}$$

这个等式说明X'是曲线$\lambda:[0,1]\to M$在ϕ下的象曲线 $\phi\circ\lambda:[0,1]\to M'$在$P'$处的切向量。

在点$P\in M$和$P'=\phi(P)\in M'$的周围，若取坐标邻域U，则$\lambda:[0,1]\to U$用函数 $u^i(t)$ 表示。切向量X关于(U,φ)的自然分量ξ^i由(du^i/dt)给出。X'关于(V,ψ)的自然分量 $\xi'^\alpha=(du^\alpha/dt)$给出，而它们之间有

$$\xi'^\alpha=\sum_{i=1}^{n}(\partial v^\alpha/\partial u^i)_{u_0}\xi^i \quad (\alpha=1, 2, \cdots, m) \qquad (1\cdot 19)$$

关系。它可从（1·17）右边，把 u^1，$\cdots$，u^n以$u^1(t),\cdots,u^n(t)$代换，并在$t=0$点微分该式，即可得（1·19）式。

§1·5　浸入和嵌入，R^n的曲面

【定义】设M是n维，M'是m维（$n\leqslant m$）（无边界）的微分流形。已给可微映射 $\phi:M\to M'$，与各切向量$X\in M_p$对应地有由(1·18)式定义的$X'\in M'_{p'}$，$(P'=\phi(P))$。它确定切空间之间的线性映射$\phi_{*p}:M_p\to M_{p'}$，称之为**在P处ϕ的微分映射**。对于M的各个点 P，ϕ_{*p} 为单射时，即象$\phi_{*p}(M_p)$的维数也是n，换言之，$\text{rank}(\phi_{*p})=n$ 时，则称ϕ为**从M到M'的浸入**。如果ϕ是从M到M'中的单射，且ϕ是浸入时，则ϕ叫做**从M到M'的嵌入**。

【定理 2】设M,M'是微分流形，且 $f:M\to M'$是嵌入。如果M紧致，则由M和M'在 $f(M)$上所诱导的两种拓扑一致。

〔证明〕 由假定，$f: M \to f(M) \subset M'$是连续映射，$f(M)$由M'引入诱导拓扑，因此$f: M \to f(M)$是连续的，只须证明它的逆映射$f^{-1}: f(M) \to M$也连续就可以，因为这时f成为同胚映射，因此$f(M)$上两拓扑一致.

现在设V是M的开集，则$M - V$是M的闭集，从M紧致的假定可知$M - V$紧致；从而它的象$f(M - V)$也是M'的紧致子集. 但是M'是豪斯道夫空间，所以$f(M - V)$也是M'的闭集. 从而$f(V) = f(M) \cap (M' - f(M - V))$是$f(M)$的开集. 从而$(f^{-1})^{-1}(V)$是开集合，这说明$f^{-1}$是连续映射，即$f$是同胚映射.

【定义】 设M是无边界（或有边界）的二维流形. $f: M \to R^n$是浸入或嵌入. 我们把流形与映射的组$S = (M, f, R^n)$或简记做(M, f)，称之为$\boldsymbol{R}^n$的（二维）**曲面**. 在本书中所考虑的曲面就是这种曲面. 当$f: M \to R^n$是嵌入时，做为它的象，只要我们考虑$f(M)$就可以. 这时在$f(M)$上由f从M到$f(M)$的同胚映射而引入拓扑。若把M与$f(M)$看做相同的，则这个嵌入由包含映射

$$\iota: M \to R^n, \quad \iota(P) = P, \quad P \in M \subset R^n$$

给出，即$\iota(M) = M$.

当M的原有拓扑与由R^n诱导的拓扑一致时，则(M, ι)叫做$\boldsymbol{R}^n$**的正规曲面**.

我们在定义R^n的曲面时，不仅考虑嵌入而且考虑更广泛的浸入.

〔例10〕 球面S^2是正规曲面.

它在R^3中由方程$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a > 0)$给出. 它可由$R^3$引入的相对拓扑而构成微分流形. 若利用包含映射$\iota: R^2 \to R^3$，可以看做是$S^2$嵌入于$R^3$.所以它是一个正规曲面.

〔例11〕标准环面是正规曲面。

这个曲面可以看做微分流形 S^1 自身做拓扑积所得的环面 $S^1\times S^1$在 R^3 中的嵌入，它的参数表示为

$$\begin{cases} x=(a\cos\varphi+b)\cos\theta \\ y=(a\cos\varphi+b)\sin\theta \\ z=a\sin\varphi \qquad (0<a<b,\theta,\varphi\in[0,2\pi)) \end{cases} \tag{1·20}$$

对于θ，$\varphi\in(-\infty,+\infty)$时，可以看做 $R^2=R\times R$到 R^3 的浸入。

〔例12〕开麦比乌斯(Möbius)带是开曲面。

设 $I=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$f$:〔0:2$\pi$〕$\times I\to R^3$ 的映射由

$$f(u,v)=c(u)+ve(u)$$

给出。但是 c:〔0,2π〕$\to R^3$是由

$$(c^1,\ c^2,\ c^3)=(\cos u,\ \sin u,\ 0)$$

所定义的圆。e:〔0,2π〕$\to R$为由

$$(e^1,\ e^2,\ e^3)=\left(\cos\frac{u}{2}\cos u,\cos\frac{u}{2}\sin u,\ \sin\frac{u}{2}\right)$$

所定义的单位向量场。可以验证

$$c(2\pi)=c(0),\quad e(2\pi)=-e(0)$$

显然 $f(2\pi,\ -v)=f(0,v)$。而且线段 $f(2\pi\times I)$ 与线段 $f(0\times I)$方向相反地重合。在点集 $f((0,2\pi)\times I)$中由 R^3引入诱导拓扑的二维流形是开麦比乌斯带，它在包含映射下可嵌入于R^3，做为R^3的曲面—— 麦比乌斯带。

§1·6　纤维丛

【命题3】设M是n维微分流形，它的切空间全体为 $T(M)$，如果M_p为$P\in M$的切空间，则

$$T(M)=\bigcup_{P\in M} M_p$$

现在在$T(M)$中引入自然拓扑，它是$2n$维微分流形。

（证明）首先任取 $X\in T(M)$，则有$X\in M_p$的点$P\in M$，这个点P与X对应，从而确定了映射

$$\pi: T(M)\to M$$

显然 $P=\pi(X)$，$\pi^{-1}(P)=M_P$。现在设 (U,φ)（局部坐标为u^1，…，u^n）为 M 的坐标邻域，对于各个$X\in M_P$，$(P\in U)$，则由点P的局部坐标 $u^i(i=1, 2, \cdots, n)$和 X 关于P的自然标架 $\{e_i\}$分量 v^i，即由$X=\Sigma v^i e_i$确定的v^i组 (u^i, v^i)，如果把它看做映射 $\Phi:\pi^{-1}(U)\to\varphi(U)\times R^n$ 这个映射是满单射。对于$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{P\in U} M_P$ 由Φ引入 $\varphi(U)\times R^n$ 的拓扑，即由Φ这个同胚映射而引进拓扑。于是可以取$X\in\pi^{-1}(U)$的邻域系做为如上引入拓扑的X的邻域系。设覆盖M的坐标邻域系为 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，$(\lambda\in\Lambda)$，因为 $\{\pi^{-1}(U_\lambda);\lambda\in\Lambda\}$覆盖 $T(M)$，所以在$T(M)$的各点X确定了上述的邻域。

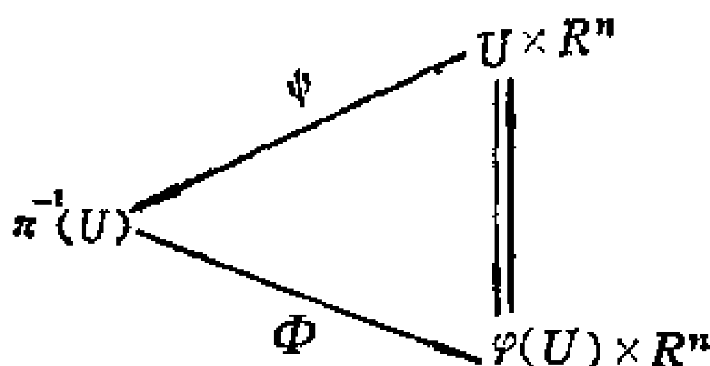


图4—9

易知，由这样的邻域系使 $T(M)$成为豪斯道夫空间。于是我们把 $(\pi^{-1}(U),\Phi)$ 看做$T(M)$的坐标邻域，它的局部坐标为上述的 (u^i, v^i)。如果当$U\cap\bar{U}\neq\phi$时，M的局部坐标的变换式取做

$$\bar{u}=\bar{u}(u^1, \cdots, u^n) \tag{1·30}$$

则在 $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(\bar{U})$ 中$T(M)$的局部坐标的变换式由

$$\bar{v}^a=\Sigma\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}v^i \tag{1·31}$$

给出，显然是可微的。

其次，M的开集的可数基 $\{U_\lambda\}$ $(\lambda=1, 2, \cdots)$ 显然可选

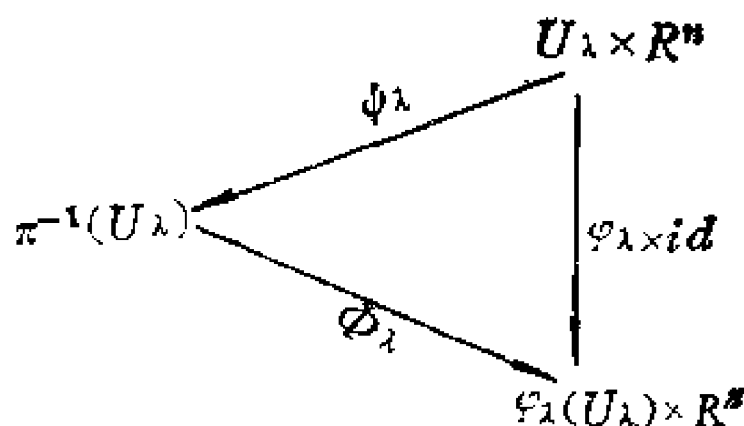


图4—10

取具有映射φ_λ的容许坐标邻域 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，而 R^n的开集的可数基为 $\{V_\alpha\}$，$(\alpha=1, 2, \cdots)$，而

$$\psi_\lambda: U_\lambda\times R^n\rightarrow\pi^{-1}(U_\lambda)$$

为如上图的 $(\varphi_\lambda\times id)^{-1}\Phi_\lambda$ 的同胚映射（$\varphi_\lambda\times id$ 是 $(P, v)\rightarrow(\varphi_\lambda(P), v)$ 的映射），显然$\pi: T(M)\rightarrow M$是开映射，可知$\{\psi_\lambda(U_\lambda\times U_\alpha)\}$，$(\lambda, \alpha=1,2,\cdots)$ 是$T(M)$的开集的可数基。从而$T(M)$满足第二可数公理。因此可知 $T(M)$是 $2n$ 维微分流形。

映射 $\pi: T(M)\rightarrow M$ 具有下面重要性质。

（1）对于各个 $P\in M$，映射 $\pi: T(M)\rightarrow M$ 的逆映射 $\pi^{-1}(P)$与 R^n同胚。

（2）设 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$（局部坐标为 $x^i_{(\lambda)}$）$(\lambda\in\Lambda)$ 为坐标邻域，它复盖M。这时存在同胚映射

$$\psi_\lambda: U_\lambda\times R^n\rightarrow\pi^{-1}(U_\lambda)$$

使 $$\pi\circ\psi_\lambda(P, v)=P$$

（3）用 $\psi_{\lambda,P}(v)=\psi_\lambda(P, v)$ 确定映射

$$\psi_{\lambda,P}: R^n\rightarrow\pi^{-1}(P)$$

时，对于 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$的各个 $\lambda,\mu\in\Lambda$，$P\in U_\lambda\cap U_\mu$，则

$$\psi_{\mu,P}{}^{-1}\circ\psi_{\lambda,P}: R^n\rightarrow R^n$$

是群 $GL(n,R)$ 的元（因为 $\bar{v}=\psi_{\mu,P}{}^{-1}\circ\psi_{\lambda,P}(v)$ 时，$\psi_{\lambda,P}(v)=\psi_{\mu,P}(\bar{v})$，所以 v，$\bar{v}$的分量之间有(1.31)成立）。

（4）若定义 $\psi_{\mu\lambda}(P)=\psi_{\mu,P}^{-1}\circ\psi_{\lambda,P}$，$P\in U_\lambda\cap U_\mu$ 时，则映射 $\psi_{\mu\lambda}:U_\mu\cap U_\lambda\to GL(n,R)$ 连续。

由上面的性质，我们定义纤维丛。

【定义】我们把 $T(M)$，π，M的组 $(T(M),\ \pi,\ M)$ 叫 **M的切丛**。$T(M)$ 是**全空间**，M是**底空间**，π 是**射影**，$GL(n,R)$ 是**结构群**。

具有类似性质的微分流形与映射和群的组叫做**纤维丛**。

下面我们在微分流形上定义向量和张量。

【定义】已知微分流形M在点P的切空间 M_P 是向量空间，因此，它具有对偶空间$M^*{}_P$，$M^*{}_P$的元 ω是 M_P 的线性形式，把它可以看做$\omega:M_P\to R$的线性映射。把 $M^*{}_P$ 的元之间的加法定义为

$$(\omega+\omega')(X)=\omega(X)+\omega'(X)\quad X\in M_P$$

又对于 $M^*{}_P$ 的元与实数的乘法定义为

$$(c\omega)(X)=c\omega(X)\quad c\in R$$

这样 $M^*{}_P$ 也构成一个向量空间，它的元叫做**共变向量**。使$\omega(X)=0$的 $X\in M_P$的全体构成 M_P的线性子空间。如果 M_P的基取为含P的M的坐标邻域 $(U,\ \varphi)$（局部坐标为$x^1,\cdots,x^n$）的自然标架 $\{e_i\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，而$M^*{}_P$的n个元 $\theta^1,\cdots,\theta^n$ 由

$$\theta^i(e_j)=\delta^i_j \tag{1·32}$$

来确定，从对于各个 $\omega\in M^*{}_P$唯一地表示为

$$\omega=\Sigma\omega_j\theta^j,\quad \omega_j=\omega(e_j)$$

可知 $\{\theta^i\}$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是 $M^*{}_P$的基底。则 $\{\omega_j\}$，$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是关于 (U,φ) 的自然标架（正确地说是对偶自然标架）**的共变向量ω的分量**。

【定义】设M上各点P的共变向量全体为

$$^*T(M)=\bigcup_{P\in M}M^*{}_P$$

为了在它上面引入拓扑，首先设对于各个 $\omega \in M^*_P$

$$\pi': {}^cT(M) \to M$$

是使各个 $\omega \in M_P^*$ 与 P 对应的映射，于是对于 M 的坐标邻域 (U, φ)（局部坐标为 $u^1, \cdots, u^n$），各个 $\omega \in M^*_P$，$(P \in U)$ 与 P 的局部坐标 u^i，$(i=1, 2, \cdots, n)$ 以及在 P 的对偶标架 $\{\theta^i\}$ 中 ω 的分量 ω_i 的组 (u^i, ω_i) 对应。这样就确定了映射

$$\Phi': \pi'^{-1}(U) \to \varphi(U) \times R^n$$

因为这个映射是满单射，利用它在 $\pi'^{-1}(U) = \bigcup_{P \in U} M_P^*$ 中由 $\varphi(U) \times R^n$ 引入诱导拓扑。这时与 $T(M)$ 的情形一样，可知 ${}^cT(M)$ 是豪斯道夫空间。当把 $(\pi'^{-1}(U), \Phi')$ 看做 ${}^cT(M)$ 的坐标邻域（局部坐标为 (u^i, ω_i)），则它与 M 的坐标邻域 $(\bar{U}, \bar{\varphi})$（局部坐标为 $\bar{u}^a$）$(U \cap \bar{U} \neq \phi)$ 对应的 $\pi'^{-1}(\bar{U}, \bar{\Phi})$，（局部坐标为 $\bar{u}^a$，$\bar{\omega}_a$）的共同部分 $\pi'^{-1}(U) \cap \pi'^{-1}(\bar{U})$ 中的局部坐标的变换式为 (1·30) 式和

$$\bar{\omega}_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^a} \omega_i \tag{1·33}$$

这里 $u^i = u^i(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$ 是 (1·30) 式就 $u^1, \cdots, u^n$ 反解所得的函数表示式。因为由 (1·16) 式已知

$$\omega_i = \omega(e_i) = \omega\left(\sum \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \bar{e}_a\right)$$

$$= \Sigma \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \omega(\bar{e}_a) = \Sigma \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \bar{\omega}_a$$

现在把 (U, φ) $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ 的立场调换之后，就可得到 (1·33) 式。从 (1·30) 和 (1·33) 式可知 ${}^cT(M)$ 是微分流形。(1·33) 式是共变向量关于自然标架的变换式，因为它与 (1·16) 式的形状完全相同，这就是共变这个辞的来源，与之相对的把 M_P 的元——切向量叫做**反变向量**。因此，把从 $({}^cT(M), \pi', M)$ 叫做 M 的

余切丛。

切向量、共变向量以及它们的场，都是做为流形以及它的浸入的曲面的几何研究对象。其重要概念之一是张量与张量场。现在对于张量场介绍于下：

【定义】设M是n维微分流形，在$P\in M$上的切空间为M_P，则双线性映射

$$\alpha: M_P\times M_P\to R$$

叫做在点P处的二阶共变张量或叫(0，2)型张量。这里所谓双线性α是指

$$\alpha(a_1X_1+a_2X_2,Y)=a_1\alpha(X_1,Y)+a_2\alpha(X_2,Y)$$

其中 X_1，X_2，$Y\in M_P$，a_1，$a_2\in R$，和

$$\alpha(X,\ b_1Y_1+b_2Y_2)=b_1\alpha(X,\ Y_1)+b_2\alpha(X,\ Y_2)$$

其中 X，Y_1，$Y_2\in M_P$，b_1，$b_2\in R$，成立。

设含点P的M的容许坐标邻域 (U,φ)，(局部坐标为 u^1，…，u^n)的自然标架为 $\{e_i\}$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，若令

$$\alpha(e_i,\ e_j)=a_{ij}$$

关于同一标架，设X，Y的分量各为 ξ^i，η^i，显然

$$\alpha(X,Y)=\alpha(\Sigma\xi^ie_i,\Sigma\eta^je_j)=\Sigma a_{ij}\xi^i\eta^j$$

从而映射α由n^2个实数组(a_{ij})所确定。(a_{ij})，$(i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 叫做α关于自然标架$\{e_i\}$的分量。

现在设含点$P\in M$的另一个容许坐标邻域为 $(\bar{U},\bar{\varphi})$ (局部坐标为$\bar{u}^1$，…，$\bar{u}^n$)，它对应的自然构架为$\{\bar{e}_a\}$，$a=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)。如果在 $U\cap\bar{U}$ 中的局部坐标变换式为 (1·30) 式，则由 (1·19) 式可得

$$a_{ij}=\sum_{a,b=1}^{n}\left(\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\right)_{\varphi(P)}\left(\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j}\right)_{\varphi(P)}\bar{a}_{ab}\qquad(1\cdot34)$$

关于在点P的二阶共变张量 α，对于各个X，$Y\in M_P$，当$\alpha(X$，

$Y)=a(Y,X)$时，即它的分量有 $a_{ij}=a_{ji}$，$(i,j=1, 2, \cdots, n)$ 成立时，称a为**二阶对称共变张量**．同样，当各$X,Y\in M_P$时，有 $a(X,Y)=-a(Y,X)$成立，即它的分量 $a_{ij}=-a_{ji}$，$(i,j=1, 2, \cdots, n)$ 成立时，称a为**二阶交代张量或二阶共变反对称张量**．

【定义】设在点 $P\in M$上的二阶共变张量的全体为$M_{2,P}$，对于 $a,a'\in M_{2,P}$定义运算

$$(a+a')(X,Y)=a(X,Y)+a'(X,Y) \quad X,Y\in M_P$$

$$(ca)(X,Y)=ca(X,Y) \quad c\in R$$

可知 $M_{2,P}$是一个向量空间，它的维数为 $2n$。令

$$T_2(M)=\bigcup_{P\in M} M_{2,P}$$

设使$M_{2,P}$ 与P的对应为

$$\pi: T_2(M)\to M$$

设 (U,φ)，(局部坐标为 $u^1, \cdots, u^n$)为 M的坐标邻域，对于各个 $a\in M_{2,P}$，$(P\in M)$，确定了P的局坐标u^i和在P处关于自然标架 a 的分量 a_{ij} 的组 (u^i, a_{ij})．把它看做映射 Φ: $\pi^{-1}(U)\to\varphi(U)\times R^n$，则 Φ 是满单射．这时，在 $\pi^{-1}(U)=\bigcup_{P\in U} M_{2,P}$中由$\phi$引进 $\varphi(U)\times R^{n^2}$ 的诱导拓扑，则与$T(M)$的情形一样，引入诱导拓扑的 $T_2(M)$是豪斯道夫空间．

如果我们把 $(\pi^{-1}(U), \Phi)$（局部坐标为 (u^i, a_{ij})）做为$T_2(M)$的坐标邻域，$(\bar{U},\bar{\varphi})$（局部坐标为 $\bar{u}^a$)为$U\cap\bar{U}\neq\phi$ 的M的坐标邻域，如果和它对应的$T_2(M)$的坐标邻域为$(\pi^{-1}(\bar{U}), \bar{\Phi})$，(局部坐标为 $\bar{u}^a$, $\bar{a}_{ab}$)，则可知在$\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(\bar{U})$中的坐标变换由(1.30)和

$$\bar{a}_{ab}=\Sigma\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^a}\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}a_{ij}$$

的组给出。与$T(M)$一样，可知 $T_2(M)$是微分流形。

对于自然射影$\pi: T_2(M) \to M$，有与$T(M)$的（1）—（4）的类似性质．从而（$T_2(M)$，π，M）是纤维丛．

同样地，利用双线性形式展开

$$\beta: M_p^* \times M_p^* \to R$$

$$\gamma: M_p^* \times M_p \to R$$

而产生2阶反变张量（(2.0)型张量）以及(1.1)型张量．由它所构成的微分流形记做$T^2(M)$，$T_1^1(M)$，由它们到M上的自然射影以及M的三元组给出纤维丛．例如，考虑4重线性映射

$$K: M_p^* \times M_p \times M_p \times M_p \to R$$

这时K叫做在点P的(1.3)型张量．(1.3)型张量全体$T_3^1(M)$是微分流形，它与它到M上的自然射影与M这三元组（$T_3^1(M)$，π，M）也构成纤维丛．

§1·7 向量场和张量场

【定义】设M是c^r类（$r \geqslant 1$）的微分流形．如果对于M的各点P，唯一地有M在P的切向量X_p与它对应，换句话说，$X: M \to T(M)$映射与自然射影$\pi: T(M) \to M$之间具有

$$\pi \circ X(P) = P, P \in M$$

性质时，称这种映射X叫做**M上的向量场**．若X是连续映射，则这个场叫**连续向量场**．若映射为c^s类（$1 \leqslant s \leqslant r-1$）时，则这个场叫**$C^s$类向量场**．这一事实与$M$上各个$c^s$类可微函数$f$，和由

$$(Xf)(P) = X_p f, \quad X_p = X(P)$$

所定义的M上函数Xf在M上各点连续（或c^s类）等价．易于看到，它与在各个邻域(U, φ)的自然标架中分量ξ^i，（$i=1, 2, \cdots, n$）在$\varphi(U)$连续（或c^s类）的说法等价．在M上X的不连续点和X的零点（$X(P)=0$的点P）统称为向量场X的**奇点**．在场的研究中，关于奇点邻域的研究是重要而较难的课

题.

〔例13〕在欧几里得平面R^2上，关于直交坐标系（坐标为u^1，u^2），由 $u^1e_1+u^2e_2$（(e_1, e_2)是自然标架，它与 u^1，u^2轴上的单位向量一致）所表示的向量场．它是以 R^2 的各个点 $P(u^1, u^2)$为始点，以（u^1，u^2）为分量的向量，而原点是这个场的奇点（图4—11）．

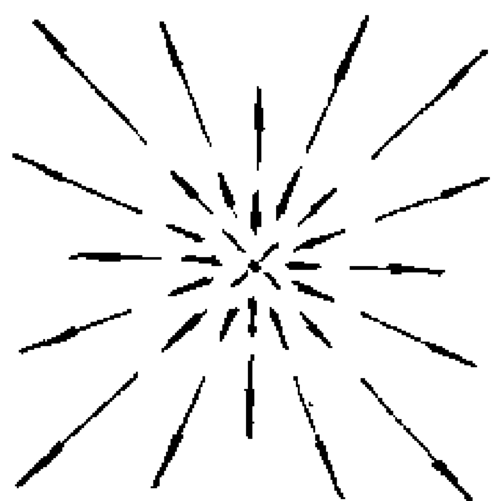


图4—11

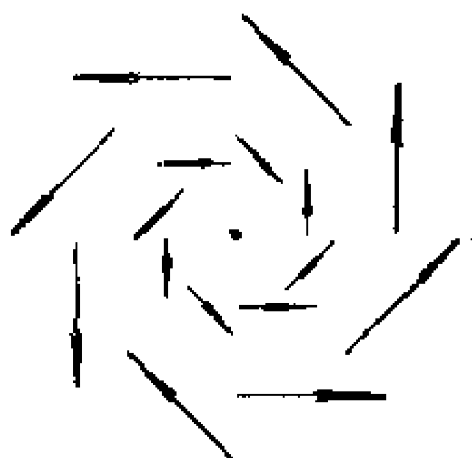


图4—12

〔例14〕在Euclid平面 R^2上，由 $-u^2e_1+u^1e_2$所确定的向量场，它在R^2上各个点P是把例13的向量$u^1e_1+u^2e_2$旋转90°所得到的向量场，原点是奇点（图4—12）．

〔例15〕球面S^2上的向量场

设欧几里得空间R^3中的直交坐标为(x, y, z)，以原点为中心，半径为 a 的球面为 S^2．当把它看做球面与 $y=0$ 平面相交的大圆，由 z 轴分为两个半圆，令其中之一为c，由它

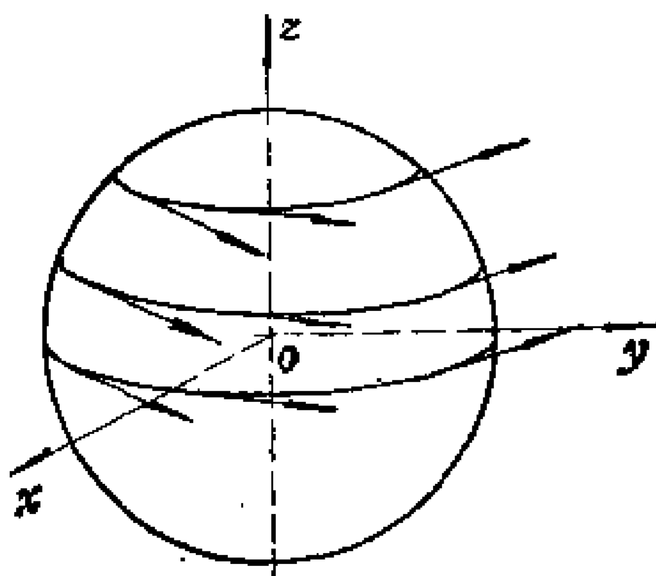


图4—13

绕z轴旋转所生成的球面为 S^2时．平面 $z=c$，$(0\leqslant|c|<a)$ 与S^2的交线是曲线C上点旋转的轨迹叫做**平行圆**．又旋转的各瞬间C所占的位置叫**子午线**．

在S^2上给赤道定向，随之相应地平行圆也定向，在赤道以及各平行圆各点引单位切向量，这时在北极 $N(0,0,a)$，南极$S(0,0,-a)$不论怎样，在N与S是具不连续点的向量场．

反之，若在S^2与 $z=c$，$(0\leqslant|c|<a)$ 相交的平行圆上各点引长度为 $a-|c|$ 的切向量，则在N与S对应0向量，虽然 S^2上向量场连续，但N，s仍是奇点．

〔例16〕 环面上的向量场．

标准环面，如〔例11〕，它是由 $T^2=S^1\times S^1$ 到 R^3中的嵌入 $f:S^1\times S^1\to R^3$而得到的曲面，(1.20)式给出f，把T^2也可以看做绕z轴的旋转曲面．设θ为第一参数，φ为第二参数．在θ曲线（平行圆） $f|S^1\times\varphi:S^1\times\varphi\to R^3$（固定$\varphi$）上各点引单位切向量，当$\varphi$变动时，则得$T^2$上的可微向量场．同样对于$\varphi$曲线（子午线）$f|\theta\times S^1:\theta\times S^1\to R^3$的单位切向量，同样地产生$T^2$上的可微向量场．哪个向量场都是无奇点的向量场．

【定义】 设M是 n维微分流形，X是M上的向量场．曲线$f:I\to M$（或 $f:S^1\to M$），对于各个$t\in I$（或 $t\in S^1$）在点 $f(t)$ 曲线的切向量与 $X(f(t))$一致，这时 $f(t)$ 叫做**X的积分曲线**．

设含 $f(t)$ 的坐标邻域为(U,φ)，（局部坐标为 u^i），X 关于 (U,φ)的自然标架 $\{e_i\}$的分量为 X^i，$\varphi(f(t))\in R^n$的坐标为 $u^i(t)$，则 $f:I\to M$为积分曲线的条件，可以证明是 $u^i(t)$是常微分方程组

$$\frac{du^i}{dt}=X^i(u^1,\ \cdots,\ u^n)$$

的解．如果给定$P\in M$，当P不是M的奇点时，则过P的X积分

曲线是唯一确定的．例如〔例14〕中以原点为中心的同心圆．〔例16〕中第一个向量场所对应的积分曲线是平行圆，而第二个向量场所对应的积分曲线是子午线．

下面讨论向量场X，Y的叫做泊松(Poisson)括弧的运算．

【定义】在M上给定两个可微向量场 X，Y．对于各个点$P\in M$的邻域中定义的可微函数的集合记做$\mathscr{F}$，对于 $f\in\mathscr{F}$，Xf，Yf 是由

$$(Xf)(P)=X_P\cdot f,\quad X_P\equiv X(P)$$

定义在 f 的定义域上的可微函数．令

$$[X,Y]_P\cdot f=X_P(Yf)-Y_P(Xf)$$

可知 $[X,Y]_P\in M_P$．

关于P处的坐标邻域 $(U,\ \varphi)$，(局部坐标为 x^i)的自然标架 $\{e_i\}$，设X,Y的分量为 ξ^i，η^i，则

$$[X,\ Y]_P=\sum_{j=1}^{n}\left(\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)$$

但右边是在点$\varphi(P)$的值．从这个式子可知，对于各个点P都有对应的 $[X,Y]_P\in M_P$，则在M上产生可微向量场，用记号$[X,Y]$ 表示，叫做 X,Y 的**泊松括弧**．

其次，从n维微分流形M到 ${}^cT(M)$的映射ω：$M\to{}^cT(M)$与自然射影 π：${}^cT(M)\to M$之间满足

$$\pi\circ\omega(P)=P$$

时，则ω为M上的共变向量场．若ω 连续（可微）则 ω 叫做连续（可微）的向量场．这个结论与M上任意连续（可微）向量场X，由

$$(\omega(X))(P)=\omega_P(X_P);\quad \omega_P\equiv\omega(P)$$

所定义的函数$\omega(X)$连续（可微）等价．同时也等价于在这个

坐标邻域的自然标架中，ω 的分量是局部坐标的连续（可微）函数。

现在举例如下。

〔例17〕 gradf。

设 f 是在M上定义的可微函数，ω_P 对于各个$X_P \in M_P$，是由 $\omega_P(X_P) = X_P f$ 定义的，显然$\omega_P \in M_P^*$。这样在M上各个点的共变向量的集合ω与M上各个点的可微向量场X有

$$(\omega(X))(P) = \omega_P(X_P) = X_P f = (Xf)(P)$$

关系，而且ω是M上的可微共变向量场。称之为 f 的**梯度**也叫**陡度**。以记号$\text{grad} f$ 表示。在坐标邻域(U, φ)（局部坐标为u^1，$\cdots$，u^n）的自然标架中，它的分量在$P \in U$处显然为$(\partial f/\partial u^i)_{\varphi(P)}$。当$M$上有使 $\text{grad} f = 0$ 的点时，这个点叫做 f 的**临界点**。给出 f 极大值或极小值的点当然是临界点，也有不是极大或极小值的临界点。关于临界点的性质和它的个数与流形M的拓扑性质有关，这里不讨论。

〔例18〕 共变向量场的外微商。

设ω是M上的可微共变向量场，对于M的任意切向量X_P，$Y_P \in M_P$，$(P \in M)$，把它扩张后得M上的可微向量场取X, Y，令

$$2\alpha_P(X_P, Y_P) = X_P \cdot \omega(Y) - Y_P \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]_P)$$

α_P 是在点P的 2 阶共变张量场，它与 X_P，Y_P 的扩张方法无关。于是由

$$2\alpha(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y])$$

所定义的 $\alpha(X, Y)$ 是M上的可微函数。这样定义的α是 2 阶共变张量场。显然它是交代张量场。它关于容许坐标邻域(U, φ)（局部坐标为 u^1，$\cdots$，u^n）的自然标架 $\{e_i\}$，α 的分量显然是

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial u^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial u^j}\right) \tag{1.35}$$

这个张量场叫做ω的外微商。当$n=3$时，把它记做$\mathrm{Rot}\omega$叫做ω的旋度。

关于外微分和外形式是微分几何重要工具详细可参看芬尼柯夫著：卡当的外形式法一书。

§2 黎曼流形上的几何

§2·1 曲面的第一基本张量

设M是参数曲面，$f:M\to R^n$ 是浸入。考虑 R^n的曲面 $S=\{M, f, R^n\}$. 对于M的任意切向量$X,Y\in M_P$, $(P\in M)$, X,Y的模以及它们的夹角 θ, 由 R^n在点$f(R)$的向量f_*X, f_*Y 的模以及它们的夹角来定义。（当M是 R^n的子集，且$f=\iota$（ι是包含映射）时，则f_*X, f_*Y可以看做X, Y本身）.

【定义】 令$g_P(X,Y)=\langle f_*X, f_*Y\rangle$ (2.1)

其中记号$<,>$表示R^n中向量的内积，则X的模$\|X\|$, X, Y夹角θ定义为

$$\|\mathbf{X}\|=\sqrt{g_P(X,X)} \tag{2.2}$$

$$\cos\theta=g_P(X,Y)/\|\mathbf{X}\|\cdot\|\mathbf{Y}\| \tag{2.3}$$

把g_P看做 $M_P\times M_P\to R$的映射，因为它是双线性的，因此它具有性质

$$\left.\begin{array}{l} g_P(X,Y)=g_P(Y,X) \\ \text{若 } X\neq 0, \text{ 则 } g_P(X,X)>0, \ g_P(0,0)=0 \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

因为g_P是切空间M_P中的欧几里得度量，所以 g_P 在点P是**恒正的2阶对称共变张量**。

【定义】 设 $X.Y$是M的任意可微向量场，令

$$g(X, Y)(P)=g_P(X_P, Y_P)$$

其中X_P，Y_P是X,Y在P点的值，因为

$$g(X,Y)=\langle f_*X,\ f_*Y\rangle$$

所以 $g(X,Y)$是M上的可微函数，所以g是M上恒正可微2阶对称共变张量场。它是由浸入f在M上诱导的度量张量场，也称之为曲面$S=\{M,\ f,\ R^n\}$的**第一基本张量场**。因为R^n的内积本身构成R^n的2阶对称共变张量，用g_0表示。则

$$g(X,Y)=g_0(f_*X,\ f_*Y) \tag{2.5}$$

而g与g_0之间关系为

$$g=f^*g_0 \tag{2.5'}$$

当$f:M\to R^n$是嵌入时，在$f(M)$中引入了M的诱导拓扑，可以看做$f(M)$本身就具有这个度量g。如果把M与$f(M)$看做相同的，把这个曲面表示做（M，ι，R^n）（ι是包含映射），则$M=\iota(M)$可以考虑具有这个度量g。另方面，由本章§1定理2可知，$f:M\to R^n$不是嵌入而是浸入时，上面结论也正确。

【定义】设M的容许坐标邻域为(U,φ)（局部坐标为u^1，u^2），它们的自然标架$\{e_1,\ e_2\}$在f下的象

$$B_i=f_*e_i\quad(i=1,2) \tag{2.6}$$

是U中u^i曲线的象曲线的切向量。如果取$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to R^n$为$(u^1,\ u^2)\to x^\alpha(u^1,\ u^2)$，$(\alpha=1,2,\cdots,n)$，则在$R^n$中$B_i$的分量为

$$B_i=\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \tag{2.7}$$

因此，对于自然标架$\{e_1,\ e_2\}$，g的分量由

$$g_{ij}=g(e_i,\ e_j)=\langle B_i,\ B_j\rangle\quad(g_{ij}=g_{ji}) \tag{2.8}$$

给出，g_{ij}，$(i,j=1,\ 2)$显然是$\varphi(U)$上的可微函数。有时把$(u^1,\ u^2)$记做$(u,\ v)$，把g_{11}，$g_{12}=g_{21}$，g_{22}记做E，F，G。对于各个点$P\in U$，$\{B_1(P),\ B_2(P)\}$是在点$f(\varphi)$，切于U的象$f(U)$的线性子空间$f_*(M_P)$的基底，这可从f是浸入而得到。

$f_*(M_P)$ 叫做在点 $f(P)$ 上 S 的**切平面**.

由（2．2），（2．3）可知，做为二维微分流形M上的切向量的模和它们的夹角的定义的本质是M上的 2 阶对称恒正的共变张量场，它不必须是把M浸入于欧几里得空间R^n来诱导度量. 可以在M上抽象地，与浸入无关的某种方法来给出 2 阶对称正定的共变张量场 g，则在M上就说给出了**黎曼度量**，这时称g 为**基本度量张量场**. M与g的对 (M, g) 叫做 **2 维黎曼流形**. 同样，可以定义n维$(n\geqslant3)$ 黎曼流形. 今后如不特别声明，所谓黎曼流形(M, g)都指的是M是c^{r+1}类$(r\geqslant2)$ g是c^r 类的.

〔例 1〕 在R^3的直交坐标系中，以原点为中心，以a为半径的球面 S^2，它的北极和南极各为 N, S。现在设平面 (u, v)上的带 $(-\infty, \infty)\times\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 为D，映射 $f{:}D\to R^3$定义为

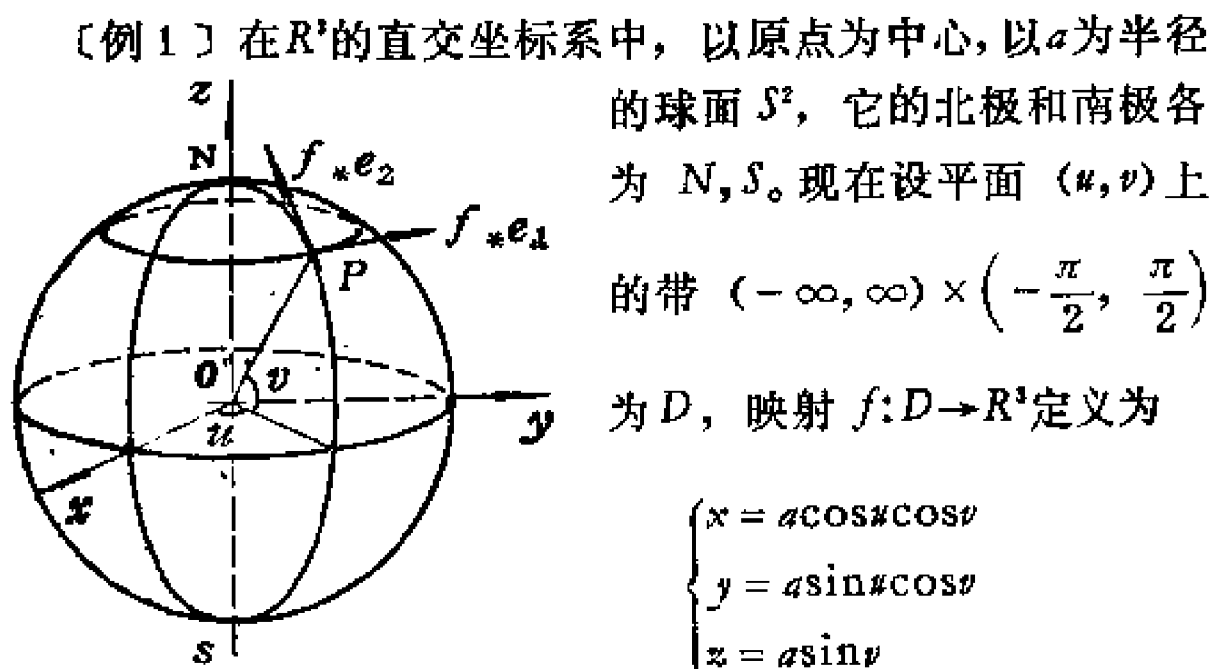


图4—14

$$\begin{cases} x = a\cos u\cos v \\ y = a\sin u\cos v \\ z = a\sin v \end{cases}$$

显然 $f(D) = S^2 - \{N, S\}$. 如果把D看做微分流形，(u, v) 看做它的局部坐标，它的自然标架为 $e_1 = \partial/\partial u$，$e_2 = \partial/\partial v$，而且

$$f_*e_1 = (-a\sin u\cos v,\ a\cos u\cos v, 0)$$

$$f_*e_2 = (-a\cos u\sin v, -a\sin u\sin v, a\cos v)$$

由这个向量的第一，第二分量所构成的行列式为$a^2\sin v\cos v$，在D上仅在条件$v=0$时为零，从而当 $v\neq0$ 时，f_*e_1，f_*e_2 线性无关，又在$v=0$时，把它的值代入上式也能得到 f_*e_1，f_*e_2 线性

无关．从而 f 是浸入．由这个浸入在 D 上所诱导的黎曼度量 f^*g。关于自然标架的分量，由（2．8）式可得

$$g_{11}=a^2\cos^2 v,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=a^2 \tag{2.9}$$

令 $$D'=(u_0,\ u_0+2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

f 在 D' 上的限制为 $f|D'$，则 $(f(D'),\ (f|D')^{-1})$ 是 S^2 的坐标邻域，(u,v)，$((u,v\in D')$ 是它的局部坐标，而且（2．9）式是包含映射 $i:S^2\to R^3$ 所诱导的度量 $g=i^*g_0$（S^2 的标准度量）在这个坐标邻域的自然标架中的分量．

〔例 2．2〕设环面 $T^2=S^1\times S^1$ 的第一和第二个圆的角参数各为 θ,φ，嵌入 $f:T^2\to R^3$ 为

$$\left.\begin{aligned}x^1&=(a\cos\varphi+b)\cos\theta\\ x^2&=(a\cos\varphi+b)\sin\theta\\ x^3&=a\sin\varphi\end{aligned}\right\}(0\leqslant\theta,\ \varphi<2\pi) \tag{2.10}$$

这时从 R^3 到 T^2 的诱导度量叫做 T^2 的标准黎曼度量。因为在 T^2 的各个点 P 具有以 (θ,φ) 为局部坐标的坐标邻域，设它的自然标架为 $\{e_1,\ e_2\}$，则 f_*e_1，f_*e_2 是以（2.10）式对 θ，φ 的编微商为分量的向量，即由

$$f_*e_1=(-(a\cos\varphi+b)\sin\theta,\ \ (a\cos\varphi+b)\cos\theta,\ \ 0)$$

$$f_*e_2=(-a\sin\varphi\cos\theta,\ \ -a\sin\varphi\sin\theta,\ \ a\cos\varphi)$$

给出．因此，

$$g_{11}=(a\cos\varphi+b)^2,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=a^2$$

环面 T^2 也可以由

$$g_{11}=g_{22}=1,\quad g_{12}=0$$

引入黎曼度量．这是抽象地在 T^2 上引入的最简单的黎曼度量，但从环面 T^2 到 R^3 不论怎样浸入也不可能诱导出度量，可是到 R^4 的嵌入 $f:T^2\to R^4$ 定义为

$$x^1=\cos\theta,\quad x^2=\sin\theta,\quad x^3=\cos\varphi,\quad x^4=\sin\varphi$$

可以诱导度量.

现在定义黎曼流形上曲线的弧长.

【定义】设 n 维黎曼流形 (M,g) 上的可微曲线 C 由映射 $\lambda:[a,b]\to M$ 给出，它的参数为 t. 在点 $\lambda(t)$ 的切向量为 $\dot\lambda(t)$. 从始点 $\lambda(a)$ 到终点 $\lambda(b)$ 的曲线 C 的弧长由

$$J(C)=\int_a^b\|\dot\lambda(t)\|\,dt \tag{2.11}$$

来定义。从始点 $\lambda(a)$ 到点 $\lambda(t)$ 的弧长为

$$s=\int_a^t\|\dot\lambda(t)\|\,dt \tag{2.12}$$

现在设 $\lambda([a,b])$ 含于一个坐标邻域 (U,φ)。(局部坐标为 u^1、…，u^n)，若 $\lambda(t)$ 的局部坐标为 $u^i(t)$ 时，则在这个坐标邻域的自然标架 $\{e_i\}$ 中，$\dot\lambda(t)$ 的分量用 $\dot u^i(t)$ 表示。所以

$$\|\dot\lambda(t)\|=\sqrt{\Sigma g_{ij}(u(t))\dot u^i(t)\dot u^j(t)}$$

当考虑 M 上的任意两点的可微曲线中长度最短的，相当于Euclid空间的线段. 又对于已给的 M 上三点. 每两点由最短线连结可得相当于欧几里得空间的三角形. 这样我们在 M 上可以展开对于 M 上各种图形的几何理论的研究，这就是所谓的黎曼几何.

下面我们给出两个黎曼流形等价的概念.

【定义】设有两个同维数的黎曼流形 (M,g)，(M',g')，而 $f:M\to M'$ 是微分同胚. 如果对于各个 $X\in M_P$，$(P\in M)$，有

$$g(X,Y)=g'(f_*X,\ f_*Y)$$

成立，即在 f 下 M' 的度量 g' 后拖到 M 的 f^*g' 而与 M 的度量 g 相同，这时把 f 叫做从 M 到 M' 的等距映射. 显然

$$\|X\|_g=\|f_*X\|_{g'}$$

$$\angle g(X,Y)=\angle g'(f_*X,\ f_*Y)$$

成立。在这里$\|X\|_g$表示以度量g测得X的大小，$\angle g(X,Y)$表示从度量g测得X,Y的夹角。显然对任意的可微曲线$\lambda:[a,b]\to M$，以度量g测得的长度与它的象$f\circ\lambda:[a,b]\to M'$以$g'$测得的长度相等，因为它们的长度是

$$\int_a^b \|\dot{\lambda}\|_g dt=\int_a^b \|f_*\dot{\lambda}(t)\|_{g'}dt$$

反之，若二黎曼流形$(M,\ g)$，$(M',\ g')$之间存在微分同胚$f:M\to M'$，使M上的各个可微曲线与f下的象的长度相等，则f是等距映射。若二黎曼流形(M,g)，(M',g')之间存在存在等距映射$f:M\to M'$，则该二流形本质上是相同的，否则是不相同的。例如(M,g)是2维黎曼流形，而$f:M\to R^n$是嵌入，这时R^n的度量为g_0，由f后拖到M上的f^*g_0若与g一致时，这个嵌入叫做等长嵌入。但后拖f是浸入也可以，这样可同样的定义等长浸入。

当然一个微分流形M可以通过不同的方法引进不同的度量张量场，而得到不同类型的黎曼流形。

§2·2 作为度量空间的黎曼流形

【定义】设(M,g)是n维黎曼流形，连续曲线C由映射$\lambda:[a,b]\to M$给出。现在在$[a,b]$中存在有限个点$a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$，对于各个$\alpha(\alpha=0,1,\cdots,k-1)$，$\lambda$在开区间$(t_\alpha,\ t_{\alpha+1})$上的限制是$c^1$类的可微曲线，而且在点$\lambda(t_\alpha)$上区间$(t_{\alpha-1},\ t_\alpha)$，$(t_\alpha,\ t_{\alpha+1})$所对应的子弧的切线不一定一致，这时曲线$C$叫做**分段可微曲线**或叫**$D^1$类曲线**，点$\lambda(t_\alpha)$叫**角点**。对于分段可微曲线长度定义为

$$J(C)=\sum_{\alpha=0}^{k-1}\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}}\|\lambda(t)\|\,dt \tag{2.14}$$

现在在M上任取两点A,B，连接 A,B 的所有D^1类曲线的集合为Ω，则

$$\rho(A,B)=\underset{C\in\Omega}{glb}\{J(C)\} \tag{2.15}$$

叫 A，B两点在黎曼流形 (M,g) 上的距离．因为M上两点确定非负的正数 $\rho(A,B)$，把它看做定义在$M\times M$上的函数，这个距离函数ρ显然满足本章 §1〔例 2〕的距离三公理（1）～（3）．M关于这个距离函数构成度量空间．

做为度量空间的M的拓扑与流形M的拓扑有下面关系．

【定理 1】 黎曼流形(M,g)，做为距离空间的拓扑与做为流形的拓扑等价．

（证明）只须证得对于M的任意点 P_0，(i) 做为微分流形的邻域U含有度量空间的邻域 W。(ii) 做为度量空间的邻域W含有做为流形的邻域U就可以．

(i) 设M为做分流形．$P_0\in M$的任意邻域为U_1，取 P_0的坐标邻域之一为 $(U,\ \varphi)$，在$U_1\cap U$中的连通分支设为U_2，当取$(U_2,\ \varphi|U_2)$为 $(U,\ \varphi)$时，只须证明当把M看成度量空间时，这个U含有P_0的邻域．设 $(U,\ \varphi)$的局部坐标为$(u^1,\ \cdots,\ u^n)$，可以认为P_0与原点（0，…，0）对应．取$\varepsilon>0$充分小，使数空间R^n的开球

$$D(\varepsilon):(u^1)^2+\cdots+(u^n)^2<\varepsilon^2$$

使之含于$\varphi(U)$，令$V(\varepsilon)=\varphi^{-1}(D(\varepsilon))$，这时$V(\delta)\subset U$．

另方面，2 次形式 $\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(u^1,\cdots,u^n)X^iX^j$ 在 $(u^1,\ \cdots,u^n)\in\varphi(U)$到处为正定的．在这里令

$$S^{n-1}=\{(X^1,\cdots,X^n)\mid (X^1)^2+\cdots+(X^n)^2=1\}$$

因为$D(\varepsilon)\times S^{n-1}$是紧致的，因此存在正数 c_0，c_1，使

$$c_0\leqslant\sqrt{\sum g_{ij}(u^1,\cdots,u^n)X^iX^j}\leqslant c_1 \qquad (2.16)$$

$$(u^1,\ \cdots,\ u^n)\in D(\varepsilon),\ (X^1,\ \cdots,\ X^n)\in S^{n-1}$$

现在我们证明，属于M而不属于 $V(\varepsilon)$的点Q，使 $\rho(P_0, Q)\geqslant c_0\varepsilon$。为此，我们设连接点$P_0$，$Q$的$D^1$类曲线为$\Gamma$，仅限于进入$U$内部分的$\varphi(\Gamma)$在 R^n中的长度为 l，弧长为 t，表示为λ:[0, l]→R^n ($u(0)$为原点) 设 $\lambda(t)=(u^1(t),\ \cdots,\ u^n(t))$，则$(\dot{u}^1)^2+\cdots+(\dot{u}^n)^2=1$成立。设从点 P_0出发的 Γ最先与 $V(\varepsilon)$的边界相交的交点为 P'与 $t=t'$ 对应，则有

$$c_0\leqslant\sqrt{\sum g_{ij}(u^1(t),\cdots,u^n(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}\leqslant c_1,\ t\in[0,t']$$

成立。上式中间项为 $\|\dot{\lambda}(t)\|$，所以

$$c_0t'=\int_0^{t'}c\,ds\leqslant\int_0^{t'}\|\dot{\lambda}(t)\|\,dt$$

设与区间[0, t']对应的 Γ 的子弧为Γ'，若 Γ'的黎曼度量下的长度为 $J_R(\Gamma')$，$\varphi(\Gamma')$的欧里得度量下的长度为 $J_E(\Gamma')$时，因为 $\varepsilon\leqslant t'$，由上式可知

$$c_0\varepsilon\leqslant J_R(\Gamma')\quad (\leqslant J_R(\Gamma))$$

从而连接P_0，Q的任何D^1类曲线的长度都不小于$c_0\varepsilon$，因此可知

$$c_0\varepsilon\leqslant\rho(P_0, q)$$

从而在黎曼度量下，以点P_0为中心，半径为$c_0\varepsilon$的开球 $W(c_0\varepsilon)$ (叫 $c_0\varepsilon$ 邻域) 有$W(c_0\varepsilon)\subset V(\varepsilon)\subset U$关系。

(ii) 当把M看做度量空间时，点P_0 的任意邻域为W。这时设点P_0 的坐标邻域之一为 (U,φ)，(局部坐标为$u^1,\cdots,u^n$)，$\varphi(P_0)=(0,\ \cdots,\ 0)$，用 (i) 同样的记号，则有 $W(c_0\varepsilon)\subset U$ 的 $c_0\varepsilon>0$。从而存在 P_0的 δ邻域 $W(\delta)$，使 $W(\delta)\subset W\cap W(c_0\varepsilon)\subset U$。现在证明有使$W(\delta)$含有 $V(a)=\varphi^{-1}(D(a))$的 $a>0$ 存

在．为此，假定α固定，从求满足这个条件的α开始．以 R^n 中连接原点 $\varphi(P_0)$ 与 $\varphi(Q)$ 的线段在 φ 下的逆象取为连接点 P_0 与 $Q\in V(\alpha)$（Q 在 U 中的局部坐标为 $(u_0^1, \cdots, u_0^n)$）的曲线为 Γ。当以 t 做为 R^n 中弧长时，线段 $\overline{\varphi(P_0)\varphi(Q)}$ 表示为

$$u^i = u^i_0 t/\sqrt{(u_0^1)^2+\cdots+(u_0^n)^2},\ (i=1,\cdots,n),\ t\in[0,\alpha],$$

Γ 在黎曼度量下的弧长 $J_R(\Gamma)$，由(2.16)式，则得

$$J_R(\Gamma) = \int_0^\alpha \|\lambda(t)\|\, dt \leqslant c_1 \int_0^\alpha dt = c_1\alpha$$

注意，当取 $\alpha<\delta/c_1$ 时，则 $V(\alpha)\subset W(\delta)\subset W$

§2·3 测地线

在前节中，对于n维黎曼流形 (M,g) 上两点 A,B 已经由

$$\rho(A,B) = g.l.b_{c\in\Omega}\{J(c)\}$$

定义了距离$\rho(A,B)$。这里的Ω是连接M上任意两点A,B的可微曲线全体的集合．$J(c)$ 表示属于Ω的曲线 C 的长度．上式的下限是，如果c属于Ω，当曲线看做Ω上函数而给出 J 的最小值，这时在M上连接 A,B的曲线 c 是相对最短线．

【定理 2】设M是C^2类n维黎曼流形，(U,φ) 是M的坐标邻域，$(u^1, \cdots, u^n)$是它的局部坐标。在 U内的曲线C由

$$f:[a,b]\to U\subset M$$

给出．而参数 a,b 所对应的端点为A,B，则连接 A,B的 U内 D^1类曲线 C 是最短线的必要条件为

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{{i \atop jk}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

（证明）首先取在 $[a,b]$上定义的 c^1 类函数 $\xi^i(t)$，$(i=1, \cdots, n)$ 使满足

$$\xi^i(a)=\xi^i(b)=0 \tag{2.17}$$

$I=(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ ($\varepsilon>0$，充分小)，把映射 $F:[a,b]\times I\to U$ 由 $F(t,\tau)$，($t\in[a,b]$，$\tau\in I$)的局部坐标 $u^i(t,\tau)$，即

$$u^i(t,\tau)=u^i(t)+\tau\xi^i(t) \tag{2.18}$$

来确定。这时 $F(a,\tau)=A$，$F(b,\tau)=B$，所以

$$F_\tau(t)=F(t,\tau)$$

即由$F_\tau:[a,b]\to U$所定义的曲线 C_τ 都是连接 A,B的 C^1 类曲线。为求出曲线族 C_τ 为给定曲线C的相对最短线的条件，把所考虑的曲线叫变分曲线，而F叫变分。

曲线 C_τ 的长度，如果

$$\mathscr{F}(u,\ \dot{u})=[\Sigma g_{ij}(u)\dot{u}^i\dot{u}^j]^{1/2} \tag{2.19}$$

则由

$$J(\tau)=\int_a^b\mathscr{F}(u(t)+\tau\xi(t),\dot{u}(t)+\tau\dot{\xi}(t))\,dt$$

给出。从g为c^2类的黎曼度量的假定可知，当把 $\mathscr{F}(u,\dot{u})$ 看做

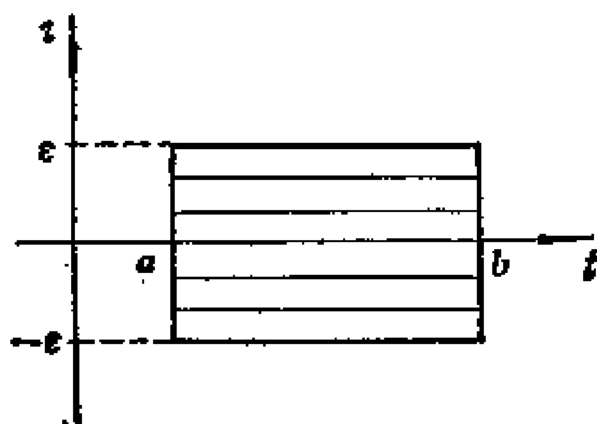


图4—15

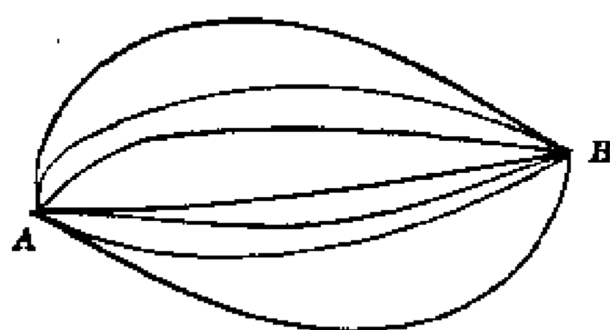


图4—16

以 $u^1,\ \cdots,\ u^n,\ \dot{u}^1,\cdots,\dot{u}^n$为独立变量的 c^2类函数（但$\Sigma(\dot{u}^i)^2\neq0$)时，被积函数对 t 连续，对τ是 c^2 类函数，从而 $J(\tau)$ 存在微商 $J'(\tau)$，为

$$J'(0)=\int_a^b(\mathscr{F}_{u^i}\xi^i+\mathscr{F}_{\dot{u}^i}\dot{\xi}^i)\,dt$$

这里$\mathscr{F}_{u^i}$，$\mathscr{F}_{\dot{u}^i}$ 表示 $\mathscr{F}_{u^i}(u(t),\ \dot{u}(t))$，$\mathscr{F}_{\dot{u}^i}(u(t),\ \dot{u}(t))$。而$J'(0)$叫做给出$C$的长度的积分

$$J=\int_a^b \mathscr{F}(u(t),\ \dot{u}(t))\,dt \tag{2.20}$$

的第一变分。当 c 为最短线时，看做区间 I 上的函数的 $J(\tau)$ 在 $\tau=0$ 必为极小，则 $J'(0)=0$。

现在，特别是考虑 $\xi^2(t)\equiv 0,\ \cdots,\ \xi^n(t)\equiv 0$ 的变分，这时 $J'(0)=0$ 为

$$\int_a^b(\mathscr{F}_{u^1}\xi^1+\mathscr{F}_{\dot{u}^1}\dot{\xi}^1)\,dt=0 \tag{2.20$'$}$$

这时，$\mathscr{F}_{u^1}$，$\mathscr{F}_{\dot{u}^1}\xi$ 是否连续和可微都不知道，注意把上式左边的第一项改写做

$$\int_a^b\mathscr{F}_{u^1}\xi^1dt=\left[\xi^1\int_a^t\mathscr{F}_{u^1}dt\right]_a^b-\int_a^b\dot{\xi}^1\left(\int_a^t\mathscr{F}_{u^1}dt\right)dt$$

则由(2.17)式可知右边第一项为0，所以(2.20)$'$式变为

$$\int_a^b\dot{\xi}^1(\mathscr{F}_{\dot{u}^1}-\int_a^t\mathscr{F}_{u^1}dt)\,dt=0 \tag{2.21}$$

现在再利用下面引理来处理它。

【引理1】 $H(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而且对于在 a,b 均为0的所有 c^1 类函数 $\xi(t)$，如果

$$\int_a^b\dot{\xi}H\,dt=0 \tag{2.22}$$

成立，则 $H(t)$ 在 $[a,b]$ 上是常数。

(证明) 设 c 是由

$$\int_a^bH(t)\,dt=c(b-a)$$

所定义的常数，若令

$$\xi(t)=\int_a^t(H(t)-c)\,dt$$

ξ 显然是在 $[a,b]$ 上定义的 c^1 类函数，显然在 a,b 上为0。从而这个函数满足（2．22）式，即

$$\int_a^b (H(t)-c)H(t)\,dt=0$$

成立。另方面，因为

$$c\int_a^b (H(t)-c)\,dt=0$$

成立，把它与前式相减，则得

$$\int_a^b (H(t)-c)^2 dt=0$$

因为$(H(t)-c)^2$是非负的连续函数，可知 $H(t)\equiv c$。

现在把这个引理应用于（2．21）式，则得

$$\mathscr{F}_{\dot{u}^i}=\int_a^t \mathscr{F}_{u^i}dt+\text{const} \tag{2.23}$$

这个式子的右边是可微函数，令

$$\mathscr{F}_{\dot{u}^i}(u(t),\dot{u}(t))\equiv\mathscr{F}_{\dot{u}^i}[t]$$

上式左边括弧中$\dot{u}^i$的可微性虽不明确并不影响 $\mathscr{F}_{\dot{u}^i}[t]$，的可微性．从而可知对 $i=1$ 时，

$$\mathscr{F}_{u^i}-\frac{d}{dt}\mathscr{F}_{\dot{u}^i}=0 \quad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.24}$$

成立．完全同样也可以导出 $i=2,\ \cdots,\ n$ 也成立．（2．24）式是连接两点A,B的曲线 C 为最短线的必要条件，称（2.24）式为**欧拉（Euler）的微分方程**，欧拉微分方程的解曲线叫做黎曼流形(M,g)的**测地线**。

设测地线为 c^2 类，现在导出测地线微分方程的常用的形式。首先由（2．19）式可得

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial u^l}=\frac{1}{2\mathscr{F}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\dot{u}^j\dot{u}^k \tag{2.25}$$

经过计算，并利用爱因斯坦总和约定．令

$$[jk,l]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right) \tag{2.26}$$

因为 $[jk,l]=[kj,l]$

并注意

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}=[jl,k]+[kl,j] \tag{2.27}$$

取 s 为弧长，则有

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial u^l}=[kl,j]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{ds}{dt}$$

又由（2．12）式知 $\mathscr{F}=\frac{ds}{dt}$，所以

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{u}^l}=\frac{1}{\mathscr{F}}g_{jl}\dot{u}^j=g_{jl}\frac{du^j}{ds}$$

因而 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{u}^l}\right)=\left(g_{jl}\frac{d^2u^j}{ds^2}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

$$=\left[g_{jl}\frac{d^2u^j}{ds^2}+([jk,l]+[lk,j])\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right]\frac{ds}{dt}$$

而且

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial u^l}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{u}^l}\right)$$

$$=-\left(g_{jl}\frac{d^2u^j}{ds^2}+[jk,l]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt} \tag{2.28}$$

阵 (g_{ij}) 的逆阵为 (g^{ij})，(g^{ij}) 也是对称阵，若令

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}=g^{ih}[jk,h]$$

两边乘以 g_{il}，并对 i 做总和，则得

$$[jk,l]=g_{il}\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$$

$[jk,l]$，$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$ 各称为克利斯多夫第一种和第二种记号．利用第二种记号得

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial u^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{u}^i}\right)=-g_{il}\left(\frac{d^2u^l}{ds^2}+\left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

注意$\det|g_{il}|\neq 0$，$\frac{ds}{dt}=\mathscr{F}\neq 0$，则欧拉微分方程为

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (2.29)$$

（2．29）式就是黎曼流形(M,g)上的测地线微分方程．从上式可以看出，若黎曼流形为c^r类（$r\geqslant 2$），则测地线为c^{r+1}类的。

若令$\frac{du^i}{ds}=v^i$代入测地线微分方程（2．29）式，则得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du^i}{ds}=v^i\\&\frac{dv^i}{ds}=-\left\{ {i \atop jk} \right\}v^jv^k\end{aligned}\right\} \quad (2.30)$$

上式是一阶常微分方程组，它也是测地线的微分方程．从这个方程组可直接导出下一定理．

【定理3】在黎曼流形上的各个点，沿各个方向都存在唯一的一条测地线．

【推论1】设(M,g)为n维黎曼流形．而连接两点$A,B\in M$的c^1类最短线$\lambda:[0,L]\to M$含于某一坐标邻域（U,φ），（局部坐标为u^1，…，u^n），若以弧长s为参数，则$\lambda(s)$的在局部坐标邻域(U,φ)中的微分方程为（2．29）式

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0$$

现在如果同一最短线含于另一坐标邻域（$\bar{U}$，$\bar{\varphi}$），（局部坐标为$\bar{u}^1$，…，$\bar{u}^n$），而$U\cap\bar{U}\neq\phi$，它们局部坐标之间的变换式为

$$\bar{u}^a=\bar{u}^a(u^1,\ \cdots,\ u^n)\quad (u^i\in\varphi(U)$$

则该曲线在 $(\bar{U},\bar{\varphi})$ 中的微分方程为与上方程形状相同的方程，即

$$\frac{d^2\bar{u}^a}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\bar{a}\\ bc\end{matrix}\right\}\frac{d\bar{u}^b}{ds}\frac{d\bar{u}^c}{ds}=0 \tag{2.41}$$

（证明）首先在变换 $\bar{u}^a=\bar{u}^a(u^1,\cdots,u^n)$ 下，基本张量 g_{ij} 与 $\bar{g}_{ab}$ 之间有

$$g_{ij}=\bar{g}_{ab}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j} \tag{2.42}$$

从而

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\frac{\partial\bar{g}_{ab}}{\partial\bar{u}^c}\frac{\partial\bar{u}^c}{\partial u^k}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j}+\bar{g}_{ab}\frac{\partial^2\bar{u}^a}{\partial u^i\partial u^k}\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j}$$

$$+\bar{g}_{ab}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial^2\bar{u}^b}{\partial u^j\partial u^k}$$

成立。将上式的指标按 i,j,k 的顺序轮换，随之指标 a,b,c 也按顺序轮换，再将前两式相加后减去后一式，则得

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\bar{g}_{ab}}{\partial\bar{u}^c}+\frac{\partial\bar{g}_{ac}}{\partial\bar{u}^b}-\frac{\partial\bar{g}_{bc}}{\partial\bar{u}^a}\right)\frac{\partial\bar{u}^c}{\partial u^k}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j}$$

$$+2\bar{g}_{ab}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial^2\bar{u}^b}{\partial u^j\partial u^k}$$

即用克利斯多夫记号，上式可写做

$$[jk,i]=[\overline{bc,a}]\frac{\partial\bar{u}^c}{\partial u^k}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j}+\bar{g}_{ab}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial^2\bar{u}^b}{\partial u^j\partial u^k}$$

将上式两边乘以

$$g^{ih}=\bar{g}^{ed}\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^e}\frac{\partial u^h}{\partial\bar{u}^d}$$

这里 $u=u(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$ 是$U\cap\bar{U}$的局部坐标变换式）并对i做总和，则得

$$\begin{Bmatrix} h \\ jk \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{e} \\ bc \end{Bmatrix} \frac{\partial u^h}{\partial \bar{u}^e} \frac{\partial \bar{u}^b}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{u}^c}{\partial u^k} + \frac{\partial u^h}{\partial \bar{u}^e} \frac{\partial^2 \bar{u}^e}{\partial u^j \partial u^k} \quad (2.43)$$

它还可以写做

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} = \begin{Bmatrix} \bar{a} \\ bc \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}^b}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{u}^c}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 \bar{u}^a}{\partial u^j \partial u^k} \quad (2.44)$$

(2.43)(2.44)是在局部坐标变换下克利斯多夫记号的变换规律.

现在，在$U\cap\bar{U}$中不仅限于测地线，对一般的可微曲线，它在(U,φ)中为 $u^i(s)$，$(s\in[0, L])$，若在 $(\bar{U},\bar{\varphi})$ 中表示为$\bar{u}^a(u(s))$，$(s\in L)$ 时，则

$$\frac{d\bar{u}^a}{ds} = \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds}$$

$$\frac{d^2\bar{u}^a}{ds^2} = \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \frac{d^2u^i}{ds^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^a}{\partial u^i \partial u^j} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

将后一式的第二项用（2.44）式代入，整理后得

$$\frac{d^2\bar{u}^a}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \bar{a} \\ bc \end{Bmatrix} \frac{d\bar{u}^b}{ds} \frac{d\bar{u}^c}{ds} = \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}\right)$$

从而证得测地线微分方程的形状与局部坐标系的选取无关.

§2·4 共变导数与曲率张量

设M是n维微分流形，$f: M\to R$是M上的可微函数. 这时，对于M的各个容许坐标邻域（U，φ），（局部坐标为$u^1,\cdots,u^n$），f 做为局部坐标的函数可表示为 $f(u^1, \cdots, u^n)$. 它的偏导函数$\frac{\partial f}{\partial u^i}$，$(i=1,2, \cdots, n)$做为$M$上大范围共变向量场grad$f$ 在

$(\bar{U},\bar{\varphi})$中的自然标架的分量，已在〔例17〕中看到。但对张量这一事实并不成立。例如X为M上的向量场，(U,φ)的局部坐标为u^1，…，u^n)，而$(\bar{U},\bar{\varphi})$的局部坐标为$(\bar{u}^1$，…，$\bar{u}^n)$，但$U\cap\bar{U}\neq\phi$，而$\{e_i\}$，$\{\theta^i\}$，$\{\bar{e}\}$，$\{\bar{\theta}^a\}$，$(i,\ j,\ k,\ a,\ b,\ c=1,\ 2,\ \cdots\ n)$时，它们各为自然坐标架和对偶基，则在$U\cap\bar{U}$的各点有

$$e_i=\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\bar{e}_a,\qquad \theta^i=\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^a}\bar{\theta}^a$$

又关于自然标架，X的分量X^i，$\bar{X}^a$之间，在$U\cap\bar{U}$的各点有

$$\bar{X}^a=\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}X^i$$

将上式对$\bar{u}^c$进行偏微分，则得

$$\frac{\partial\bar{X}^a}{\partial\bar{u}^c}=\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}\frac{\partial X^i}{\partial u^k}+\frac{\partial^2\bar{u}^a}{\partial u^j\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}X^j \qquad (2.52)$$

由于上式右边存在第二项，这说明向量X在各坐标邻域的自然标架中分量X^i的偏导函数$\frac{\partial X^i}{\partial u^k}$在自然标架（以及对偶基底）中不构成大范围张量场。

【命题1】在黎曼流形中，向量场X的共变导函数构成(1,1)型大范围张量场。

（证明）从前面已知向量场X的偏导函数在局部坐标变换$\bar{u}^a=\bar{u}^a(u^1,\ \cdots,\ u^n)$下的变化规律为

$$\frac{\partial\bar{X}^a}{\partial\bar{u}^c}=\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}\frac{\partial X^i}{\partial u^k}+\frac{\partial^2\bar{u}^a}{\partial u^j\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}X^j$$

因为流形是黎曼流形，因此有(2.44)式

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{\partial\bar{u}^a}{\partial u^i}=\begin{Bmatrix} a \\ bc \end{Bmatrix}\frac{\partial\bar{u}^b}{\partial u^j}\frac{\partial\bar{u}^c}{\partial u^k}+\frac{\partial^2\bar{u}^a}{\partial u^j\partial u^k}$$

成立，把它代入上式整理，则得

$$\bar{X}^b \left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} + \frac{\partial \bar{X}^a}{\partial \bar{u}^c} = \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^c} \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} X^j \right)$$

令 $\frac{\partial \bar{X}^a}{\partial \bar{u}^c} = \bar{X}^a{}_{,c}$，$\frac{\partial X^i}{\partial u^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} X^j = X^i{}_{,k}$，（或记做 $\nabla_k X^i$） (2.53)

代入上式，则得

$$\bar{X}^a{}_{,c} = \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^c} X^i{}_{,k}$$

上式说明在黎曼流形中，向量场X的偏导向量构成大范围(1,1)型张量场。

这个张量场也叫做反变向量场X的共变导函数。

同样地，设ω为M上的可微共变向量场，在各坐标邻域的自然标架的对偶基底的分量为ω_j，则

$$\omega_{j,k} = \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} - \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \omega_i \qquad \text{（也写做 } \nabla_k \omega_j \text{）} \qquad (2.54)$$

可知 $\{\omega_{j,k}\}$的全体确定M上大范围的 (0,2) 型张量场，称之为**共变向量场ω的共变导函数。**

同时也易于导得

$$\omega_{j,k} - \omega_{k,j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial u^j}$$

从上式右边可知，它是与黎曼度量无关的张量场，由 (1.35) 式可知它是ω 的外微商。

例如，若F为 (1,1) 型张量场，同样地在各坐标邻域的自然标架和它的对偶基底中生成具有分量为

$$F^i_{j,k} = \frac{\partial F^i_j}{\partial u^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\} F^h_j - \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\} F^i_h \quad \text{（或记做 } \nabla_k F^i_j \text{）}$$

的 (1.2) 型大范围张量场。

【命题2】（李西（Ricci）引理）在黎曼流形中，度量张量场g_{jk}的共变导函数为零。

（证明）因为度量张量场g为（0.2）型张量场，所以它的共变导函数为

$$g_{jk,l}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}-\begin{Bmatrix}h\\jl\end{Bmatrix}g_{hk}-\begin{Bmatrix}h\\kl\end{Bmatrix}g_{jh},\quad（或记做 \nabla_l g_{jk}）$$

利用（2.28），可得

$$g_{jk,l}=0 \quad （或\ \nabla g=0） \tag{2.55}$$

如果M是欧几里得空间，取直交坐标系时，显然

$$g_{ij}=\delta_{ij}$$

这时向量场X的共变导函数由（2.53）式可知为

$$X,{}^i_k=\frac{\partial X^i}{\partial u^k}+\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}X^j$$

由 $g_{ij}=\delta_{ij}$（常数）可知$\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}=0$，所以在欧几里得空间中

$$X,{}^i_k=\frac{\partial X^i}{\partial u^k}$$

即共变导函数是普通偏导函数的扩张。

对于一般的（r，s）型张量场的共变导数可按上述方法导出。

下面我们导出黎曼流形的曲率张量。

现在设f:$M\to R$是M上 c^r 类（$r\geqslant2$）的可微函数，f 的梯度∇f 的共变导函数 $\nabla\nabla f$ 在坐标邻域（U,φ），（局部坐标为 u^1，…，u^n）的自然标架的对偶基底中的分量为

$$f_{jk}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^j\partial u^k}-\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u^i}\quad (\nabla_k\nabla_j f)$$

因为 f 为c^r类，所以有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \tag{2.56}$$

成立，从而

$$f_{,jk}=f_{,kj}\quad(\nabla_k\nabla_j f=\nabla_j\nabla_k f)$$

所以 $\nabla\nabla f$ 是 (0,2) 型张量场. 反之,对于二阶可微但偏导函数不一定为连续的函数,f 可定义 $\nabla\nabla f$, 若它构成对称张量场,则在各坐标邻域中 (2.56) 式成立.

其次，若 X 为 c^r 类($r\geqslant 2$)的可微反变向量场, ∇X 是(1,1)型张量场，做它的共变导数 $\nabla\nabla X$，则

$$X^i{}_{,kl}=\frac{\partial X^i{}_{,k}}{\partial x^l}+\left\{{i \atop hl}\right\}X^h{}_{,k}-\left\{{h \atop kl}\right\}X^i{}_{,h}\quad(\nabla_l\nabla_k X^i)$$

注意
$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k \partial x^l}=\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^l \partial x^k} \tag{2.57}$$

则得

$$X^i{}_{,kl}-X^i{}_{lk}=R^i{}_{jkl}X^j \tag{2.58}$$

但这里

$$R^i_{jkl}=\frac{\partial\left\{{i \atop jk}\right\}}{\partial x^l}-\frac{\partial\left\{{i \atop jl}\right\}}{\partial x^k}+\left\{{i \atop hl}\right\}\left\{{h \atop jk}\right\}-\left\{{i \atop hk}\right\}\left\{{h \atop jl}\right\} \tag{2.59}$$

因(2.58)式左边是 M 上的大范围张量场，在各个坐标邻域 (U,φ) 的自然标架中考虑 $R^i_{hkl}X^h$ 时，可知它们的全体构成 M 上大范围的 (1,2) 型张量场. 因为 X 是 M 上的任意 c^r 类($r\geqslant 2$)的向量场, 所以可知在各个坐标邻域上的 $R^i{}_{jkl}$ 的全体确定 M 上的 (1,3) 型大范围张量场.

【定义】由 $R^i{}_{jkl}$ 所确定的张量场 R 叫做以 g 为基本张量场的黎曼流形 M 的曲率张量.

显然 (2.58) 式与 (2.57) 式等价. 完全同样地可以通过

共变向量场ω 来导出曲率张量.

设ω为M上的c^r类($r\geqslant 2$)的共变向量场，因为

$$\omega_{j,kl}=\frac{\partial\omega_{j,k}}{\partial u^l}-\left\{{h \atop jl}\right\}\omega_{h,k}-\left\{{h \atop kl}\right\}\omega_{j,h}$$

由
$$\frac{\partial^2\omega_j}{\partial u^k\partial u^l}=\frac{\partial^2\omega_j}{\partial u^l\partial u^k} \tag{2.60}$$

导得

$$\omega_{j,kl}-\omega_{j,lk}=-R^i{}_{jkl}\omega_i \tag{2.61}$$

显然 (2.60) 与 (2.61) 式等价.

下面我们讨论曲率张量R的分量之间的关系.

在坐标邻域 (U,φ)，(局部坐标u^1, …, u^n)的自然标架和对偶基底中，由 (2.59) 式可知

$$R^i{}_{jkl}=-R^i{}_{jlk} \tag{2.62}$$

$$R^i{}_{jkl}+R^i{}_{klj}+R^i{}_{ljk}=0 \tag{2.63}$$

在这里如果令

$$R_{ijkl}=g_{ih}R^h{}_{jkl} \tag{2.64}$$

则得
$$R_{ijkl}=-R_{ijlk} \tag{2.65}$$

$$R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0 \tag{2.66}$$

又，在下式中$(*)_\lambda$表示把它前面的λ个项中的 k与l对换后的式子. 所以由 (2.64) 式得

$$R_{ijkl}=g_{ih}\left[\frac{\partial\left\{{h \atop jk}\right\}}{\partial u^l}+\left\{{h \atop ml}\right\}\left\{{m \atop jk}\right\}-(*)_2\right]$$

$$=\frac{\partial[jk,i]}{\partial u^l}-\frac{\partial g_{ih}}{\partial u^l}\left\{{h \atop jk}\right\}+[ml,i]\left\{{m \atop jk}\right\}-(*)_3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k\partial u^l}+\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i\partial u^l}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i\partial u^l}\right)$$

$$-([il,h]+[hl,i])\begin{Bmatrix}h\\jk\end{Bmatrix}+[ml,i]\begin{Bmatrix}m\\jk\end{Bmatrix}-(*),$$

从而得

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i\partial u^l}+\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^j\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial u^i\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j\partial u^l}\right)$$

$$+g_{ab}\begin{Bmatrix}a\\ik\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}b\\jl\end{Bmatrix}-g_{ab}\begin{Bmatrix}a\\il\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}b\\jk\end{Bmatrix} \tag{2.67}$$

从上式直接可得

$$R_{ijkl}=-R_{jikl} \tag{2.68}$$

$$R_{ijkl}=R_{klij} \tag{2.69}$$

(2.65),(2.66),(2.68),(2.69)是曲率张量R的分量R_{ijkl}之间的代数恒等式，它们并不独立，例如 (2.69) 可以由其它三个式子导出．为便于记忆，注意下图正八面体上画斜线的三角形．把注有i的三角形顶点所标的曲率张量分量相加，由 (2.66) 式知等于0．把注有j的三角形顶点所标的曲率张量分量相加，利用 (2.65)，(2.68) 由 (2.66) 得0．对于k，l的情形也是一样．其次，对于注有j，i的两个三角形顶点上，R的六个分量之和减去注有k，l两个三角形顶点上的R的六个分量之和为0．从这个式子看到，水平面正方形顶点的四个分量正负消去，只剩 (2.69) 式两边的2倍，这说明 (2.69) 式可由 (2.65) 式 (2.66) 式和 (2.68) 式导出．这些恒等式对简化计算很有用处．

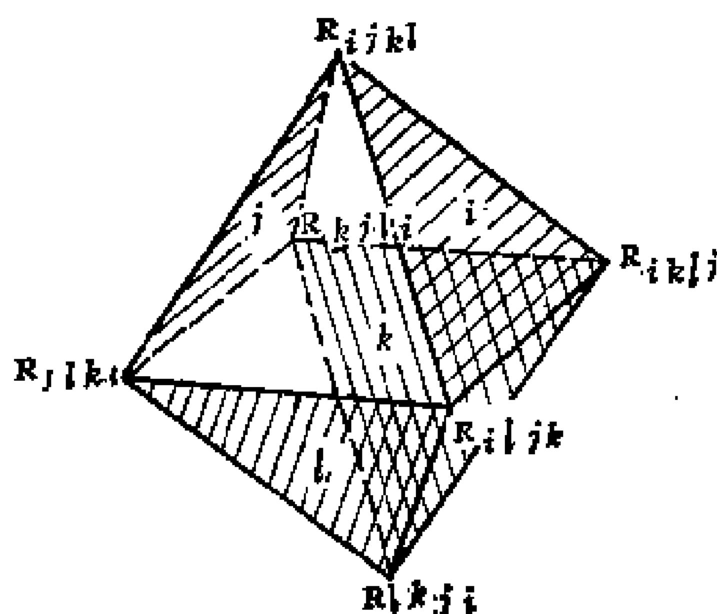


图4—17

下面通过曲率张量导出高斯曲率.

关于2维黎曼流形．利用上面代数恒等式于曲率张量的分量不为0的各个分量上，则得R_{1212}或R_{1221}等，或与R_{1212}只差负号.

设(U,φ)，(局部坐标为u^1，u^2)，$(\bar{U},\bar{\varphi})$，(局部坐标为$\bar{u}^1$，$\bar{u}^2$)，而且对于$U\cap\bar{U}\neq\phi$的坐标邻域，当$U\cap\bar{U}$中局部坐标变换时，若度量张量g关于自然标架$\{\bar{e}^1, \bar{e}^2\}$的分量为$\bar{g}_{ab}$，$(a,b=1,2)$时，则

$$\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}-\bar{g}_{12}^2=(g_{11}g_{22}-g^2_{12})\left[\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(\bar{u}^1,\bar{u}^2)}\right]^2$$

成立．这时曲率张量R关于上述基底的分量若为$\bar{R}_{abcd}$时，则

$$\bar{R}_{1212}=R_{ijkl}\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^1}\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^2}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^1}\frac{\partial u^l}{\partial\bar{u}^2}$$

$$=R_{1212}\left[\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(\bar{u}^1,\bar{u}^2)}\right]^2$$

成立。令

$$K=-\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}} \tag{2.70}$$

又如果把上式右边的g_{ij}，R_{1212}用$\bar{g}_{ij}$，$\bar{R}_{1212}$代换后令它为$\bar{K}$，则在$U\cap\bar{U}$的各点有$\bar{K}=K$．它表示，在所考虑的黎曼流形上的各个坐标邻域(U,φ)中，由(2.70)式所定义的K确定M上大范围的可微函数$K:M\to R$(R是一维数空间)．由(2.67)式可知这个函数K仅由度量张量g(及其偏导数)所确定．称之为黎曼流形的高斯曲率．又对于各点$P\in M$，$K(P)$叫做在点P的高斯曲率.

§2·5　曲面的第二基本张量

【定义】设M是参数曲面，$f:M\to R^3$是c^3类浸入．这时在

M 上从 R^3 的度量 g_0 由 f 引入度量（第一基本张量场） $g=f^*g_0$。这时，若在M上取坐标邻域(U,φ)，(局部坐标为u_1,u_2)关于自然标架 $\{e_1, e_2\}$ 设g的分量为 $B_i=f_*e_i$，$(i=1,2)$ 已由(2.8) 式给出。其次，在点 $P\in U$ 对应点 $f(P)$，取垂直于 $f_*(M_P)$ 的 R^3 的单位向量$n(P)$，它满足

$$\langle B_i, n\rangle = 0 \tag{2.71}$$

$$\langle n, n\rangle = 1 \tag{2.72}$$

它们若再满足

$$\det|B_1, B_2, n| > 0 \tag{2.73}$$

则 $n(P)$ 唯一确定，对于

$$n = \frac{B_1\times B_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g^2_{12}}} \tag{2.74}$$

（×号是向量积）由条件

$$\left.\begin{aligned}&\langle B_1\times B_2, B_i\rangle = 0 \quad (i=1,2)\\ &\| B_1\times B_2\|^2 = \|B_1\|^2\cdot\|B_2\|^2-\langle B_1, B_2\rangle^2\\ &\det|B_1, B_2, B_1\times B_2| = \|B_1\times B_2\|^2>0\end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$

唯一确定。在 $f(P)$处把 $\{B_1, B_2, n\}$看做 R^3的基底。称之为在坐标邻域 (U,φ) 上点P的高斯标架。当点P在 U 内运动时，$n(P)$ 在U内显然构成可微向量场。

在我们头脑中考虑曲面 $S=\{M, f, R^3\}$ 的直观形象。当$P\in U\subset M$时，$f_*(M_P)$是在点 $f(P)$处 $f(U)\subset f(M)$的切平面。在 $f(P)$的邻域，$f(M)$的形状只须研究 $f_*(M_P)$ 随P运动而变化的状态就可以知道。

为研究 $f_*(M_P)$ 随P同时运动状态，只须研究$\dfrac{\partial B_i}{\partial u^j}$，$(i, j=1,2)$就可以。为方便换指标并固定 j,k，对于各个$(u^1, u^2)\in\varphi(U)$，$\dfrac{\partial B_j}{\partial u^k}$是$R^3$的向量，注意 $\{B_1, B_2, n\}$ 是它的基底，从

而存在满足

$$\frac{\partial B_j}{\partial u^k}=\Gamma^i{}_{jk}B_i+h_{jk}n$$

在$\varphi(U)$上定义的函数组$\Gamma^i{}_{jk}$和h_{jk}。

把上式代入（2.8）微分的式子

$$\left\langle\frac{\partial B_i}{\partial u^k},\ B_j\right\rangle+\left\langle B_i,\ \frac{\partial B_j}{\partial u^k}\right\rangle=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

再由（2.8）和（2.71）式，则得

$$\Gamma^h{}_{ik}g_{hj}+\Gamma^h{}_{jk}g_{ih}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

在这里令

$$\Gamma_{jk}|_i=\Gamma^h{}_{jk}g_{ih}$$

上式变为

$$\Gamma_{ik}|_j+\Gamma_{jk}|_i=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

但是，$\dfrac{\partial B_j}{\partial u^k}$，由（2.7）式知对于$j,k$对称，从而$\Gamma^i{}_{jk}$，$h_{jk}$对于$j,k$也对称。从而$\Gamma_{jk}|_i$对于$j,k$也对称。把上式看做关于$\Gamma_{jk}|_i$的联立方程，为了解它把指标轮换，则得

$$\Gamma_{ji}|_k+\Gamma_{ki}|_j=\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}$$

$$\Gamma_{kj}|_i+\Gamma_{ij}|_k=\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}$$

将第一式与第三式相加再减去第二式，则得

$$\Gamma_{jk}|_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)=[jk,i]$$

从而得

$$\Gamma^i{}_{jk}=g^{ih}\Gamma_{jk}|_h=g^{ih}[jk,h]=\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}$$

因此，令

$$B_{j,k}=\frac{\partial B_j}{\partial u^k}-\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}B_i \tag{2.77}$$

则（2.76）式归结为

$$B_{j,k}=h_{jk}n \tag{2.78}$$

（将（2.74）所确定的n以$-n$代换，仅h_{jk}改变符号）。

在这里，设M的另一个坐标邻域为$(\bar{U},\bar{\varphi})$，（它的局部坐标为$(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$，若$U\cap\bar{U}\neq\phi$，则$U\cap\bar{U}$上各个点对于$(\bar{U},\bar{\varphi})$的自然标架$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$，则有

$$\bar{B}_b=f_*\bar{e}_b=f_*\left(\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}e_j\right)=\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}f_*e_j$$

所以 $\bar{B}_b=\dfrac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}B_j$

从而有

$$\frac{\partial\bar{B}_b}{\partial\bar{u}^c}=\frac{\partial^2 u^i}{\partial\bar{u}^b\partial\bar{u}^c}B_i+\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}\ \frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}\ \frac{\partial B_j}{\partial u^k}$$

成立。将与（2.44）式类似的式代入上式则得

$$\bar{B}_{b,c}=\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}\ \frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}B_{j,k}$$

这里的$\bar{B}_{b,c}$是与（2.77）定义的式子是相似的。在$(\bar{U},\bar{\varphi})$中若由与（2.74）类似的式子所确定的单位法向量场为$\bar{n}$，则对于$\bar{B}_{b,c}$也有与（2.78）相类似的式子成立。因此，在$U\cap\bar{U}$各个点，因为有$\bar{n}=n$或$\bar{n}=-n$，所以

$$\bar{h}_{bc}=\langle\bar{B}_{b,c},\ \bar{n}\rangle=\pm\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^b}\ \frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^c}\langle B_{j,k},n\rangle$$

则得

$$\bar{h}_{b,c} = \pm \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^b} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^c} h_{jk} \tag{2.79}$$

当参数曲面M为可定向时，指定M的一方向，这时M可以仅由与此方向相容的局部坐标邻域所复盖。在各坐标邻域(U,φ)，(局部坐标为u^1，u^2) 中，由 (2.74) 所唯一确定的单位法向量场，在 $U\cap\bar{U}\neq\phi$的各个$f(U\cap\bar{U})$ 上重合。从而沿$f(M)$ 构成R^n的向量场。又这时在$U\cap\bar{U}$上符号为正，h_{jk} 在M全体上有定义，即它是大范围（0,2）型张量场的分量。这个张量场叫做 $f:M\to R^3$的**第二基本张量场**，以记号h表示（若M的方向改变，则第二基本张量场成为$-h$)。如果M不可定向，张量场h连在M的可定向的部分区域也不能定义。(2.78) 式叫做曲面 $S=(M,f)$（在U上的限制 $(U, f|U)$) 的**高斯诱导方程**。

其次，导出万加滕诱导方程。

在坐标邻域 (U,φ)，(局部坐标为 u^1，u^2) 中考虑$\frac{\partial n}{\partial u^j}$。微分 (2.72) 式，则得

$$\left\langle \frac{\partial n}{\partial u^j}, n \right\rangle = 0$$

$\left(\frac{\partial n}{\partial u^j}\right)_{\varphi(P)}$，$(P\in U)$在 $f(P)$ 与 $f(M)$ 的单位法向量垂直，所以它必在切平面$f_*(M_P)$上。因此存在满足

$$\frac{\partial n}{\partial u^j} = k^h{}_j B_h$$

的函数组 $k^h{}_j$，$(h=1, 2)$，另方面，微分 (2.71) 式得

$$\left\langle \frac{\partial B_i}{\partial u^j}, n \right\rangle + \left\langle B_i, \frac{\partial n}{\partial u^j} \right\rangle = 0$$

将前式和（2.76）式代入上式，则得

$$h_{ij}+k^h{}_j g_{ih}=0$$

两边乘以 g^{im}并对i作总和，再把所得式子中的i换做m，m换做i，则得

$$k^i{}_j=-h_{jm}g^{im}$$

如果令 $h^i{}_j=h_{jm}g^{im}$，则导得

$$\frac{\partial n}{\partial u^j}=-h^i{}_j B_i \tag{2.80}$$

当参数曲面可定向时，则 $h^i{}_j$ 是M上的（1.1）型张量场的分量。（2.80）式是曲面 $S=(M,f)$（在U的限制（U，$f|U$）下）的**万加腾诱导方程。**

§2·6 曲面的曲率

设M是参数曲面，$f:M\to R^3$ 是浸入，g是在M上由R^3所引入的度量张量场。取点$P\in M$，（U,φ）是含点P的坐标邻域，（局部坐标为 u^1，u^2），设由（2.74）所确定的沿$f(U)$的单位法向量场为n，由这个n在U上所确定的局部的第二基本张量场为h。

由$X\in M_P$必定确定二次形式 $g(X,X)$，$h(X,X)$，因为$g(X,X)$是正定的，考察 $h(X,X)$关于 $g(X,X)$ 的特征值、特征向量时，则得到与已给曲面上点P的邻域性质无关的不变量。设在坐标邻域(U,φ)的自然标架（e_1，e_2）中，g，h 的分量各设为 g_{ij}，h_{ij}，$(i,j=1,2)$，则特征方程为

$$\det|h_{ij}-\rho g_{ij}|=0 \tag{2.81}$$

展开，则得

$$\Delta\cdot\rho^2-\Delta\cdot g^{ij}h_{ij}\cdot\rho+\det|h_{ij}|=0$$

这里 $\Delta=\det|g_{ij}|$。设特征值为k_1，k_2，从根同系数的关系可知

$$k_1+k_2=g^{ij}h_{ij}\quad (=2H) \tag{2.82}$$

$$k_1\cdot k_2=\det|h_{ij}|/\det|g_{ij}|\quad (=K(P)) \tag{2.83}$$

成立。关于积 $K_1\cdot K_2$，从该式右边可知，只要确定点 $P\in M$，它与含 P 的坐标的取法以及 M 在 P 点的单位法向量的方向无关的量。称这个量为所考虑曲面在点 P 的**高斯曲率**，用 K 表示。若 P 在 U 上运动，则 K 是 U 上的可微函数，由(2.83)式可知它与 M 是否定向无关。高斯曲率 K 是 M 上的大范围的可微函数。与此相反，在 $P\in U$ 上，k_1+k_2 的值，随取 $n(P)$ 的相反方向而改变符号，用 H 表示 $\frac{1}{2}(k_1+k_2)$，叫做 M 在点 P 的**平均曲率**。设 M 是可定向的，指定 M 的一个方向，它被与它相容的坐标邻域系所复盖，把这些坐标邻域结合起来来考虑曲面的单位法向量场 n，，由 (2.74) 来确定，则平均曲率 H 是在 M 上定义的大范围可微函数。若 M 不可定向（例如〔例12〕的麦比乌斯带）时，$f: M\to R^3$ 即或是嵌入，但 $f(M)$ 不存在连续单位法向量场 n，这时平均曲率 H 仅在局部有定义，一般地它不是大范围的可微函数。另方面，如果在 M 上的任何坐标邻域所确定的 n，使 $H\equiv 0$，这个性质与单位法向量场的选取无关。在 M 上具有到处使 $H=0$ 的曲面 $S=(M, f, R^3)$ 不论是否定向都叫做**极小曲面**。

下面我们考虑曲面在一点法曲率对应的极值方向。

前面已经求得与二次形式 $g(X,X)$ 相关的二次形式 $h(X,X)$ 的特征值。下面自然地要考察特征向量。设与特征值 k_1 对应的特征向量 X_1 是具有满足

$$(h_{ij}-k_1g_{ij})X_1^j=0\quad (i=1,2)$$

（关于自然标架）的分量 X_1^i 的向量，而与特征值 k_2 对应的特征向量 X_2 是具有满足

$$(h_{ij}-k_2g_{ij})X_2^j=0\quad (i=1,2)$$

的以 X_2^i 为分量的向量。将第一式乘以 X_2^i，第二式乘以 X_1^i，

按 i 取和，并将上式减下式，则得

$$(k_2 - k_1) g_{ij} X^i X^j = 0$$

因此在点 P，若 $k_1 \neq k_2$，则在 P 的二特征向量正交.

取 $X \in M_P$，则

$$k = h(X, X) / g(X, X)$$

叫做含 X 与 n 的平面所对应的**法曲率**。当 X 在 M_P 中运动时，这个 k 值取最大和最小值所对应的方向是关于二次形式 g, h 的特征向量的方向. k_1，k_2 是法曲率的最大值和最小值，特征向量 X_1，X_2 在 M_P 上所指的方向（$f_*(M_P)$ 上的方向 $f_* X_1, f_* X_2$）叫做**主曲率方向**. 切向量在点 P 常指向主曲率方向的曲线 $\lambda: I \to M$ ($f \circ \lambda: I \to f(M)$) 叫做所考虑曲面 M 的**曲率线**。

下面考虑曲面 M 的渐近方向.

设已给曲面 $f: M \to R^3$. 在点 $P \in M$ 的切空间 M_P 的向量 X，它的第二基本张量 h，当满足使 $h(X, X) = 0$ 的 X 的方向叫做曲面 M 在点 P 的**渐近方向**. 这个式子是关于 X 的分量 X^1，X^2 的二次形式，因此若 $h_{11} h_{22} - h^2_{12} > 0$，从而 $K(P) > 0$，则 M 不存在渐近方向. 当 $K(P) = 0$，而且 $\text{rank}(h_{ij}) = 1$ 时，如果不区别相反方向，则 M_P 只有一个渐近方向. 若 $\text{rank}(h_{ij}) = 0$，则 M_P 的所有方向都是渐近方向. 如果 $K(P) < 0$，恰好有两个渐近方向（不区别正反方向）. M 上的可微曲线 $\lambda: I \to M$，它上各点的切向量常指向渐近方向时，则称之为**渐近曲线**. 当曲线 $\lambda: I \to M$ 关于坐标邻域 (U, φ)，（局部坐标为 u^1, u^2）用 $u^i(t)$，($t \in I$) 表示时，则曲线为渐近曲线的条件为

$$h_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0。$$

§2·7 高斯方程和柯达奇方程

我们在 §2·5 中已经给出，当曲面 S 在浸入 $f: M \to R$ 下，

(U,φ)为M的容许坐标邻域，(u^1, u^2)是它的局部坐标，则有高斯和万加滕的诱导方程(2.78)，(2.80)式成立．给定映射f在M上的分量函数x^α，$(\alpha=1, 2, 3)$为c^3类以上，这时对于各个α，则 $\operatorname{grad} x^\alpha$ 关于(U,φ)的自然标架的分量 $B^\alpha{}_i$ 满足

$$\frac{\partial^2 B^\alpha_j}{\partial u^k \partial u^l}=\frac{\partial^2 B^\alpha_j}{\partial u^l \partial u^k}$$

从而按(2.60)，(2.61)式的同样理由可得

$$B^\alpha{}_{j,kl}-B^\alpha{}_{j,lk}=-R^i{}_{jkl}B^\alpha{}_i \tag{2.84}$$

成立．利用高斯诱导方程 (2.78) 则上式变为

$$\text{左边}=(h_{jk}n)_{,l}-(h_{jl}n)_{,k}$$

利用莱布尼兹微分法则和万加滕诱导方程，则上式变为

$$\text{左边}=(h_{jk,l}-h_{jl,k})n+(-h_{jk}h^i{}_l+h_{jl}h^i{}_k)B_i$$

它等于 (2.84) 式的右边，注意 B_1，B_2，n 是线性无关的向量，则有

$$R^i{}_{jkl}=h_{jk}h^i{}_l-h_{jl}h^i{}_k \tag{2.85}$$

$$h_{jk,l}=h_{jl,k} \tag{2.86}$$

成立．

其次，设在$f|U:U\to R^3$的单位法向量 n 在R^3中的分量为n^α，$(\alpha=1, 2, 3)$，如果 f 是c^3类以上时，则n^α为U上的 c^2 类以上的函数，则有

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^k\,\partial u^l}=\frac{\partial^2 n}{\partial u^l \partial u^k}$$

成立．从而由 (2.56) 式与它下边的式子等价的同理可得上式与

$$n_{,kl}=n_{,lk}$$

等价．再把万加滕的诱导方程 (2.80) 代入上式，则得

$$(h^i{}_kB_i)_{,l}=(h^i{}_lB_i)_{,k}$$

再把高斯诱导方程（2.78）代入上式，则得

$$(h^i{}_{k,l}-h^i{}_{l,k})B_i+(h^i{}_k h_{il}-h^i{}_l h_{ik})n=0$$

从而左边的 B_i，n 的系数均为 0。其中前者可由李西引理（2.55）式知，它与（2.86）等价。后者无非是代数恒等式，（2.85）式叫**高斯方程**，（2.86）式叫**柯达奇方程**。

又（2.85）式，容易改写为

$$R_{ijkl}=h_{ik}h_{jl}-h_{jl}h_{ik}$$

显然它与

$$R_{1212}=-(h_{11}h_{22}-h^2{}_{12})$$

等价。它是（2.83）式所定义的高斯曲率 K，它可以写为

$$K=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g^2{}_{12}} \tag{2.87}$$

将它与（2.70）式比较可得下面定理。

【定理 4】设 $S=(M,\ f,\ R^3)$ 为 c^3 类曲面，$(U,\ \varphi)$ 为 M 的坐标邻域。这时在 M 上的诱导度量 g，U 上由第二张量场 h 所确定的高斯曲率（2.83）与黎曼流形 (M,g) 的高斯曲率在 U 上的限制（2.70）一致。

这个定理是高斯发现的重要定理，也是黎曼在它的启发下而创立了黎曼几何。

§2·8　曲面的基本定理

从前几节已知，若 S 是由浸入 $f:M\to R^3$ 给定的曲面时，则在 M 上存在做为诱导度量的第一基本张量场 g。又如果 M 可定向时，则在 M 上存在大范围的第二基本张量场 h 和大范围的单位法向量场 n。而且它们之间有高斯方程（2.85）和柯达奇方程（2.86）成立。在这一节中，我们证明其逆（定理 5 与定理 7，定理 6 与定理11）。它们是 R^3 中曲面理论的基本定理。为

此我们还要引进一些新概念.

【定义】在 n 维微分流形M的各点P，对应它的切空间M_P存在唯一m维子向量空间 Δ_P，($1\leqslant m<n$) 时，这个对应叫**m维分布**，用记号$\mathcal{L}$表示. 分布$\mathcal{L}$在 $P\in M$的邻域U中可选取可微向量场X_1，…，X_m，使它在各个点 $Q\in U$，由 $X_1(Q)$，…，$X_m(Q)$ 张成 V_Q，则称这个分布为**可微分布**. 可微的m维分布$\mathcal{L}$，若在M各个点P的邻$U(P)$中当张成这个可微分布的可微向量场X_1，…，X_m 的所有泊松括弧

$$[X_i,\ X_j],\ (i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

可表示为 X_1，…，X_m 的线性结合时，则称$\mathcal{L}$为**对合的**. 显然，这个定义与张成分布$\mathcal{L}$的向量场X_1，…，X_m场的选取方法无关.

【定义】设$\mathcal{L}$是M的可微的m维分布. 如果M的子集N具有微分流形的结构，包含映射 $\iota:N\to M$ 是嵌入，且在N的各点P，N的切空间 N_P常含于 ∇_P时，则N叫做$\mathcal{L}$的**积分流形**. 这时N的维数n有 $1\leqslant n\leqslant m$关系. 如果积分流形N总不是与它具有相同分布的任何积分流形的真子集时，则称之为**最大积分流形**.

关于积分流形是否存在，由下面弗罗宾尼斯 (Frobenius) 定理给出.

【引理 2】设M是n维微分流形，$\mathcal{L}$是M上的可微对合的m维分布 ($1\leqslant m\leqslant n$). 这时，则在M上各点P存在通过点P的最大积分流形 $N(P)$.

这个引理的证明需要一些予备知识，这里不证（参照 C. Chevalley: Theory of Lie groups I.)

下面转入基本定理的证明. 证明分 I、II两个部分，I是特殊情形，当然I是II的基础.

第Ⅰ部分．参数曲面M是（u^1，u^2）平面的单连通区域D的情形．

〔第一段〕$D\times\Omega$中的对合分布．

在（u^1，u^2）平面的单连通区域D上，已给恒正且对称的张量场 g_{ij} 和对称张量场 h_{ij}． 假定它们满足 D 上的高斯方程（2.85）和柯达奇方程（2.86）．

设R^{12}是12维的实数空间，它的坐标为（x^α，x_1^α，x^α_2，n^α），（$\alpha=1$，2，3）．现在设在R^{12}内满足条件

$$x_1^{\,1}:x_1^{\,2}:x_1^{\,3}=x_2^{\,1}:x_2^{\,2}:x_2^{\,3}$$

的点集为 N，$F=R^{12}-N$是R^{12} 中的余集，所以F是 R^{12} 的开集．

积空间$D\times F$是14维微分流形．我们在$D\times F$的各点（u^i，x^α，x_1^α，x_2，n^α）伴随有以下列为分量的两个向量ξ,η：

$$\left.\begin{aligned}&\xi:(1,0,x_1^\alpha,\left\{{i \atop 11}\right\}x_i^\alpha+h_{11}n^\alpha,\left\{{i \atop 12}\right\}x_i^\alpha+h_{12}n^\alpha,\ -h_1^{\ i}x_i^\alpha)\\&\eta:(0,1,x_2^\alpha,\left\{{i \atop 12}\right\}x_i^\alpha+h_{12}n^\alpha,\left\{{i \atop 22}\right\}x_i^\alpha+h_{22}n^\alpha,\ -h_2^{\ i}x_i^\alpha)\end{aligned}\right\}\quad(2.88)$$

ξ,η确定了$D\times F$上的两个向量场，从F的确定方法可知它在$D\times F$的各点是线性无关的．而且ξ,η在$D\times F$ 的各点上确定一个二维分布．

【引理 3】在$D\times F$内由$\xi\times\eta$所确定的分布是对合的．

（证明）只须证得泊松的括弧$[\xi,\eta]$表示为ξ,η的线性结合就可以，我们先证$[\xi,\eta]=0$．设在$D\times F$中的向量场$\xi,\eta,[\xi,\eta]$的分量为（ξ^i，ξ^α，ξ_1^α，ξ_2^α，ξ_4^α）（$i=1,2$，$\alpha=1$，2，3），首先ξ^i，μ^i是常数，显然

$$[\xi,\eta]^i=0$$

因为

$$[\xi,\eta]^i=\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial u^j}+\xi^\beta\frac{\partial\eta^i}{\partial x^\beta}+\xi_1^{\ \beta}\frac{\partial\eta^i}{\partial x_1^{\ \beta}}+\xi_2^{\ \beta}\frac{\partial\eta^i}{\partial x_2^{\ \beta}}+\xi_4^\beta\frac{\partial\eta^i}{\partial n^\beta}$$

$$-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial u^j}-\eta^\beta\frac{\partial\xi^i}{\partial x^\beta}-\eta_1{}^\beta\frac{\partial\xi^i}{\partial x_1{}^\beta}-\eta_2{}^\beta\frac{\partial\xi^i}{\partial x_2{}^\beta}-\eta_\Delta^\beta\frac{\partial\xi^i}{\partial n^\beta} \quad (2.89)$$

其次把最后式子中的i用α代换，并注意$\xi^\alpha=x_{1\alpha}$，$\eta^\alpha=x_2{}^\alpha$，因为

$$\xi_2{}^\alpha=\eta^\alpha{}_1=\left\{{i \atop 12}\right\}x^\alpha{}_i+h_{12}n_\alpha$$

所以

$$[\xi,\eta]^\alpha=\xi^\alpha{}_2-\eta^\alpha{}_1=0$$

当把（2.89）式中的i以指标$^\alpha{}_1$代换，则

$$\xi^\alpha{}_1=\left\{{i \atop 11}\right\}x^\alpha{}_i+h_{11}n^\alpha$$

并注意上面的$\eta^\alpha{}_1$式，则得

$$[\xi,\eta]^\alpha_1=\xi^j\left(\frac{\partial\left\{{i \atop 12}\right\}}{\partial u^j}x_{\alpha i}+\frac{\partial h_{12}}{\partial u^j}n^\alpha\right)+\xi^\alpha{}_1\left\{{1 \atop 12}\right\}+\xi^\alpha{}_2\left\{{2 \atop 12}\right\}+\xi^\alpha_\Delta h_{12}$$

$$-\eta^j\left(\frac{\partial\left\{{i \atop 11}\right\}}{\partial u^j}x^\alpha{}_i+\frac{\partial h_{11}}{\partial u^j}n^\alpha\right)-\eta^\alpha{}_1\left\{{1 \atop 11}\right\}-\eta_2{}^\alpha\left\{{2 \atop 11}\right\}-\eta^\alpha_\Delta h_{11}$$

在这个式子右边以ξ,η的分量（2.88）代入，容易变形为

$$[\xi,\eta]^\alpha{}_1=(R^i{}_{1212}-h_{11}h_2{}^i-h_{12}h_1{}^i)x^\alpha{}_i+(h_{12,1}-h_{11,2})n^\alpha$$

从满足高斯方程和柯这奇方程的假定，显然

$$[\xi,\eta]^\alpha{}_1=0,$$

同样容易验证

$$[\xi,\eta]^\alpha{}_2=0,\quad [\xi,\eta]^\alpha_\Delta=0$$

从这些方程求得

$$[\xi,\eta]=0.$$

〔第二段〕$\mathcal{L}$的最大积分流形D^*与区域D同胚.

由引理3已知，在$D\times F$中向量场ξ,η所确定的二维分布$\mathcal{L}$

是对合的，所以通过$D\times F$ 的各个点存在这个分布的最大积分流形。这时它通过$A(u^i_0)\in D$满足条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_\alpha x^\alpha_{0j}x^\alpha_{0k}=g_{jk}(u_0)\\&\sum_\alpha x^\alpha_{0j}n^\alpha_0=0,\ \sum_\alpha(n^\alpha_0)^2=1\\&\det|x_{01},x_{02},n_0|>0\end{aligned}\right\}\qquad(2.90)$$

的点 $A^*(u_0^i,\ x_0^\alpha,\ x_{01}^\alpha,\ x_{02}^\alpha,\ n_0^\alpha)$，将所考虑的分布的最大积分流形以$D^*$表示。设 $\pi:D\times F\to D$的映射是与$A\in D$时 $(A,P)\in D\times F$对应的映射，叫做自然的射影。 我们将证明在这个射影下，D^*与D同胚。

首先证明D^*在π下映射到D上。为此，设从点$A(u^i_0)$ 出发的可微曲线$\Gamma=([0,1],\ \lambda,D]$ 用

$$u^i=u^i(t),\ t\in[0,1],\ (u_0^i=u^i(0))$$

表示，考虑线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx^\alpha}{dt}=x^\alpha_i\dot u^i\quad\left(\dot u^i=\dfrac{du^i}{dt}\right)\\[2ex]\dfrac{dx^\alpha_j}{dt}=[\{{}^{\,i}_{jk}\}x^\alpha_i+h_{jk}n^\alpha]\dot u^k\\[2ex]\dfrac{dn^\alpha}{dt}=-h_j{}^i x^\alpha_i\dot u^j\end{cases}$$

在“$t=0$所对应的 $x^\alpha=x_0^\alpha$， $x^\alpha_j=x^\alpha_{0j}$， $n^\alpha=n_0^\alpha$”为初始条件的解。这组解若以$x^\alpha(t)$，$x^\alpha_j(t)$，$n^\alpha(t)$，$(t\in[0,1])$ 表示时，则$(u^i(t),\ x^\alpha(t),\ x_1^\alpha(t),\ x_2^\alpha(t),\ n^\alpha(t))$ $(t\in[0,1])$ 在$D\times R^{12}$中确定曲线Γ^*。我们认为曲线Γ^*在$D\times F$内。为证明这个结论，首先注意所考虑的解有下式

$$
\begin{cases}
\dfrac{d(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_j x^\alpha{}_k)}{dt} = [\{{}^i_{jl}\}(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_i x^\alpha{}_k) + \{{}^i_{kl}\}(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_j x^\alpha{}_i) \\
\qquad\qquad + h_{jl}(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_k n^\alpha) + h_{kl}(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_j n^\alpha)]\dot{u}^l \\
\dfrac{d(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_j n^\alpha)}{dt} = [-h^i{}_k(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_i x^\alpha{}_j) + \{{}^i_{jk}\}(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_i n^\alpha) \\
\qquad\qquad + h_{jk}(\sum\limits_\alpha n^\alpha n^\alpha)]\dot{u}^k \\
\dfrac{d(\sum\limits_\alpha n^\alpha n^\alpha)}{dt} = -2h^i{}_j(\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_i n^\alpha)\dot{u}^j
\end{cases}
$$

成立，从而 $\sum x^\alpha{}_j x^\alpha{}_k$，$\sum x^\alpha{}_j n^\alpha$，$\sum(n^\alpha)^2$是以 $P_{ij}=P_{ji}$，Q_i，R为未知函数的下面线性常微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_{jk}}{dt} = [\{{}^i_{jl}\}P_{ik} + \{{}^i_{kl}\}P_{ij} + h_{jl}Q_k + h_{kl}Q_j]\dot{u}^l \\
\dfrac{dQ_j}{dt} = [-h^i{}_k P_{ij} + \{{}^i_{jk}\}Q_i + h_{jk}R]\dot{u}^k \\
\dfrac{dR}{dt} = -2h^i{}_j Q_i \dot{u}^j
\end{cases}
$$

的解。如果把 P_{jk}，Q_j，R 分别换为$g_{jk}(u(t))$，0，1时，上面方程也恒被满足。从而由（2.90）式，注意到$\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_j x^\alpha{}_k$，$\sum\limits_\alpha x^\alpha{}_j n^\alpha$，$\sum\limits_\alpha(n^\alpha)^2$在点 $A(u^i{}_0)$ 具有上面的值，我们由微分方程解的唯一性可知

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_\alpha x^\alpha{}_j x^\alpha{}_k = g_{jk}(u(t)) \\
&\sum_\alpha x^\alpha{}_j n^\alpha = 0, \sum_\alpha(n^\alpha)^2 = 1 \\
&\det|x_1, x_2, n| > 0
\end{aligned}
\right\} \tag{2.91}
$$

恒成立。由（2.91）式知，在Γ^*上

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^1 \\ x_2^3 & x_2^1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_\alpha x_1^\alpha x_1^\alpha & \sum_\alpha x_1^\alpha x_2^\alpha \\ \sum_\alpha x_2^\alpha x_1^\alpha & \sum_\alpha x_2^\alpha x_2^\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

从而Γ^*在$D\times F$上.

Γ^*的各个切向量易知可以写做 $\dot{u}^1\xi+\dot{u}^2\eta$ 形状. 因此曲线Γ^*在积分流形D^*上. 这个事实指出曲线Γ上的各点是D^* 上曲线Γ^*的点在射影π下的象. 由于D连通, D的各个点与点A可由可微曲线来连接. 从而D^* 由π映射到D上. 我们把曲线 Γ^*叫做曲线Γ的**上升** (Lift). 反之D^* 的各点可以看做从D上点A出发的曲线的上升的端点.

【引理 4】 设 Γ_0, Γ_1是在 (u^1, u^2) 平面的单连通区域D上的具有相同端点 A,B的可微曲线, 这时通过点$A^*\in\pi^{-1}(A)$的由 Γ_0, Γ_1 上升的曲线Γ_0^*, Γ_1^*具有同一终点B^*.

(证明) 设D内的自然标架为 $\{e_1, e_2\}$, 由自然的射影$\pi|D^*:D^*\to D$, 显然

$$\pi_*\xi=e_1,\quad \pi_*\eta=e_2$$

这里ξ,η是由 (2.88) 式所定义的 D^*的切向量. 而且 D^*在点$P^*(u^i, x^\alpha, x_1^\alpha, x_2^\alpha, n^\alpha)$ 处由ξ,η所张成的向量空间投影为在点$P(u^i)$处由 e_1, e_2 所张成的切空间. 这一事实表示射影 π 是局部同胚映射. 又因为D是单连通的, 而且Γ_0经连续变形为 Γ_1, 因此可知 Γ_0^*与 Γ_1^*具有相同的终点 B^*.

【引理 5】 对于$D\times F$中的各个最大积分流形D^* 的自然射影 $\pi:D\times F\to D$在 D^*上的限制 $\pi|D^*$ (以下仍记做π) 是同胚映射.

(证明) 由引理 4 可知 $\pi:D^*\to D$的逆映射定义为$\pi^{-1}:D\to$

D^*，它是满射。因此 $\pi: D^* \to D$ 是满单射，如所周知它是局部同胚映射。从而$\pi: D^* \to D$是同胚映射。

〔第三段〕定理 5、定理 6 及其证明

由引理 5，我们已选取积分流形D^*的参数为(u^1, u^2)。D^*的点 u^i，$(i=1,2)$ 是D的点 u^i 的 π^{-1} 的象，而且积分流形D^*用D上定义的函数

$$x^\alpha(u^1, u^2),\quad x_1^\alpha(u^1, u^2),\quad x_2^\alpha(u^1, u^2),\quad n^\alpha(u^1, u^2) \tag{2.92}$$

来表示。因此，这个积分流形上的u^1曲线，u^2 曲线的切向量的分量各为$(\delta_1{}^i, \cdots)$，$(\delta_2{}^i, \cdots)$，D^* 的向量场 ξ, η无非是 u^1 曲线，u^2 曲线的切向量场。而且可知（2.92）式的函数是微分方程组

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} = x_i^\alpha \\ &\frac{\partial x^\alpha{}_j}{\partial u^k} = \left\{{i \atop jk}\right\} x^\alpha{}_i + h_{jk} n^\alpha \\ &\frac{\partial n^\alpha}{\partial u^i} = -h^i{}_j x_i^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2.93}$$

的解。由（2.93）式，我们按第二段同样方法，易知

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma x^\alpha{}_j(u) x^\alpha{}_k(u) = g_{jk}(u) \\ &\Sigma x^\alpha{}_j(u) n^\alpha(u) = 0,\quad \sum_\alpha (n^\alpha(u))^2 = 1 \\ &\det|x_1(u),\ x_2(u),\ n(u)| > 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.94}$$

在D上恒成立。

现在用 $(u^i, x^\alpha, x_1{}^\alpha, x_2{}^\alpha, n^\alpha) \to x^\alpha$来定义映射$\rho: D \times F \to R^3$. 这时，若把本身看做二维流形的$D$到$R^3$的映射定义为 $f = \rho_*(\pi | D^*)^{-1}: D \to R^3$，用上面导得的函数$x^\alpha(u^1, u^2)$来表示，由于

$$\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)},\quad \frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)},\quad \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)}$$

在D上各点不同时为零，因此 f 是D到R^3的浸入。由（2.93）第一式可知x^α_i是浸入象 $f(D)$ 的切向量，可知它满足（2.94）的第一式。而且它所给出的张量场g_{jk}是曲面$S=(D, f, R^3)$的第一基本张量。而（2.94）的第二，三式给出的 $n^\alpha(u)$ 是曲面S的单位法向量场。又由（2.93）的第二式所给出的张量场h_{jk}是S的第二基本张量场，于是得到下面定理。

【定理5】在 (u^1, u^2) 平面的单连通区域D中，定义恒正c^2类二阶对称张量场 $g_{jk}(u^1, u^2)$和 c^1类二阶对称张量场h_{jk}，如果它们满足高斯和柯达奇方程（2.85），（2.86）式，则存在D到R^3的浸入曲面，它以给定的张量场 g_{jk}，h_{jk}为第一，第二基本张量场。

又，从通过始点A^*存在唯一的$\mathcal{L}$的最大积分流形的事实，可知下面定理成立。

【定理6】从 (u^1, u^2)平面的单连通区域D到R^3中的浸入$f_1: D\to R^3$，$f_2: D\to R^3$定义的两个可微曲面 S_1, S_2，如果它们具有相同的张量场 $g_{jk}(u^1, u^2)$，$h_{jk}(u^1, u^2)$做为它们的第一，第二基本张量场时，则在 R^3 中存在运动T，使 $f_2=T\circ f_1$。

定理5，定理6是R^3中（局部）曲面的基本定理。

第Ⅱ部分．参微曲面是二维流形的情形．

〔第4段〕M上纤维丛的建立．

设微分流形M是连通且可定向的，$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，$(\lambda\in\Lambda)$是复盖$M$的$c^3$类单连通的相容的坐标邻域。这时我们把各个$U_\lambda$象第Ⅰ部分那样做积空间 $\varphi_\lambda(U_\lambda)\times F$。由于把 $(A, P)\in\varphi_\lambda(U_\lambda)\times F$与$(\varphi_\lambda^{-1}(A), P)\in U_\lambda\times F$ 看做相同的，从而把 $\varphi_\lambda(U_\lambda)\times F$ 与 $U_\lambda\times F$ 也看做相同的。在这个基础上首先对所有的 $U_\lambda\times F$，$(\lambda\in\Lambda)$ 构成M上的一个纤维丛并给出 $U_\lambda\times F$ $(\lambda\in\Lambda)$ 的点之间的视为相同的法则。

为此，先考虑F到本身上的线性变换

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{x}^{\alpha}=x^{\alpha}\\
&\bar{x}_1^{\alpha}=a_{11}x_1^{\alpha}+a_{12}x_2^{\alpha}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0\\
&\bar{x}_2^{\alpha}=a_{21}x_1^{\alpha}+a_{22}x_2^{\alpha}\\
&\bar{n}^{\alpha}=n^{\alpha}
\end{aligned}\right\}\tag{2.95}$$

这种形状的线性变换群记做G。现在关于坐标邻域$(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$，（局部坐标为$(u^1,\ u^2)$），（为使记法简化而略去指标$\lambda$），$(U_\mu,\ \varphi_\mu)$，（局部坐标为$(\bar{u}^1,\ \bar{u}^2)$），设$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$，在$U_\lambda\cap U_\mu$中局部坐标变换为

$$\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1,u^2),\quad (u^1,u^2)\in U_\lambda\cap U_\mu\subset U_\lambda\tag{2.96}$$

它的反解为

$$u^i=u^i(\bar{u}^1,\bar{u}^2),\quad (\bar{u}^1,\bar{u}^2)\in U_\lambda\cap U_\mu\subset U_\mu$$

于是把$U_\lambda\times F$的点$(u^i,\ x^{\alpha},\ x_1^{\alpha},\ x_2^{\alpha},\ n^{\alpha})$，$(\varphi_\lambda^{-1}(u)\in U_\lambda\cap U_\mu)$与$U_\mu\times F$的点$(\bar{u}^i,\ \bar{x}^{\alpha},\ \bar{x}_1^{\alpha},\ \bar{x}_2^{\alpha},\ \bar{n}^{\alpha})$在

$$\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1,\ u^2)$$

下有

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{x}^{\alpha}=x^{\alpha}\\
&\bar{x}_1^{\alpha}=\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^1}x_i^{\alpha}\\
&\bar{x}_2^{\alpha}=\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^2}x_i^{\alpha}\\
&\bar{n}^{\alpha}=n^{\alpha}
\end{aligned}\right\}\tag{2.97}$$

视为相同。

我们把（2.97）式的变换用$\psi_{\mu\lambda}(u^1,\ u^2)$表示。如果还有坐标邻域$(U_\nu,\ \varphi_\nu)$，使$U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu\neq\phi$时，易知这时有$\psi_{\nu\mu}\circ\psi_{\mu\lambda}=\psi_{\nu\lambda}$成立。从而可知，所有积空间$U_\lambda\times F$，$(\lambda\in\Lambda)$的集合构成

以M为底空间，F为标准纤维，G为结构群的纤维丛，这个纤维丛的全空间以$\mathfrak{M}$表示，射影以 $P:\mathfrak{M}\to M$ 表示.

〔第五段〕在 $U_\lambda\times F$ $(\lambda\in\Lambda)$上定义的二维分布的集合构成$\mathfrak{M}$上的二维分布.

我们在微分流形M上已给出恒正的二阶对称张量场 g_{jk} 和二阶对称张量场h_{jk},假定它们满足高斯和柯达奇方程(2.85)，(2.86)式. 而在各个积空间$U_\lambda\times F$上都具有第Ⅰ部分所定义的二维分布 $\mathcal{L}^\lambda$. 关于这些分布，有下面引理6成立.

【引理6】在 $U_\lambda\times F$, $(\lambda\in\Lambda)$上的分布$\mathcal{L}_\lambda$的全体，构成$\mathfrak{M}$上的一个二维分布$\mathcal{L}$（它与 $U_\lambda\times F$上分布$\mathcal{L}_\lambda$相同）.

（证明），首先在 $P^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu)$中，$U_\lambda\times F$的向量场 ξ 在坐标为 $(u^i,\ x^a,\ x_1^a,\ x_2^a,\ n^a)$ 的坐标系中的分量以 $\xi^A(A=i,\ \alpha,\ 1^a,\ 2^a,\ \Delta^a)$表示，它在 $U_\mu\times F$上坐标为 $(\bar{u}^i,\ \bar{x}^a,\ \bar{x}_{1a},\ \bar{x}_2^a,\ \bar{n}^a)$的坐标系中的分量以 $\xi^{\bar{A}}$表示. 又在$P^{-1}(U_\lambda\times\cap U_\mu)$中，$U_\mu\times F$的向量场$\bar{\xi}$关于上述第二个坐标系的分量以 $\bar{\xi}^{\bar{A}}$ 表示. 同样我们可以定义 η^A，$\eta^{\bar{A}}$，$\bar{\eta}^{\bar{A}}$。显然 $\bar{\xi}^{\bar{A}}$，$\bar{\eta}^{\bar{A}}$

$$\bar{\xi}:(\delta_1^i,\bar{x}_1^a,\overline{\{{}_{1\,1}^{\,i}\}}\bar{x}_i^a+\bar{h}_{11}\bar{n}^a,\overline{\{{}_{1\,2}^{\,i}\}}\bar{x}_i^a+\bar{h}_{12}\bar{n}^a,-\bar{h}_1^i\bar{x}_i^a),$$

$$\bar{\eta}:(\delta_2^i,\bar{x}_2^a,\overline{\{{}_{1\,2}^{\,i}\}}\bar{x}_i^a+\bar{h}_{12}\bar{n}^a,\overline{\{{}_{2\,2}^{\,i}\}}\bar{x}_i^a+\bar{h}_{22}\bar{n}^a,-\bar{h}_2^i\bar{x}_i^a).$$

为简单起见，令

$$x^i=u^i,\quad x_\Delta^a=n^a$$

这时把变换(2.96)，(2.97)归纳的写做

$$\bar{x}^A=\bar{x}^A(x^i,\ x^a,\ x_1^a,\ x_2^a,\ x_\Delta^a)$$

由这个记法，则

$$\xi^{\bar{A}}=\frac{\partial\bar{x}^A}{\partial x^B}\xi^B$$

我们容易写出阵 $(\partial\bar{x}^A/\partial x^B)$ 如下

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i{}_j & 0 & 0 & 0 \\ x^a{}_i \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^k} \dfrac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} & 0 & \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & 0 \\ x_i^a \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^2 \partial \bar{u}^k} \dfrac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} & 0 & \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^a_\beta \end{pmatrix}$$

从矩阵$(\partial \bar{x}^A/\partial x^B)$的形状可知

$$\xi^{\bar{i}} = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}\xi^j = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^1}$$

所以 $$\xi^{\bar{i}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\overline{\xi^i} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\overline{\eta^i}$$

其次 $$\xi^{\bar{a}} = \xi^a = x_1{}^a = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\bar{x}_1{}^a + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\bar{x}_2{}^a$$

所以 $$\xi^{\bar{a}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\overline{\xi^a} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\overline{\eta^a}$$

又 $$\xi_1{}^{\bar{a}} = x^a{}_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^k} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j}\xi^j + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\xi_1{}^a + \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\xi_2{}^a$$

在最后，将ξ^A用 (2.88) 的分量代入，则得

$$\xi_1^{\bar{a}} = \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^k}\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^1} + \left\{{i \atop j1}\right\}\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^1}\right)x_i{}^a + h_{i1}\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^1}n^a$$

$$= \left\{{\bar{m} \atop 1k}\right\}\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^m}\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^1}x_i{}^a + \bar{h}_{1k}\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^1}n^a$$

$$= \left[\left\{{\bar{m} \atop 1k}\right\}\bar{x}_m{}^a + \bar{h}_{1k}\bar{n}^a\right]\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^1}$$

$$\therefore \quad \xi_1^{\bar{a}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\overline{\xi_1^a} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\overline{\eta_1^a}$$

同样可以导得

$$\xi_2^{\bar{a}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\bar{\xi}_2^{\bar{a}} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\eta_2^{\bar{a}}$$

$$\xi_\Delta^{\bar{a}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\bar{\xi}^{\bar{a}}_\Delta + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\eta_\Delta^{\bar{a}}$$

把三面结果归纳起来，则得

$$\xi^{\bar{A}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1}\bar{\xi}^{\bar{A}} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}\bar{\eta}^{\bar{A}}$$

同样 $$\eta^{\bar{A}} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2}\bar{\xi}^{\bar{A}} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2}\bar{\eta}^{\bar{A}}$$

最后的两个方程说明在 $P^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)$ 中 $U_\lambda \times F$ 的两个向量 ξ, η 所张成的二维分布 $\mathcal{L}_\lambda$ 与 $U_\mu \times F$ 的向量 $\bar{\xi}, \eta$ 所张成的二维分布 $\mathcal{L}_\mu$ 一致。这一事实表明 $U_\lambda \times F$，($\lambda \in \Lambda$) 的各个确定的二维分布 $\mathcal{L}_\lambda$ 的集合构成 D 上的大范围的二维分布 $\mathcal{L}$。

〔第六段〕最大积分流形的性质。

在第Ⅰ部分中，已定义过在 (u^1, u^2) 平面上连通的且单连通区域的曲线在 $D \times F$ 中二维分布的最大积分流形上的上升。由引理 6 可知上升的概念，可以扩张到微分流形 M 上的纤维丛 $P: \mathfrak{M} \to M$。在 M 的点 A 上过 $\mathfrak{M}$ 的点 A^* 且由引理 6 所确定的分布 $\mathcal{L}$ 的最大积分流形设为 M^*。这时具有端点 A，B 的 M 的曲线 Γ，上升为过点 A^* 的上升曲线 Γ^* 的端点 B^* 必在 M^* 上。这样可以得到 M^* 的各个点。

【引理 7】在二维微分流形 M 上，纤维丛 $P: \mathfrak{M} \to M$ 的各个最大积分流形 M^* 是 M 的复盖流形。

（证明）首先，显然射影 $P: M^* \to M$，（P 是 $P| M^*$ 的简写）是满射。现在考虑 M^* 与 $P^{-1}(U_\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) 的交，一般地它不是弧状连通的，面具有几个弧连通分支。由引理 5 可知，各个这样

弧状连通分支在射影 p 下与U_λ同胚．在U_λ的点 P 上M^* 的点以 P_1^*, P_2^*, …表示，P_1^*, …具有在射影 p下与 P 的邻域同胚的邻域．从而M^*是M的复盖流形．

【推论】 当微分流形M单连通时，对在M上纤维丛$p: \hat{M}\to M$的分布 $\mathcal{L}$ 的最大积分流形M^*，射影 $p| M^*$是同胚映射．

〔第七段〕 定理 7，定理 8 的证明

我们对连通且可定向的微分流形M的相容坐标邻域所构成的复盖 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$，(局部坐标为 $(u^1_{(\lambda)}, u^2_{(\lambda)})$，$(\lambda\in\Lambda)$，在 $p^{-1}(U_\lambda)\cap M^*$ 的各个连通分支中，引入和第三段一样地参数 $(u^1_{(\lambda)}, u^2_{(\lambda)})$，则第三段的理论对这里都适合，而且与 (2.93)，(2.94) 类似的式子对M^*全区域都成立．如果映射$\rho_\lambda: p^{-1}(U_\lambda)\to R^3$用 $(u^i_{(\lambda)}, x^\alpha, x_1^\alpha, x_2^\alpha, n^\alpha)\to x^\alpha$来定义，这个定义在$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ 时，它与按同样方法定义的 $\rho_\mu: p^{-1}(U_\mu)\to R^3$ 在映射 $p^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu)$下是一致的．当指标$\lambda$在$\Lambda$ 内移动时，这样映射的全体确定了$\hat{M}\to R^3$的映射，这个映射以ρ表示．

现在考虑ρ在M^*上的限制，$\rho: M^*\to R^3$．在 $p^{-1}(U_\lambda)\cap M^*$，$(\lambda\in\Lambda)$ 的各个连通分支上，由于有与 (2.93)，(2.94) 类示的式子成立，则这个映射是微分流形M^*到 R^3 中的浸入．从而这些各个连通分支在浸入时，显然它们的第一，第二张量场与M上以前所给定的张量场g, h在U_λ 上的限制是一致的，从而得到下面定理．

【定理 7】 在连通且单连通的二维微分流形 M 上，给出c^2类恒正二阶对称张量场g与c^1类对称二阶张量场 h，假定它们满足高斯和柯达奇方程，这时 $q=p| M^*$下的曲面 $(M, \rho\circ q^{-1}, R^3)$的第一，第二基本张量场与 g, h 一致．（若M不是单连通但是可定向曲面(M^*, ρ, R^3)的第一，第二基本张量场与 g, h 在由q后拖的 q^*g，q^*h一致．

最后，对M是微分流形的情形．下面定理与定理6相当．

【定理8】浸入R^3的两个参数曲面，它们连通，可定向而且互相微分同胚，如果具有相同的张量场g与h分别做为第一，第二基本张量场时，它们在R^3的某运动下重合．

第二部分　微分几何学习指导

第一章　曲线论学习指导

(一) 本章要点

本章讨论空间曲线在正常点邻域内的性质和形状，其要点有四：

1. 给出简单曲线弧的概念和解析表示式；在曲线上一点，引进了相伴三棱形，并导出构成相伴三棱形的三直线（切线，主法线，副法线）和三面（法平面，从切面，密切平面）的方程式。其中切线是“最贴近曲线”的直线，密切平面是最贴近曲线的平面。

弧长是曲线的自然参数，它是曲线的运动不变量。引进弧长参数可以使许多公式化简。

2. 导出空间曲线的基本公式（F—S公式）。基本公式的应用，贯穿在整个的曲线论中，在推导此公式的同时，引进了曲线的两个主要的微分不变量——曲率和挠率。这两个量决定了曲线的形状特征。是刻划空间曲线在某点邻近的弯曲程度和离开密切平面而扭曲的程度的量。

3. 利用曲线的基本公式，讨论曲线在正常点邻域的结构，从波开特公式看出，曲线在某点的曲率和挠率完全决定了曲线在该点邻近的形状。基本上有两种情况，当 $\varkappa>0$ 时，为右螺旋线，当 $\varkappa<0$ 时，为左螺旋线。

4. 空间曲线的基本定理，它从理论上进一步证明了：不

但曲线形状决定了它的曲率和挠率，而且曲率和挠率还决定着曲线的形状，从而显示了微分不变量$\kappa(s)$，$\varkappa(s)$的重要意义。

（二）基本要求

1. 弄清简单曲线弧的概念和解析条件，会判别给定条件下的曲线是否为简单曲线。

2. 掌握曲线相伴三棱形的概念、结构、用途以及对于取不同参数时，它的计算公式。

3. 深入理解F·S公式的几何意义，并能应用此公式讨论空间曲线中的一些问题。

4. 深入理解曲率、挠率的几何意义，熟记对不同参数的曲率和挠率的计算公式，并能根据它的特点，判别曲线的一般特征。

5. 理解定义、定理，例题的目的、作用、几何意义及前后的关系。

（三）内容分析

一、概述

本章所讨论的对象是简单曲线弧，它是通过直线段在空间中的同胚映射来定义的，由于同胚映射是双方单值且连续的，所以由简单曲线弧的定义可知它是无自交点和尖点的光滑曲线弧。

从数学分析和解析几何中知道，空间曲线可用函数来表示，反过来又常常通过方程（函数）来定义曲线，例如参数方程

（单参数的函数）

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \tag{1}$$

表示一条空间曲线。

有时，也用空间两个曲面的交集来定义曲线，即

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{2}$$

上述方程所表示的曲线不一定都是简单曲线，只有方程（1）满足本章§1定理1的条件，方程（2）满足本章§1定理2的条件时，才是我们所要讨论的简单曲线。因此，通过§1的两个定理，给出了简单曲线弧的解析表示式，即（1），（2）式。

在曲线论中，主要讨论四个基本概念，即切线、弧长、曲率和挠率。并通过这些微分不变量在曲线上不同点的变化情况来研究曲线的局部形状和性质。

概括地说，就是首先建立曲线上的相伴三棱形 $\{P;\ \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\beta}\}$。然后根据$\{P;\ \boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}\}$对某固定点的$\{P_0;\ \boldsymbol{\tau}_0,\ \boldsymbol{\nu}_0,\ \boldsymbol{\beta}_0\}$的相对的微小变化来描述曲线的变化状态。而它的转动变化规律即是F—S公式。其中系数κ表示曲线的切线向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向对弧长 s 的变化率的绝对值，它描述了曲线对切线的弯曲状态。χ 表示副法线向量$\boldsymbol{\beta}$的方向对弧长 s 的变化率，它刻划了曲线离开密切平面而扭向空间的状态，这两个量描述了简单曲线弧在正常点P_0邻域中的形象。

由上所述，曲率κ和挠率χ完全能够刻划曲线的基本特征。反之，当$\kappa=\kappa(s)>0$，$\chi=\chi(s)$为连续可微函数时，在区间 $a\leqslant s\leqslant b$上又完全确定了曲线的几何形状。这一事实，由曲线的基本定理作出了理论上的回答。最后，通过定倾曲线和贝特朗曲

线等特殊曲线的讨论又进一步给出具体的实例，这就是本章的基本思想方法。

二、对一些主要问题的分析

1. 直线段与简单曲线弧

在本节中，几何地给出简单曲线弧的概念以及它的解析表示式。因此用直线段通过同胚映射定义简单曲线弧。简言之，就是：简单曲线弧是一直线段的连续变形（拓扑象）。

从几何直观上解释，简单曲线弧是一直线段通过连续变形而得到的"光滑曲线段"。为叙述方便，我们不妨以平面上的简单曲线弧为例：如果，我们把直线段 $\overline{AB}$ 置于直角坐标系的 x 轴上，它的连续变形为简单曲线弧 $\overset{\frown}{A'B'}$（如图1′—1）。从定义不难看出，简单曲线弧有下列特点：

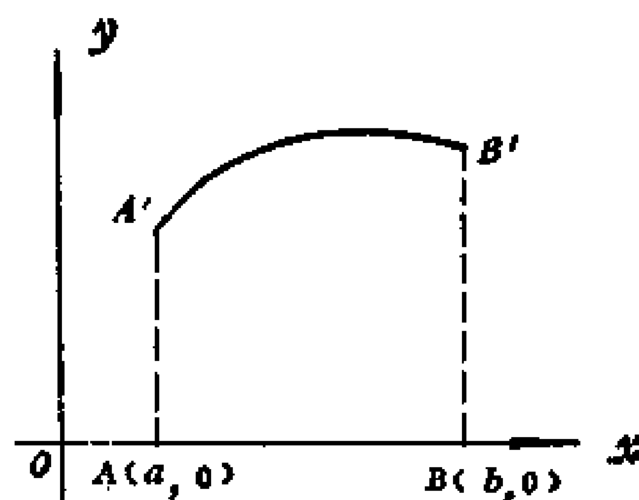


图1′—1

(i) 当线段 $\overline{AB}$ 上的点从$x=a$移动到$x=b$时，曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$上的点从$x=a$的对应点A'，移动到对应于 $x=b$ 的点B'，其轨迹恰为曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$；反之，曲线弧$A'B'$ 上的点与线段$\overline{AB}$ 上的点也一一对应。因此，简单曲线弧无自交点。

(ii) 简单曲线弧上的每一点都有切线，且当切点在弧上移动时，它也随之连续转动，所以，简单曲线弧上无尖点。

由曲线的参数方程可直接写出它的向量式方程L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

$a \leqslant t \leqslant b$，当向量方程满足下列条件：(a)向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的，且 L 上的点与参数 t 的值一一对应；(b)向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 有连续导向量 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 存在，且 $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq 0$，则说 $\boldsymbol{r}(t)$ 所表示的曲线为简单曲线。

2. **正常点与奇点**

简单曲线弧上的点为正常点，而正常点的邻域内的曲线弧为简单曲线弧。直观地说，如果在 P 点的邻域内划一很小的长方形，落在长方形内的曲线部分为简单曲线弧时，那么，点 P 为正常点（如图 1′—2）。反之，不论长方形怎样缩小，始终达不到这一条件的点，叫做奇点。如图 1′—2 上的点 P_1 和 P_2。

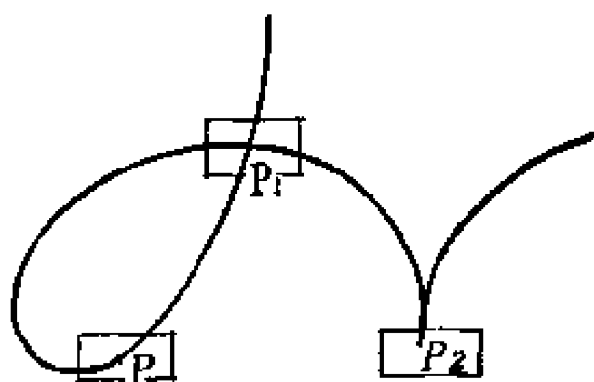


图1′—2

下面，我们以平面曲线为例，介绍一下正常点及奇点的解析条件。

(i) 正常点：设平面曲线 C 的方程为 $F(x, y)=0$，$M_0(x_0, y_0)$ 为 C 上的已知点。若 $F(x, y)$ 对 x 和 y 在该点的偏导数值 $F_x(x_0, y_0)$，$F_y(x_0, y_0)$ 不同时为 0，则点 $M_0(x_0, y_0)$ 是正常点。

此结论的证明可从隐函数存在定理直接得到，读者可仿照本章§1定理 2 的证明中的有关部分，独立解决。

这里值得注意的是上述结论只是正常点的充分条件，并不是必要条件。也就是说，当 M_0 为正常点时，也可能出现 $F_x(x_0, y_0)$，$F_y(x_0, y_0)$ 同时为 0 的情形。

例如，抛物线 $F(x, y)=y^2-x=0$，因为 $F_x=-1 \neq 0$，所

以它上面的点全部是正常点。如果我们在上述方程左端乘以 (x^2+y^2)，则得新的方程 $G(x, y)=(y^2-x)(x^2+y^2)=0$。由于 $x^2+y^2=0$ 只包含原点 $x=0$，$y=0$，所以新方程 $G(x, y)=0$ 所代表的曲线仍为原抛物线。从此方程容易得到：虽然原点 (o, o) 是正常点，但在此点仍有 $G_x(o, o)=0$，$G_y(o, o)=0$，因此说，$G_x(x_0, y_0)$，$G_y(x_0, y_0)$ 不同时为 0，只是正常点的充分条、并不是必要条件。

(ii) 奇点：设曲线 C 的方程为 $F(x, y)=0$，$M_0(x_0, y_0)$ 为 C 上的已知点，若 $F_x(x_0, y_0)=F_y(x_0, y_0)=0$，则 M_0 为曲线 C 上的奇点。这时，曲线在该点的切线方向不能确定。

显然，奇点的坐标同时满足三个方程：

$$F(x_0, y_0)=0,\quad F_x(x_0, y_0)=0,\quad F_y(x_0, y_0)=0$$

此事实，将在讨论包络中应用。

奇点包括孤立点、结点和尖点。

假设曲线 C：$F(x, y)=0$ 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

且当 $t=t_0$ 时，$x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$ 为奇点。将参数式代入一般式，得

$$F(x(t), y(t))=0$$

关于独立参数 t 微分上式，得

$$F_x\frac{dx}{dx}+F_y\frac{dy}{dt}=0$$

再次微分，得

$$F_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2F_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+F_{yy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+F_x\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$+F_y\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

因为奇点满足方程 $F_x(x,y)=0$，$F_y(x,y)=0$，所以上式变为

$$F_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2F_{xy}\frac{dx}{dt}\ \frac{dy}{dt}+F_{yy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0$$

或 $$F_{xx}dx^2+2F_{xy}dxdy+F_{yy}dy^2=0$$

将值 $x=x_0$，$y=y_0$代入，则

$$F_{xx}(x_0,\ y_0)=a,\ F_{xy}(x_0,\ y_0)=b,\ F_{yy}(x_0,\ y_0)=c$$

皆为常数．所以在点$(x_0,\ y_0)$处的切线方向 $\frac{dy}{dx}$ 完全由上面方程决定．此时须解关于$\frac{dy}{dx}$的二次方程，而其判别式为

$$H=ac-b^2$$

(a) 当 $H>0$ 时，无实根．即在以点M_0为中心的充分小邻域内，除M_0点外，再没有曲线C上的点，这时称奇点M_0为孤立点．例如，曲线 $(x^2+y^2)(y^2-x-1)=0$，坐标原点就是它上面的孤立点（如图 1′—3）．

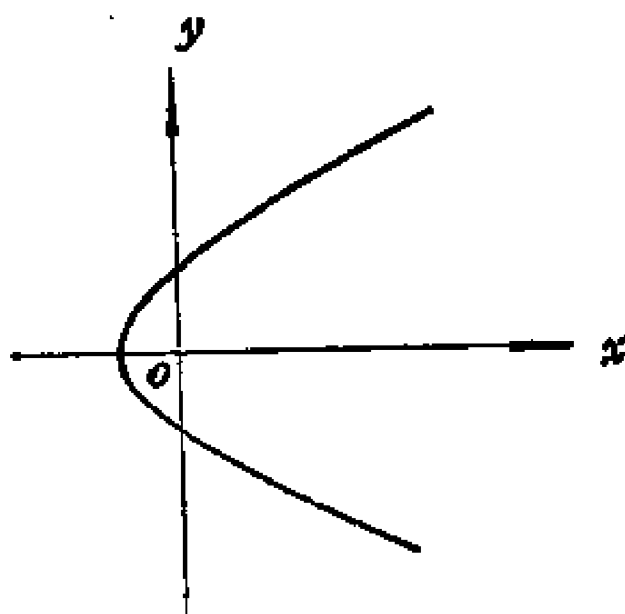


图1′—3

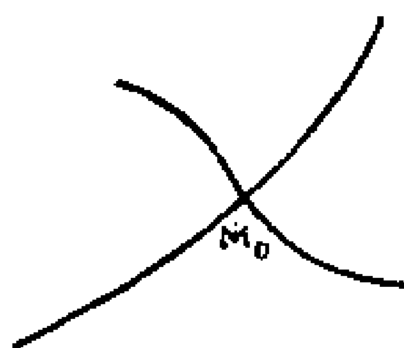


图1′—4

(b)当$H<0$时，关于$\frac{dy}{dx}$的二次方程有不同二实根，这时，曲线有两支线过M_0点，此时称M_0为结点．在该点邻域内

曲线由两条彼此相交的简单曲线组成（如图1′—4）。

(c) 当 $H=0$时，方程有重根，即曲线从奇点M_0出发的各支线在该点有共同的切线。根据各支线对于过奇点的切线和法线的位置不同，此时，又可分为第一类尖点和第二类尖点。

如半立方抛物线 $y^2=ax^3$ 上，坐标原点为奇点，过此点的二支线位于过奇点 (o,o) 的法线同侧而在切线的异侧（如图1′—5），这时称奇点（原点(o,o)）为第一类尖点。

又如，曲线 $(y^2-x^2)-x^5=0$，坐标原点也是它上的奇点，但过该点的二支线位于过奇点的法线及切线的一侧（如图1′—6），这时称奇点$M_0(o,o)$为第二类尖点。

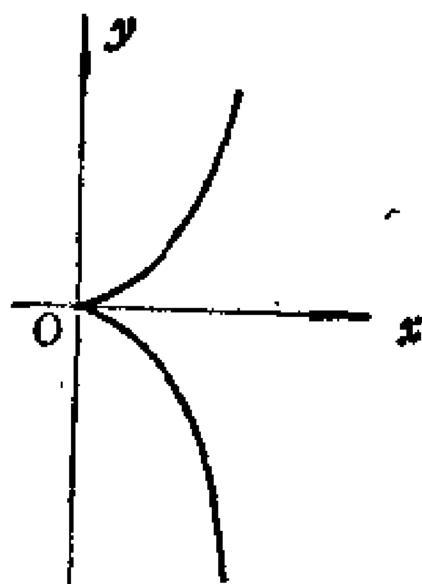


图1′—5

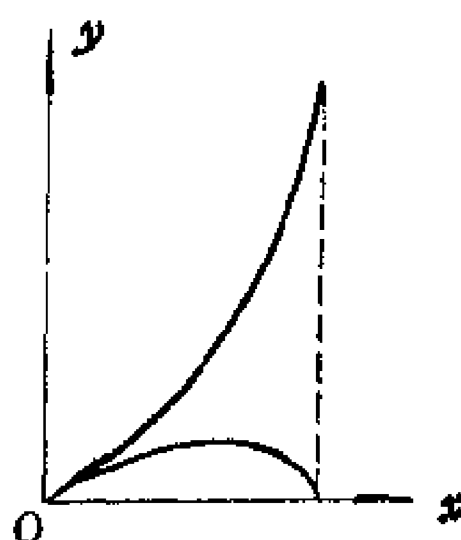


图1′—6

关于奇点的讨论，是较复杂的问题，上面只介绍其中几种简单的情形。有兴趣的读者可阅读诺尔金(Нолдцн) 的《微分几何》等有关参考书。

3. 曲线的切线

大家熟知，在解析几何中，我们曾用割线的极限位置来定义二次曲线的切线。对于空间曲线同样有类似的定义。

设 $P_0(s)$为曲线L上一点，$P_1(s+\Delta s)$ 为L上P_0点的邻近点。当点P_1沿曲线趋近于点P_0时，割线 P_0P_1 的根限位置，即为

曲线在P_0点的切线。实际上，上述定义与本教材的定义是完全一致的。

因为空间直线由一已知点和一个定方向完全确定。为求过空间曲线L上的已知点P_0的切线，关键在于确定其切线的方向向量。为此，我们不妨先来考察一下割线P_0P_1的方向向量的极限是什么？取$\overrightarrow{P_0P_1}$为割线的方向向量，其中P_1点是沿着曲线L的增加方向选取的（如图1′—7），由于

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)$$

则当$P_1\to P_0$时，$\overrightarrow{P_0P_1}$的极限为

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\Delta s}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}$$

$$=\boldsymbol{r}'(s)$$

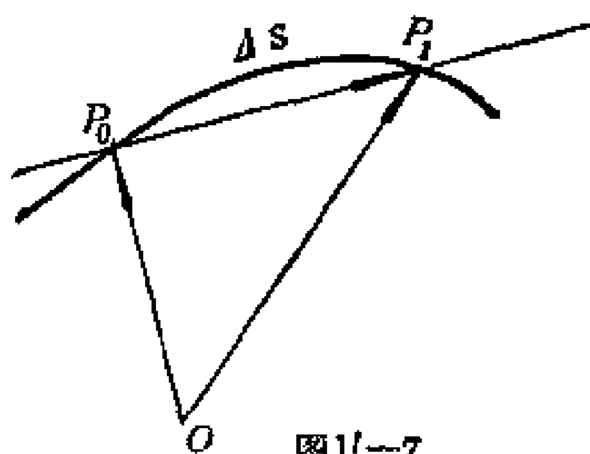


图1′—7

由导向量的几何意义可知，它刚好是曲线L在P_0点的切向量。所以，以过L上P_0点的切向量为方向向量的直线是曲线在P_0点的切线。

切线有一条很重要的性质，即曲线在切点的邻域内与切线的差异程度比其它过该点的任意直线的差异程度都小，换句话说，切线是最贴近曲线的直线。因此，曲线上某一点的临近部分，可用其切线上的对应线段来代替，这样“以直代曲”的误差是很小的。

上述说法只是描述性的叙述，利用切触阶的概念可给出曲线与切线贴近程度的数值估计，从本章§3曲线与曲线在公共点P_0构成n阶切触的充要条件可知，曲线L在P_0点的切线与曲线L在该点至少构成一阶切触，在非逗留点($\dot{r}\times\ddot{r}\neq 0$)处，切线

与曲线的切触阶是1；在逗留点，其切触阶一般是2，也可能更高，若在P_0点，向量r'，r''，…… 中第一个不等于零的是$r^{(n+1)}$，则切线和曲线有n阶切触，如平面曲线$y=x^3$在原点与切线有二阶切触；$y=x^4$在原点与切线有三阶切触等等。

显然，在P_0点直线与曲线具有1阶切触，就是直线与曲线有两个公共点P_0，P_1，当$P_1 \to P_0$时，直线的极限位置，即在P_0点的切线。如果L与C在P_0点具有n阶切触，那就是L与C有$n+1$个公共点P_1，…，P_n，P_0当P_1，…，$P_n \to P_0$时，直线L的极限位置一直线，是在P_0点的曲线的切线。可见n阶切触的切线比一阶切触的切线，在P_0点更靠近曲线C。

4. 曲线的密切平面

虽然空间曲线并不在一平面上，但是对于曲线任一点P_0，一般说来都有一个最贴近曲线的平面，这就是曲线在该点的密切平面。

密切平面既然是最贴近已知曲线的平面，那么过该点的切线应当在密切平面上。但是，过已知点又包含其切线的平面有无数多个，为寻找这样平面中与曲线上点偏差最小的平面，我们可以采取如下做法：

将曲线L投影到过P点面垂直于切线τ的法平面Q上（如图1'—8），则曲线L在P点的邻域部分在Q上的射影形成一条曲线C（如图1'—8所示），此新曲线C一般以P点为尖点，若C曲线在

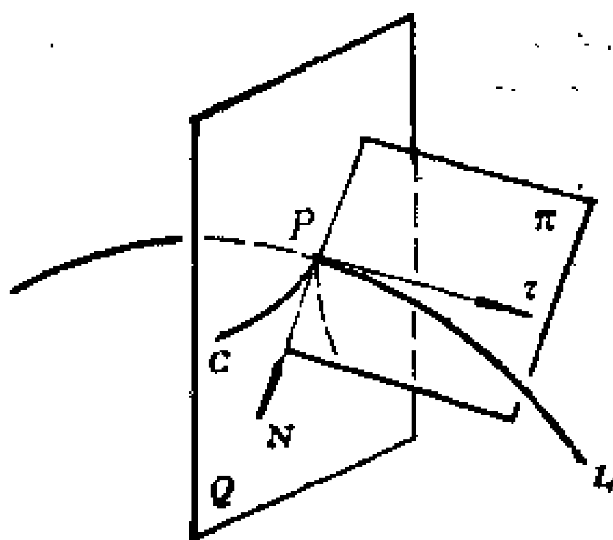


图1'—8

P点的切向量为N，则由τ和N决定的平面就是最贴近曲线的

平面π。π即为P点的密切平面。

由曲线在正常点邻域结构的讨论可知，曲线L在P点的法平面上的射影曲线C，正好是以主法线为切线的半立方抛物线（详见本章§6），所以上述作法中的C曲线的切线为原曲线L的主法线，因此τ与N决定的平面为密切平面。

对于密切平面，我们同样可通过切触阶的概念给出它与曲线贴近程度的数值估计，即密切平面是与曲线至少具有二阶切触的平面。这里"至少"的切触阶是指在曲线的非逗留点，面在逗留点，密切平面的法向量由$r'\times r^{(m)}(\neq 0)$决定，此时，密切平面在该点与曲线至少有m阶切触。

应用密切平面的性质，在近似计算中，如果误差要求允许曲线上某点到平面间距离满足三阶无穷小时，则可把空间曲线在这点邻域内的小曲线段转化为该点密切平面上的平面曲线来处理，从面减少问题的复杂程度，为计算带来了方便。

通常情况下，简单曲线上的每一点都存在唯一的密切平面。特殊地，当曲线为直线时，在它上每一点的密切平面都是不确定的，这时，我们可以把每一个经过该直线的平面看成它每一点的密切平面；当曲线为平面曲线时（非直线），它所在的平面即为曲线上每一点的密切平面。

对于密切平面从不同的角度出发，可得下列几种定义。

(a) 曲线L上过P点的切线和主法线所确定的平面，叫L在P点的密切平面。

此定义，正是我们本章中所采用的，它比较直观明了。

(b) 与曲线L在P点具有至少二阶切触的平面，叫密切平面。

此定义比较确切，它给出了曲线与密切面贴近程度的数值估计。

(c) 本章§4的〔例 2〕，也可看作密切平面的另一定义，它是用极限思想给出的．类似的想法，还可引进下面等价的定义。

设P_0为曲线L上一点，P_1，P_2为L上在P_0邻近的两点，这三点一般地决定一平面π。当P_1，P_2沿曲线L趋近于P_0时，平面π的极限位置也叫做L在P_0点的**密切平面**。它与前面密切平面的定义是等价的。

下面，我们来证明这个等价性。

（1）仿照本章§4〔例 2〕的证法，只要求出$\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}$的极限为$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$即可，读者可自己推导。

（2）首先求出由$P_0(s)$，$P_1(s+\varDelta s_1)$，$P_2(s+\varDelta s_2)$三点决定的平面π的方程．为此设ρ为π上任一点的流动向径，则向量$\rho-\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0$共面，所以此三点决定的平面方程为

$$(\rho-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)=0 \qquad (1)$$

其中

$$\boldsymbol{r}_1(s)-\boldsymbol{r}_0(s)=\boldsymbol{r}(s+\varDelta s_1)-\boldsymbol{r}(s) \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_0(s)=\boldsymbol{r}(s+\varDelta s_2)-\boldsymbol{r}(s) \quad (\text{如图}1'\text{—}9)\ (3)$$

对（2）、（3）式应用数学分析中的中值定理得

$$\boldsymbol{r}(s+\varDelta s_1)-\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}'(s+\theta_1\varDelta s_1) \quad 0<\theta_1<1$$

$$\boldsymbol{r}(s+\varDelta s_2)-\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}'(s+\theta_2\varDelta s_2) \quad 0<\theta_2<1$$

于是方程（1）变为

$$(\rho-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}'(S+\theta_1\varDelta S_1),\ \boldsymbol{r}'(S+\theta_2\varDelta S_2))=0 \qquad (4)$$

对于第（4）式，从第三到列减去第二列，再用一次中值定理，便得

$$(\rho-\boldsymbol{r}_0,\quad \boldsymbol{r}'(s+\theta_1\varDelta s_1),\quad \boldsymbol{r}''(+\overline{\varDelta s}\ ))=0$$

其中$\theta_1\varDelta s_1<\overline{\varDelta s}<\theta_2\varDelta_2$，当$\varDelta s_1\to0$，$\varDelta s_2\to0$时则得$\pi$的极限位置的方程为

$$(\rho-\boldsymbol{r}(s),\ \boldsymbol{r}'(s)\ \ \boldsymbol{r}''(s))=0$$

即 π 为密切平面。

这种定义方法有很大的普遍意义，它不仅应用于曲线，还可以用在曲面上，例如定义曲面的密切球面。

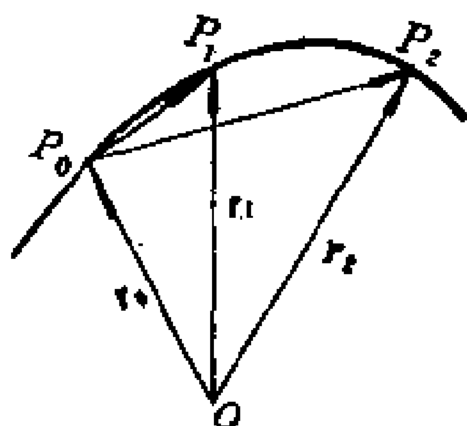


图1′—9

5. 曲线的密切球与密切圆

〔定义〕设一个球面 S 与一条空间曲线 C 有一公共点 P_0，如果球面 S 与曲线 C 在 P_0 至少构成三阶接触，则称 S 为 C 在点 P_0 的一个密切球面。设 P 为曲线 C 上 P_0 的邻近点，h 表示 P 到球面 S 的距离，d表示 P 与 P_0 之间的距离，则对密切球面来说，按两个图形的接触阶的定义，我们有

$$\frac{h}{d^3}\longrightarrow 0 \quad (P\longrightarrow P_0) \tag{1}$$

先确定 h，联结 P 与球心 A 交球面于两点 P_1，P_2，则 P_1 到 P 为 P 到球面的最短距离，P_2 到 P 为 P 点到球面最长距离。若球半径为 a，则 h 分别为

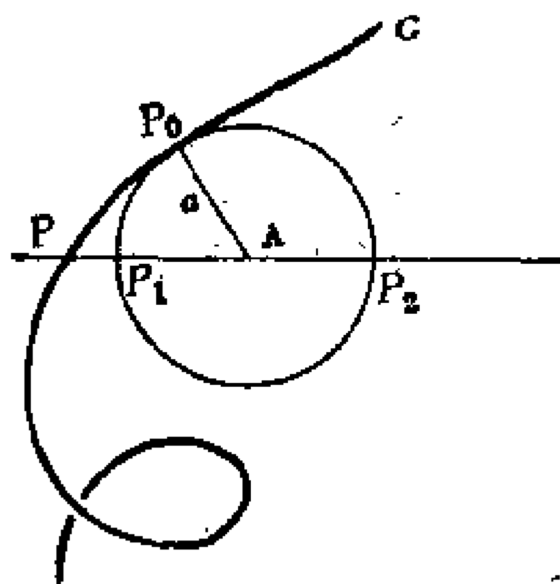


图1′—10

$$h_1 = PP_1 = AP - a$$

$$h_2 = PP_2 = AP + a$$

因为当 $P\longrightarrow P_0$ 时，

$$h_2\rightarrow AP_0 + a = 2a$$

所以 h_1 与 $h_1\cdot h_2$ 是同阶无穷小，

即 $\rho = h_1\cdot h_2 = AP^2 - a^2$ 与 h_1 是同阶无穷小。

若曲线 C 的自然参数表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \tag{2}$$

则向量 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{P_0P}-\overrightarrow{P_0A}=\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)-\overrightarrow{P_0A}$，因此

$$\rho=AP^2-a^2=[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)-\overrightarrow{P_0A}]^2-a^2 \qquad (3)$$

因为弦 $P_0P=d$ 与弧 $P_0P=s-s_0$ 是同阶无穷小，若令 $s-s_0=\lambda$，则条件（1）可写作

$$\frac{\rho}{\lambda_3}\longrightarrow 0 \quad (s\rightarrow s_0) \qquad (4)$$

然后将$s=s_0+\lambda$代入（3）式，并按泰勒级数关于α的幂级数展开，得

$$\rho=\rho_0+\rho_0'\lambda+\frac{1}{2!}\rho_0''\lambda^2+\frac{1}{3!}\rho_0'''\lambda^3+\cdots \qquad (5)$$

其中撇号表示对弧长的导数，下标“0”表示导数在点 $s=s_0$ 取值。要满足条件（4），展开式（5）必从λ的四次项开始，因此必有

$$\rho_0=0,\ \rho_0'=0,\ \rho_0''=0,\ \rho_0'''=0 \qquad (6)$$

若取球面的半径$a=P_0A$，则由（3）可知，第一个等式$\rho_0=0$是满足的，其次，把（3）式对s求导，则有

$$\begin{aligned}\rho'&=2\boldsymbol{r}'[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)-\overrightarrow{P_0A}]\\&=2\tau[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)-\overrightarrow{P_0A}]\end{aligned} \qquad (7)$$

由于 $[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)-\overrightarrow{P_0A}]_{s=s_0}=-\overrightarrow{P_0A}$

因而条件 $\rho_0'=0$ 变为

$$\tau\cdot\overrightarrow{P_0A}=0 \qquad (8)$$

此式表明，在P_0点球面s的半径$\overrightarrow{AP_0}$与曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切线垂直。因此，与曲线C在P_0点相切的球面中心落在过P_0点垂直于切线的法平面上。

为计算（6）式中的第三式 $\rho_0''=0$，我们将（7）式微

分，则有

$$\rho'' = 2\kappa\nu\ [\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(s_0) - \overrightarrow{P_0A}] + 2 \qquad (9)$$

当 $s = s_0$时代入，则 $\rho_0'' = 0$ 变为

$$-\kappa_0\nu_0 \cdot \overrightarrow{P_0A} + 1 = 0$$

或
$$\nu_0 \cdot \overrightarrow{P_0A} = R_0 \qquad (10)$$

这里$R_0 = \dfrac{1}{\kappa_0}$，为曲线$C$在$P_0$点的曲率半径。

从（10）式看出，球心A在该点主法线上的投影Q点为曲线C的曲率中心(※)。因而直线AQ是曲率轴(※)。由此可见，跟曲线构成二阶切触的球面，其中心落在曲率轴上（图1′—11）。

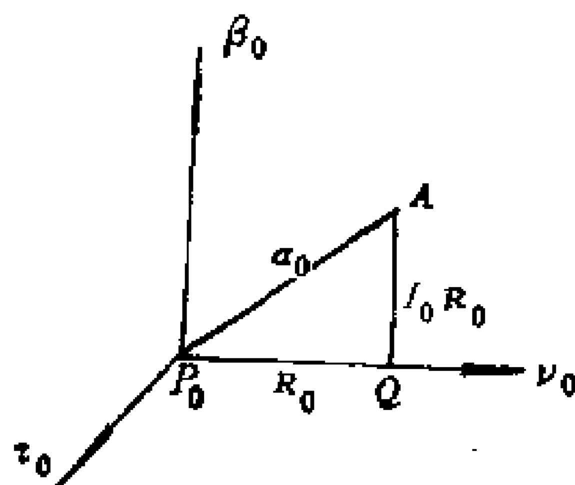


图1′—11

显然，这种球面有无限多个，因为这种球面中心在曲率轴上的位置可以任意选取，所有这种球面和密切平面相交于同一个圆，这圆称为空间曲线的**密切圆**。

最后，计算（6）式中的第四式 $\rho_0''' = 0$，为此将（9）对s再微分一次，便得

$$\rho''' = 2\boldsymbol{r}'\kappa\nu + 2\,[\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(s_0) - \overrightarrow{P_0A}]\,[\kappa\nu' + \nu\kappa']$$

因为

(※)曲率中心：位于主法线正向，且与曲线的距离等于曲率半径的点（密切圆中心），叫曲率中心。

(※)曲率轴：通过曲率中心并平行于副法线的直线，叫做曲率轴。

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\nu}'=-\kappa\boldsymbol{\tau}+\chi\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}=0,\ \overrightarrow{P_0A}\cdot\boldsymbol{\tau}_0=0,\ \overrightarrow{P_0A}\cdot\boldsymbol{\nu}_0=R_0$$

所以，以$s=s_0$代入上式，得

$$\rho'''=-2\kappa_0\chi_0\overrightarrow{P_0A}\cdot\boldsymbol{\beta}_0-2\frac{\kappa_0'}{\kappa_0} \tag{11}$$

这表明，如果

$$\overrightarrow{P_0A}\cdot\boldsymbol{\beta}_0=-\frac{1}{\chi_0}\cdot\frac{\kappa_0'}{\kappa^2}=T_0R_0' \tag{12}$$

其中T_0表示曲线在P_0点的挠率半径(※)，则曲线C和球面S在P_0点构成三阶切触，该球面为曲线在P_0点的密切球面.

(12) 式表示球心A在副法线上的投影与点P_0的距离等于T_0R_0'.

因此，密切球的中心A的向径为

$$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{r}(s_0)+R_0\boldsymbol{\nu}_0+T_0R_0'\boldsymbol{\beta}_0 \tag{13}$$

半径为

$$a=|\boldsymbol{r}(s_0)-\boldsymbol{a}_0|=\sqrt{R_0^2+(T_0R_0')^2} \tag{14}$$

或 $$a^2=R_0^2+(T_0R_0')^2$$

至此，我们可直接给出密切圆的定义：曲线在P_0点的密切球面与该点的密切平面的交线，即为曲线L在P_0点的密切圆。密切圆与曲线L在公共点P_0有共同的切线和主法线，所以它与曲线在该点构成至少有二阶切触. 这一事实，在近似计算中也有应用：如果误差允许范围限制在三阶无穷小之内，那么曲线在该点邻域的局部曲线段可用它的密切圆上圆弧来代替，这样，即满足了误差要求，又使计算能化繁为简.

(※) 挠率半径：曲线在P_0点的$\frac{1}{|\chi|}$.

6. 平面曲线

平面曲线固然可视为空间曲线的特例，但又不完全如此。因它还具有本身的一些特殊性，下面，我们分三部分来介绍：

（1）平面曲线的基本公式

假设平面曲线C在xy平面上，则作为空间曲线，C的副法向量β和z轴上的单位向量e_3最多只差一个符号，即

$$\beta=\varepsilon e_3,\quad \varepsilon=\pm 1 \tag{1}$$

在非逗留点，C的主法向量总指向曲线的凹入的一方。因此，若e_3朝着纸的上方时，则 $\beta=e_3$, $\varepsilon=1$（如图 1′—12中的P_1点）；而在P_2点，$\beta=-e_3$，$\varepsilon=-1$。在拐点P_0 处，主法向量ν和副法向量 β 都不能无条件地唯一确定；当切点从不同的方向趋于P_0时，主法向量和副法向量的极限都有不同的正向，这样向量函数ν和β在P_0点是不连续的。

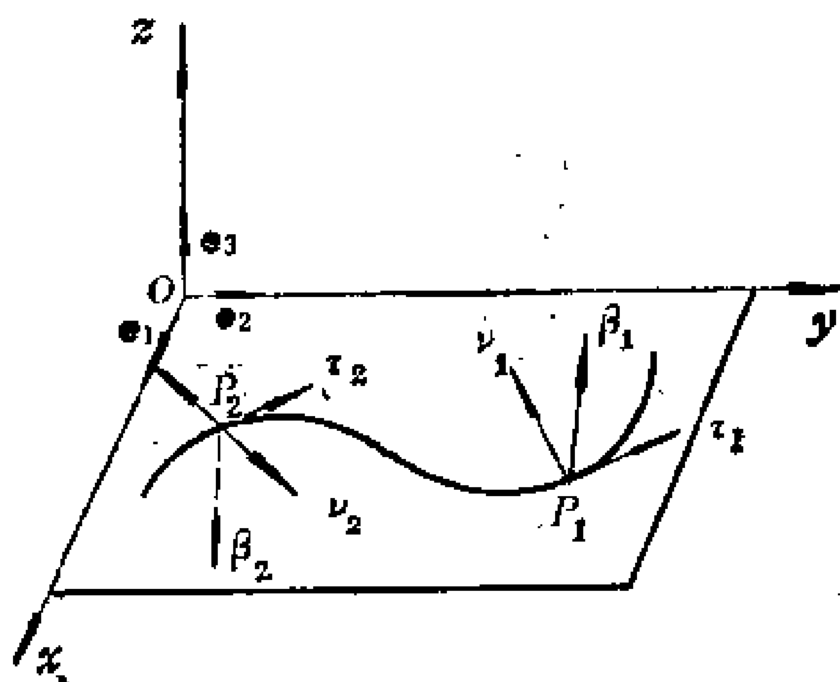


图1′—12

但是在平面曲线上，这种不连续性是可以设法避免的，单位向量e_3确定为平面的正侧，使它成为有向平面，于是在xy 平面上可引进有向角的概念，这样，我们就可以在C上的每一点

取C在xy面上（主）法线上的单位向量为$\boldsymbol{n}$，使切向量$\boldsymbol{\tau}$到$\boldsymbol{n}$的有向角为$\frac{\pi}{2}$，即令

$$\boldsymbol{n}=e_3\times\boldsymbol{\tau}$$

而以$\boldsymbol{n}$代替主法向量$\boldsymbol{\nu}$。显然$\boldsymbol{n}$是连续的，而且根据（1），得

$$\boldsymbol{n}=e_3\times\boldsymbol{\tau}=\varepsilon\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}=\varepsilon\boldsymbol{\nu}$$

如果我们的讨论不超出xy平面之外，单位向量$\boldsymbol{n}$就称为平面曲线的法向量。

现在对于平面曲线 C，$\boldsymbol{\beta}'=0$，挠率$\chi=0$，所以，基本公式变为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}'=\kappa\boldsymbol{\nu}\\ \boldsymbol{\nu}'=-\kappa\boldsymbol{\tau}\end{cases}$$

以$\boldsymbol{n}$代$\boldsymbol{\nu}$，即得

$$\boldsymbol{\tau}'=\varepsilon\kappa\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}'=-\varepsilon\kappa\boldsymbol{\tau}$$

令 $\kappa_r=\varepsilon\kappa$，则平面曲线基本公式可写成

$$\boldsymbol{\tau}'=\kappa_r\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}'=-\kappa_r\boldsymbol{\tau}$$

其中$\kappa_r(s)$称为曲线C在平面上的**相对曲率**。它和“绝对曲率”κ不同的是：$\kappa\geqslant0$，而κ_r则可正可负。κ_r是连续函数，当ε变号时，κ_r也变号，而中途经过零，例如在图1′—13中，P_1点的$\kappa_r>0$，在P_0点$\kappa_r=0$，P_2点$\kappa_r<0$。

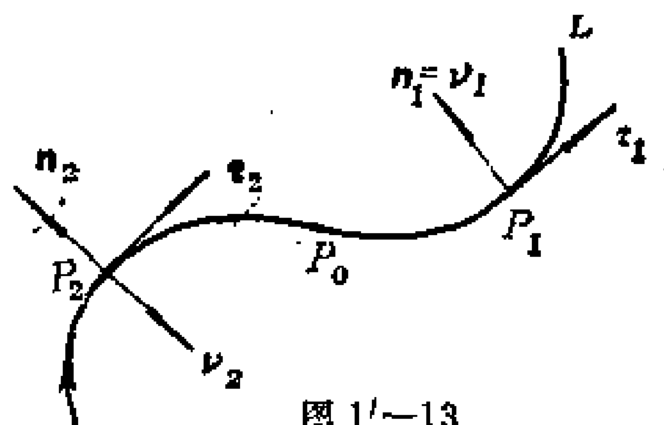


图1′—13

注意，当曲线的方向颠倒时，s，$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{n}$都变号，因此κ_r也随之变号。例如，一个按反时针方

向描绘的圆的 $\kappa_r>0$，而一个按顺时针方向描绘的圆的$\kappa_r<0$。因如，若只给一条无向曲线，κ_r 不能确定，这一点与κ是不同的。

（2）平面曲线的相对曲率

设平面曲线C在一点的切向量与x 轴正向所成的有向角为φ（图1′—14），则

$$\tau = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{j}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi$$

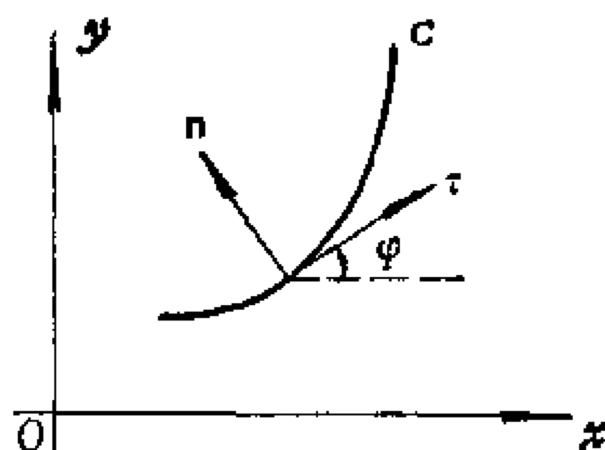


图1′—14

故

$$\tau' = -\boldsymbol{i}\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \boldsymbol{j}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}$$

$$= (-\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}$$

$$= \boldsymbol{n}\cdot\frac{d\varphi}{ds}$$

和平面曲线的基本公式比较，得相对曲率

$$\kappa_r = \frac{d\varphi}{ds} \qquad (3)$$

由此可知，在曲线“向左转”的地方，$\kappa_r>0$；在曲线“向右转”的地方，$\kappa_r<0$（图1′—15）。这个公式基本上与曲率κ的几何意义一致。不同的是此处φ为一有向角，而在空间曲线的相应公式里的$\Delta\theta$是空间两个向量的夹角（无向角）。

上面是通过基本公式

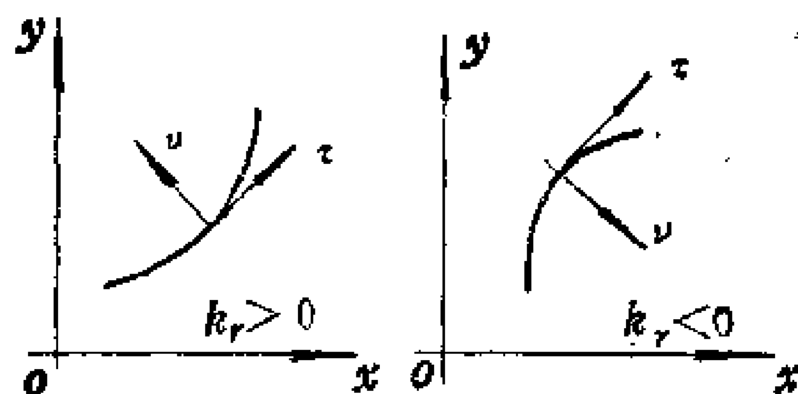


图 I'—15

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}' = \kappa_r \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' = -\kappa_r \boldsymbol{\tau}\end{cases}$$

和 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi$，导出相对曲率

$$\kappa_r = \frac{d\varphi}{ds}$$

反过来，从相对曲率 $\kappa_r = \frac{d\varphi}{ds}$ 和 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi$ 也可推出平面曲线的基本公式，作法如下：

由于 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi$

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi$$

而

$$\boldsymbol{\tau}' = (-\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{ds} = \boldsymbol{n}\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\boldsymbol{n}' = (-\boldsymbol{i}\cos\varphi - \boldsymbol{j}\sin\varphi)\frac{d\varphi}{ds} = -\boldsymbol{\tau}\frac{d\varphi}{ds}$$

又 $\frac{d\varphi}{ds} = \kappa_r$，所以，基本公式为

$$\boldsymbol{\tau}' = \kappa_r \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}' = -\kappa_r \boldsymbol{\tau}$$

这里，相对曲率 κ_r 也是曲线的运动不变量．因为，每一个

平面上的运动都可视为一个平移和一个旋转之积，在平移变换下，φ和s不变，而经过一个旋转时，每一条切线也都转动同样大小的角，s 也不变，所以$\frac{d\varphi}{ds}$不变。

若$x(s)$和$y(s)$为P点的坐标，则

$$\tau = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$$

其中 $x' = \cos\varphi$ $y' = \sin\varphi$，于是

$$\begin{cases} x'' = -\sin\varphi \dfrac{d\varphi}{ds} = -y'\kappa_r \\ y'' = \cos\varphi \dfrac{d\varphi}{ds} = x'\kappa_r \end{cases} \qquad (4)$$

由此，得

$$\kappa_r = -\frac{x''}{y'} = \frac{y''}{x'}$$

由于 x'，y' 中至少有一个不为0，所以这两个式子至少有一个可用。将（4）式中的两式．分别依次乘以 $-y'$，x'，得

$$-x''y' = y'^2\kappa_r$$

$$y''x = x'^2\kappa_r$$

由于 $x'^2 + y'^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

所以，上边二式相加，得

$$\kappa_r = x'y'' - x''y'$$

若引进任意参数 t，并设弧长 s 增加的方向为 t 的增加方向，则

$$\kappa_r = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

当取 $t = x$ 时，则

$$\kappa_r = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

（3）平面曲线自然方程的积分

由曲线的基本定理证明可知，若给定曲线的自然方程

$$\kappa = \kappa(s)\ (>0),\ \chi = \chi(s)$$

则这组函数可确定唯一的一条曲线。

按自然方程来确定曲线，称之为自然方程的积分法问题，也就是求微分方程组

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\boldsymbol{\nu}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\chi\boldsymbol{\nu}$$

的解的问题，这个问题不是初等的，但对于挠率$\chi = 0$的特殊情况，方程组可按求积法得到它的积分曲线。下面，就来介绍平面曲线自然方程的积分法。

当$\chi = 0$时，为平面曲线，这时方程组变为

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\boldsymbol{\nu}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{\tau}$$

现在来阐明，只须要通过两次求积分就可得平面曲线的有限方程。

平面曲线的自然方程

$$\kappa = \kappa(s)$$

设α为曲线的切线与x轴的交角，则有

$$\frac{d\alpha}{ds} = \kappa(s)$$

和
$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha$$

分别对上面各式积分，便得

$$\alpha = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds + \alpha_0$$

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\alpha\, ds + x_0$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \sin\alpha\, ds + y_0$$

其中，α_0，x_0，y_0分别为角度α，坐标 x，y在点 $s = s_0$ 处的值。

由于
$$\cos\alpha = \cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds + \alpha_0\right)$$

$$= \cos\alpha_0 \cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds\right) - \sin\alpha_0 \sin\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds\right)$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds + \alpha_0\right)$$

$$= \sin\alpha_0 \cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds\right) + \cos\alpha_0 \sin\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds\right)$$

而
$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha$$

再次积分，得

$$x(s) = \cos\alpha_0 \int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds\right) ds$$

$$-\sin\alpha_0\int_{s_0}^{s}\sin\left(\int_{s_0}^{s}\kappa(s)\,ds\right)ds+x_0$$

$$y(s)=\sin\alpha_0\int_{s_0}^{s}\cos\left(\int_{s_0}^{s}\kappa(s)\,ds\right)ds$$

$$+\cos\alpha_0\int_{s_0}^{s}\sin\left(\int_{s_0}^{s}\kappa(s)\,ds\right)ds+y_0$$

令
$$x^*=\int_{s_0}^{s}\cos\left(\int_{s_0}^{s}\kappa(s)\,ds\right)ds$$

$$y^*=\int_{s_0}^{s}\sin\left(\int_{s_0}^{s}\kappa(s)\,ds\right)ds$$

于是得

$$x=x^*\cos\alpha_0-y^*\sin\alpha_0+x_0$$

$$y=x^*\sin\alpha_0+y^*\cos\alpha_0+y_0$$

此式表明，如果整个平面平移一个向量$\overrightarrow{OO'}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2$，然后再旋转一个角$\alpha_0$，则每一点（$x$，$y$）就可以从点（$x^*$，$y^*$）得到。这就是说，曲线（$x(s)$，$y(s)$）是从曲线（$x^*(s)$，$y^*(s)$）经过一个变换得到的，因此，平面曲线的形状由它的曲率 $\kappa=\kappa(s)$ 完全确定，其中 $\kappa(s)$ 为连续函数。

〔例〕 试求曲率 $\kappa=$常数的常曲率曲线。

（解） 设 $\kappa\neq0$，α为切线与x轴的夹角，由于 $\dfrac{d\alpha}{ds}=\kappa$，第一次积分，有

$$\alpha=\int_0^s\kappa ds+\alpha_0=\kappa\cdot s+\alpha_0\quad（取\ s_0=0）$$

第二次积分

$$x=\int_0^s\cos(\kappa s+\alpha)\,ds=\frac{1}{\kappa}\sin(\kappa s+\alpha_0)+x_0$$

$$y=\int_0^s\sin(\kappa s+\alpha_0)\,ds=-\frac{1}{\kappa}\cos(\kappa s+\alpha_0)+y_0$$

从上式消去S，得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{1}{\kappa^2}$$

它表示以$\frac{1}{\kappa}$为半径，$(x_0,\ y_0)$为中心的圆。

若 $\kappa=0$，则$\alpha=\alpha_0$（常数）．所以

$$x=\int_0^s \cos\alpha_0 ds=S\cdot\cos\alpha_0+x_0$$

$$y=\int_0^s \sin\alpha_0 ds=S\cdot\sin\alpha_0+y_0$$

消去S，得

$$y-y_0=\mathrm{tg}\alpha_0(x-x_0)$$

这是平面上的直线方程．

因此得出，平面上的常曲率曲线有两种：

(i) 当曲率不为0时，是以曲率倒数为半径的圆。

(ii) 当曲率等于0时，是一条直线。

7．F—S公式的几何意义

我们已经知道，简单曲线弧上每个点P，都伴随着一个相伴三棱形$\{P(s);\ \tau(s),\ \nu(s),\beta(s)\}$。而且当相伴三棱形顶点$P(S)$沿简单曲线弧$L$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(S)$做微小移动时，相伴三棱形也随着运动．描述相伴三棱形运动规律的关系式，就是我们熟悉的F—S公式。即

$$\begin{cases}\dfrac{d\tau}{ds}=\kappa\nu\\[2mm]\dfrac{d\nu}{ds}=-\kappa\tau+\chi\beta\\[2mm]\dfrac{d\beta}{ds}=-\chi\nu\end{cases}$$

因为我们要通过它的运动，来分析曲线的弯曲状态，所以把运动的平行移动部分$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\tau$略去，而只讨论转动部分。

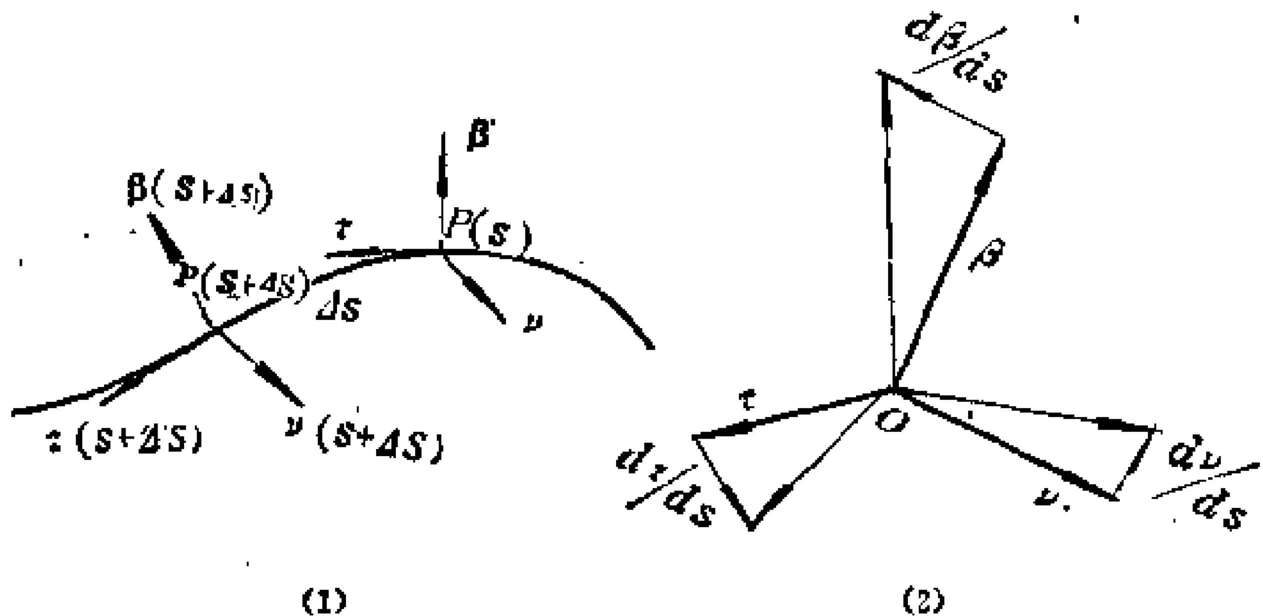


图1′—16

下面，我们对F—S公式描述的微小转动作一个分析。

把三棱形看做一个刚体，当它做微小转动时，必绕一个瞬时旋转轴转动。

由第一式$\frac{d\tau}{ds}=\kappa\nu$知道，向量$\tau'$总在主法向量$\nu$的正方向上，其模长等于曲线在该点的曲率$\kappa$，所以，$\tau'$和其它向量一样，等于它的模乘以与它同向的单位向量。又由第一章中§6·1的曲率定义和定理，有

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta S}\right|=\kappa,\quad \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta S}\right|=|\tau'|$$

其中，$\Delta\theta$表示沿曲线距离为ΔS的两点的切向量的夹角。当第二条切线沿曲线趋近于第一条时，比值$\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$的极限称为在对应点处关于曲线上所走过的路程的切线的转动速度，这个速度的

大小等于在同一点处的曲率值，所以也称向量$\kappa\nu$为曲率向量，$\kappa\nu$ 垂直于β，所以它以副法线向量β为瞬时旋转轴，以曲率κ为速率，向ν 的正方向进行转动。

其次，由公式的第三式

$$\frac{d\beta}{ds}=-\chi\nu$$

说明副法向量对弧长的微商与主法向量共线，其大小等于$|-\chi|$。由挠率的定义和定理，有

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right|=|-\chi|,\quad \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right|=|\beta'|$$

其中$\Delta\varphi$表示沿曲线距离为ΔS的两点的副法线间的夹角，当第二条副法线沿曲线趋近于第一条时，比值$\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$的极限为在对应点处关于沿曲线上所走的路程的副法线的旋转速度，这个速度的大小等于在同一点处挠率的模$|-\chi|$。又因为付法线垂直于密切平面，所以，在曲线上两点处的付法线间的夹角等于在此两点处密切面间的交角，因此可以说$|-\chi|$为密切平面关于沿曲线所走的路程S的旋转速度。显然$\frac{d\beta}{ds}=-\chi\nu$垂直于$\tau$，因此，它以切向量为瞬时旋转轴，以$|-\chi|$为速率，向$\nu$的反方向旋转。

对于公式

$$\frac{d\nu}{ds}=-\kappa\tau+\chi\beta$$

表明主法向量对于弧长S的微商总平行于从切面，其方向由$-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\chi^2}}$，$\frac{\chi}{\sqrt{\kappa^2+\chi^2}}$来确定，其大小等于$\sqrt{\kappa^2+\chi^2}$。从运动学的意义来讲，此公式表示对于每一个给定的$S$值，相伴三棱形象刚体一样旋转时的角速度向量，而它是以两个瞬时旋转

轴τ，β 的合成轴，即 $-\kappa\tau$ 与$\chi\beta$ 合成的向量为瞬时旋转轴，以$\sqrt{\kappa^2+\chi^2}$为速率的转动。

总之，F—S 公式所描述的相伴三棱形的转动，通过切向量τ的转动方向看出曲线的弯曲方向，它的转动速率表示了曲线的弯曲程度。通过付法向量β 的转动方向看出曲线是左挠曲还是右挠曲，它的转动速率表示了曲线的挠曲程度。

（四）本章小结

一、曲线的概念与公式

1. 曲线方程与正向

曲线方程的形式	曲线的正向
参数式 $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(s)\\ y=y(s)\\ z=z(s)\end{cases}$ （t为任意参数，S 为曲线弧长）	参数t或s增加方向为曲线正向
交面式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0\\ \Phi(x,y,z)=0\end{cases}$	
向量式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 或 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ （s、t 意义同上）	

2. 曲线的相伴三棱形中的三个单位向量

名　称	定　义	正　方　向
单位切向量	$\tau=\mathbf{r}'(s)$	与曲线正向一致．
单位主法向量	$\nu=\dfrac{\mathbf{r}''(s)}{\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert}$	指向曲线凹侧，
单位副法向量	$\beta=\tau\times\nu$	由$\tau\times\nu$决定

三者的关系：

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau},\quad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}$$

3. 相伴三棱形中的直线和平面方程

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线上任一已知点

（1）切线与法平面方程

	切线方程	法平面方程
参数式	$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0}$	$\dot{x}_0(x-x_0)+\dot{y}_0(y-y_0)+\dot{z}_0(z-z_0)=0$
交面式	$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_{y_0} & F_{z_0}\\ \Phi_{y_0} & \Phi_{z_0}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_{z_0} & F_{x_0}\\ \Phi_{z_0} & \Phi_{x_0}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_{x_0} & F_{y_0}\\ \Phi_{x_0} & \Phi_{y_0}\end{vmatrix}}$	$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F'_{x_0} & F'_{y_0} & F'_{z_0}\\ \Phi'_{x_0} & \Phi'_{y_0} & \Phi'_{z_0}\end{vmatrix}=0$
向量式	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\dot{\boldsymbol{r}}_0$	$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0=0$

（2）主法线和从切面方程

	主法线方程	从切面方程
参数式	$\frac{x-x_0}{x_0''}=\frac{y-y_0}{y_0''}=\frac{z-z_0}{z_0''}$	$x_0''(x-x_0)+y_0''(y-y_0)+z_0''(z-z_0)=0$
向量式	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{r}_0''$	$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}_0''=0$

（3）副法线与密切平面方程

	副法线方程	密切面方程
参数式	$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}y_0' & z_0'\\ y_0'' & z_0''\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}z_0' & x_0'\\ z_0'' & x_0''\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}x_0' & y_0'\\ x_0'' & y_0''\end{vmatrix}}$	$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_0' & y_0' & z_0'\\ x_0'' & y_0'' & z_0''\end{vmatrix}=0$
向量式	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda(\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0)$	$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \ddot{\boldsymbol{r}}_0)=0$

上面三个表格中，$\dot{x}_0$，$\ddot{x}_0$，… 表示以 t 为参数时，$\frac{dx}{dt}$，$\frac{d^2x}{dt^2}$，…在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的值；x_0'，x_0''，…表示以弧长 S 为参数时，$\frac{dx}{ds}$，$\frac{d^2x}{ds}$，… 在点M处的值，等等．F_{x_0}，Φ_{x_0}，…表示$\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$，… 在点$M$处的值，等等。

4．曲线的基本公式

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa \boldsymbol{\nu} \\ \frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{\tau} + \chi \boldsymbol{\beta} \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\chi \boldsymbol{\nu} \end{cases}$$

特点：

（1）基本向量 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$ 对弧长的导数，用 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的线性组合表示。

（2）系数阵是一个反对称阵

$$\begin{pmatrix} 0, & \kappa, & 0 \\ -\kappa & 0 & \chi \\ 0 & -\chi & 0 \end{pmatrix}$$

（3）系数 κ，χ 的几何意义是它们分别表示曲线的曲率和挠率。

5．曲率和挠率的定义及计算公式

（1）曲率和挠率定义，见本章内容。

（2）曲率和挠率的计算公式。

	曲率	挠率
向量式	$\kappa=\lvert\mathbf{r}''\rvert$ （S为参数）	$\chi=\dfrac{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')}{\lvert\mathbf{r}''\rvert^2}$（$S$为参数）
	$\kappa=\lvert\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\rvert/\lvert\dot{\mathbf{r}}\rvert^3$ （t为参数）	$\chi=\dfrac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}},\dddot{\mathbf{r}})}{\lvert\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\rvert^2}$（$t$为参数）
参数式（坐标式）	$\kappa=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}$（$S$为参数）	$\lvert\chi\rvert=\dfrac{\begin{vmatrix}x'&y'&z'\\x''&y''&z''\\x'''&y'''&z'''\end{vmatrix}}{x''^2+y''^2+z''^2}$（$S$为参数）
	$\kappa=\sqrt{\dfrac{\begin{vmatrix}\dot{y}&\dot{z}\\\ddot{y}&\ddot{z}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dot{z}&\dot{x}\\\ddot{z}&\ddot{x}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}\\\ddot{x}&\ddot{y}\end{vmatrix}^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}}$（$t$为参数）	$\lvert\chi\rvert=\dfrac{\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\\ddot{x}&\ddot{y}&\ddot{z}\\\dddot{x}&\dddot{y}&\dddot{z}\end{vmatrix}}{\kappa^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}$（$t$为参数）

6．基本定理和自然方程

在一个闭区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 上给定任意两个连续函数 $\kappa(s)$ 和 $\chi(s)$，其中$\kappa(s)>0$，则除了空间位置差别外， 唯一地存在一条空间曲线，它以 S 为弧长，$\kappa(s)$为曲率，$\chi(s)$为挠率。

方程组

$$\kappa=\kappa(s)>0,\quad \chi=\chi(s)$$

称为空间曲线的自然方程。

二、特殊曲线

1．定倾曲线的定义和性质。

2．贝特朗曲线的定义和性质。

（五）独立练习题

1．复习题

（1）什么叫空间曲线的基本向量和相伴三棱形？

（2）写出空间曲线的基本公式，并说明其特点及在曲线

论中所起的作用？

（3）空间曲线的基本不变量是什么？它们是怎样定义的？写出其表达式。

（4）一条空间曲线在每一个正常点邻域内的结构如何？

（5）空间曲线的基本定理的内容和作用，此定理证明的主要步骤如何？

2. 练习题

（1）求抛物线 $y=bx^2$ 对应于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 一段的弧长。

（2）证明曲线 $x=1+3t+2t^2$，$y=2-2t+5t^2$，$z=1-t^2$ 为平面曲线，并求出它所在的平面方程。

3. 讨论曲线 $\boldsymbol{r}=\left\{a(1-\sin t),\ a(1-\cos t),\ 4a\cos\frac{t}{2}\right\}$ 在哪些点的曲率半径最大？

4. 如果曲线的所有的法平面包含固定向量 $\boldsymbol{e}$，那么这曲线是直线或平面曲线。

5. 如果两条曲线的点之间可以建立这样的对应关系，使它们在对应点的切线平行，则对应点的主法线和付法线也分别平行，并且曲率与挠率必成比例：$\kappa^*:\chi^*=\kappa:\chi$。

6. 证明如果曲线在每一点的密切平面跟曲线都有三阶切触，则它是平面曲线。

第二章　包络论学习指导

关于曲线与曲面包络的理论，不仅在《常微分方程》及其它学科中要遇到，而且在许多生产实践中皆有重要应用，所以本章对曲面族的包络理论做了比较详细的论述。至于曲线族包络的内容，则完全可以进行类似的研究，故对这部分内容只做了简单的叙述。为了便于读者学习有关包络的知识，下面就有关内容做些说明，并进一步加以讨论。

（一）本章要点

首先给出了曲面论所研究的基本对象——简单曲面片的几何定义，同时给出了解析式的判别条件。然后，利用曲面的参数方程给出了曲面的曲线坐标网。随后，讲述了本章的主要内容——单参曲面族及平面族的包络定义及求法，同时也讲述了特征线族的包络——脊线，并利用脊线将单参平面族包络面（可展曲面）进行分类，还给出了直纹面是可展曲面的判别条件。最后，作为包络理论的一个应用，介绍了渐伸线与渐屈线的有关知识。

（二）基本要求

1．理解和掌握简单曲面片的定义，对于曲面片的解析

式，会用解析法判别其是否确定简单曲面片。

2．能通过曲面方程的适当参数化，建立曲线网，会用曲线网研究几何问题。

3．熟练掌握单参曲面族（平面族）包络的定义及求法。

4．了解单参平面族包络的分类。

5．学习运用包络理论来解决某些简单问题。

（三）内容分析

一、概述

本章首先给出了局部微分几何在曲面论中所研究的对象——简单曲面片的几何定义及其解析表达式。举例说来，一条自行车里带上的一小块，可看做一块平面片，当车带充满空气后，车带变成了环面，原来的一小块平面片变成了一小块曲面片，这两块小面片上的点连续地一一对应，也就是说，前者经过连续变形变成了后者，并且在变形过程中保持了光滑和不自交的两个基本特征。通常我们把具有这样两个特征的曲面片称作简单曲面片。也就是说，它是处处存在切平面，而且当切点运动时，切平面连续变化的曲面片。所以，我们把简单曲面片上的点称做正常点。反之，对于不存在切平面的点称做奇点。显然，充满空气的自行车里带，其上的点，除气孔一点为奇点外，其它点皆为正常点，所以其它点的邻域皆为简单曲面片。

我们知道，为了用数学方法来研究几何图形，人们总是把图形与方程建立对应关系，即用方程来表示曲线和曲面。那么，读者自然会问，曲面方程中的函数具备什么性质才能断定

它确定的曲面片是简单曲面片呢？为了回答这个问题，继简单曲面片定义之后，给出了三个判别定理，即用参数方程、显式方程及隐式方程给出了判别简单曲面片的充分条件。

知道了研究对象——简单曲面片，掌握了基本工具——向量分析，还要会运用几何上研究问题的基本方法——坐标法。在微分几何中，人们往往把平面上的仿射坐标系推广到曲面上去。即建立曲面上的曲线坐标网，对此，是通过曲面的参数化来实现的。通常，给定了曲面Σ上的一个向量式参数方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}$$

也就在Σ上建立了一个曲线坐标网。这是因为，当$u=u_0$（常数）或$v=v_0$（常数）时，向量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,\ v)\ \text{或}\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0)$$

之终点的轨迹为Σ上一条v曲线或一条u曲线，在一般情况下，一条u曲线与一条v曲线在Σ上只交于唯一一点，所以就把数组(u,v)称为该点的曲线坐标。总之，曲面经过适当的参数化后，就可使其上的点与实数对之间建立一一对应关系。从而，为用向量分析来研究几何问题创造了条件。

有了以上的准备，接着就研究了本章的主要内容——单参曲面族的包络理论。

我们知道，方程

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2 \tag{1}$$

表示一个以常数R为半径，中心在$(0,0,a)$点的球面，而当实数a（族参数）连续变化时，方程（1）则表示球心在Oz轴上连续变化的一族球面。那么，这族球面间有何关系呢？可以想象得到，每个球面都与半径为R、以Oz轴为轴线的柱面Σ相切，并且Σ上每一点都是它与某个球面相切的切点。直观上来看，柱面Σ不但把每个球面都包起来，而且把它们联络成一个

整体．

从上述一类具体问题中，我们概括出包络的定义：

已给单参曲面族 Σ_a：$F(x、y、z;\alpha)=0$，其中α为Σ_a的族参数，如果存在曲面S，它满足如下条件：

(i) 对S上每个点，都有族 Σ_a中一曲面与S在此点相切；

(ii) 族Σ_a中每个曲面都与曲面S相切．那么，就称曲面S为单参曲面族Σ_a的包络曲面．

有了定义，下面就来研究它的求法．

若已给单参曲面族方程为

$$F(x,y,z;\alpha)=0 \tag{2}$$

则求包络的通常步骤如下：

(i) 就参数 α微分族方程（2），得

$$F_a(x,y,z;\alpha)=0 \tag{3}$$

(ii) 从族方程（2）及（3）的联立方程

$$\begin{cases} F\ (x,y,z;\alpha)=0 \\ F_a(x,y,z;\alpha)=0 \end{cases}$$

中消去参数α，得判别曲面Σ的方程

$$\varphi(x,y,z)=0 \tag{4}$$

(iii) 从判别曲面上去掉族曲面上的奇点，则得包络曲面S的方程．

我们知道，点动成线，线动成面．那么，包络面是什么曲线运动的轨迹呢？实际上，若方程（4）是包络曲面，由其推导过程可知，包络曲面上的点，既在曲面（2）上又在曲面（3）上，因此它是所有交线

$$L_a: \begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_a(x,y,z;\alpha)=0 \end{cases}$$

构成的．L_a称做特征线．还可证明，特征线就是族曲面中相邻

二曲面的交线的极限。所以包络面是特征线的轨迹，即整个特征线族盖满了包络曲面。

特征线族是随参数α 连续变化而产生的曲线族，类似于曲面族存在包络问题一样，特征线族或更一般地说来，曲线族也存在包络问题。所以本章以特征线族为例，给出了包络线的定义和求法。具体说来，给出了脊线的定义和求法。

〔定义〕 已给曲面族Σ_α的包络曲面S的特征线族

$$L_\alpha:\begin{cases}F(x,y,z;\alpha)=0\\F_\alpha(x,y,z;\alpha)=0\end{cases}$$

如果存在曲线C，满足

(i) 曲线C上每个点都有L_α中一曲线和它相切；

(ii) L_α中每条曲线都与曲线C 相切。那么，曲线C就叫做L_α的包络曲线。有时C也称做包络曲面S的脊线。

若已给曲面族Σ_α的特征线族

$$L_\alpha:\begin{cases}F(x,y,z;\alpha)=0\\F_\alpha(x,y,z;\alpha)=0\end{cases}$$

为求其包络（脊线），只须

(i) 将方程 $F_\alpha(x,y,z;\alpha)=0$对α微分，得

$$F_{\alpha\alpha}(x,y,z;\alpha)=0$$

(ii) 由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z;\alpha)=0\\F_\alpha(x,y,z;\alpha)=0\\F_{\alpha\alpha}(x,y,z;\alpha)=0\end{cases}$$

求出解曲线C：

$$x=x(\alpha),\quad y=y(\alpha),\quad z=z(\alpha)$$

C即为所求的包络线。

综上所述，对已给的单参曲面族$F(x,y,z;\alpha)=0$，第一次

求包络得一曲面，第二次求包络得一曲线。

有了脊线的知识，就以它为工具把单参平面族的包络进行了分类，正如定理所述：

已给单参平面族：$n(a)r-P(a)=0$，则它的包络面是切线曲面、锥面或柱面。

上述三种曲面是大家比较熟悉的曲面，它们展开后都可完全贴合在平面上，故都是可展曲面，而可展曲面又是直纹面中常见的一类，所以又引出了直纹面与可展曲面的知识。

我们已经知道，直纹面是直线按某种规律运动形成的曲面，每条直线叫做它的母线。所说直纹面是可展的，是指沿其一条母线只有一个切平面。那么，直纹面与可展曲面究竟有何关系呢？下面的定理给出了回答：

直纹面 S 是可展曲面的充分必要条件为 S 是单参平面族的包络。

此外，还可验证，可展曲面只有切线曲面、锥面及柱面三种。

本章最后还举出了曲线族中包络的例子，即渐屈线是渐伸线法线族的包络。所谓渐屈线与渐伸线是指：已给曲线 L，它的切线族的正交曲线为L'，则称L'为L的渐伸线，称L为 L' 的渐屈线。

二、几个主要问题的分析

1. 简单曲面片与平面片

(i) 简单曲面片 Σ 与平面片 D 的同胚

在定义简单曲面片时用到了"同胚"概念，现在将其给以简单解释。

设 Σ 与 D 为二度量空间，如果对应

$$f: \Sigma \longrightarrow D$$

从Σ到D是一一的、连续的，且是满映射，而且逆映射也是连续映射时，则称 f 为同胚映射，此时称空间Σ与D为同胚的.

由上述同胚定义可知，在简单曲面片的定义中，关于曲面片Σ与平面片D同胚是指在二者间存在着双方单值且连续的映射. 所以可以把简单曲面片看做由平面片连续变形得到的，而且这种连续变形是不自交的. 总之平面片是最直观的简单曲面片，简单曲面片则是平面片的推广.

(ii) 简单曲面片与其切平面

对于平面片可以看作处处存在切平面（它本身），切平面亦可看做随切点连续变化而连续变化的，简单曲面片保持了平面片这一特征，也就是说，其上每一点处处存在切平面，且当切点连续变化时，切平面亦随之连续变化，因而简单曲面片是光滑的曲面片.

(iii) 顺便指出，本章只研究图形的局部性质，所以本章中所强调的是曲面上一点邻域的一小块曲面——曲面片.

2. 仿射坐标与曲线坐标

为了用解析法来研究几何图形，在解析几何中，我们曾建立了仿射坐标系，从而使平面上的点与有序实数对之间建立了一、一对应关系. 当时，我们是把平面上的仿射坐标系看做两个相交的数轴构成的. 其实，给定了平面上的一个向量式参数方程，也就给定了平面上的一个仿射坐标系. 例如在空间取一定点 O，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}_0$为平面上定点$P_0$之向径，$\boldsymbol{e}_1$ 与$\boldsymbol{e}_2$为平面上两个不平行的常向量，则平面上任意一点P之向径$\boldsymbol{r}$可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2 \tag{1}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$$

可见，实数 (u,v) 就是平面上点的仿射坐标（图 2′—1）。特殊地，若 $e_1 \perp e_2$，且 $|e_1| = |e_2| = 1$，则 u, v 相当于平面上点的直角坐标，也就是说，此时参数方程（1）给出了平面上的直角坐标系。

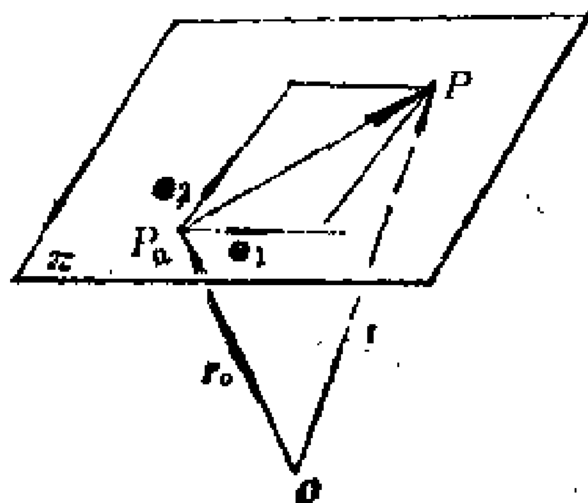


图2′—1

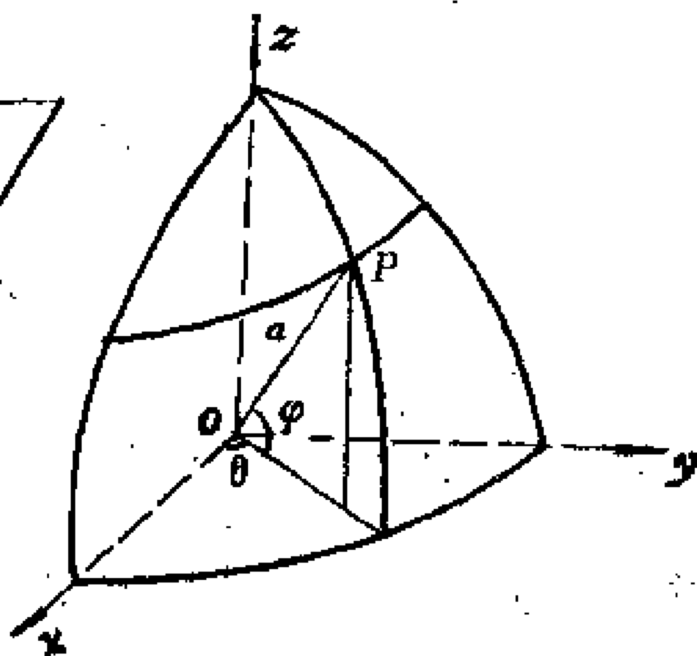


图2′—2

类似地，我们也可以用参数方程建立曲面上的坐标系（图 2′—2）。例如，中心在坐标原点，半径为a的球面之参数方程为

$$r = \{a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\} \qquad (2)$$

其中，$0 \leqslant \theta < 2\pi$，$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$。当 $\varphi = \varphi_0$为常数时，则$r(\theta, \varphi_0)$之终点轨迹在球面上画出了纬线，当 $\theta = \theta_0$（常数）时，则 $r(\theta_0, \varphi)$在球面上画出了经线。显然，当参数 θ 与φ连续变化时，就得到了球面上的一族经线与一族纬线。因此每对实数 (θ, φ)确定了球面上唯一的一点，所以球面的参数方程（1）确实给出了球面上的一个坐标系。

一般地，若

$$r = r(u, v) \quad (u, v \in R) \qquad (3)$$

为参数u,v的连续向量函数（其中R表示u，v平面上的一个区域），则向径r终点的轨迹是一片连续曲面片Σ，显然当$u(v)$固定时，就得到一族$v(u)$曲线，u曲线族与v曲线族盖满了整个曲面，通常称这两族曲线为曲面上的坐标曲线网。由于参数选择的任意性，所以曲面的参数方程不是唯一的，当然坐标曲线网亦不是唯一的。综上所述，平面上仿射坐标是曲面上曲线坐标的特殊情况，曲线坐标是仿射坐标的自然推广。

3．正则网与正交网

我们知道，在方程（2）中，r 是参数的单值向量函数，每一对参数值确定曲面上唯一的一点，但反过来，曲面上点都不总是只对应于一组数值。例如，在（2）中，对任意的θ值，数对$\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)$确定点（$0,0,a$）。同理，点（$0,0,-a$）也对应无数组参数对$\left(\theta,-\frac{\pi}{2}\right)$，其中 θ任意。这种曲线网和平面上极坐标系类似，是不完全坐标系，即在这种曲线坐标网中，曲面上点和数组间不全是一一对应关系（图 2′—3），今后我们一般采用正则网。所谓正则网就是使曲面上点与数组间一一对应的曲线网。例如平面上仿射坐标系就是最直观的正则网。同解析几何里一样，为了简化运算和证明，今后还常采用更特殊的坐标系——正交网。这种曲线网是u曲线与v曲线互相垂直的曲线网。显然，平面直角坐标系既是正则网又是正交

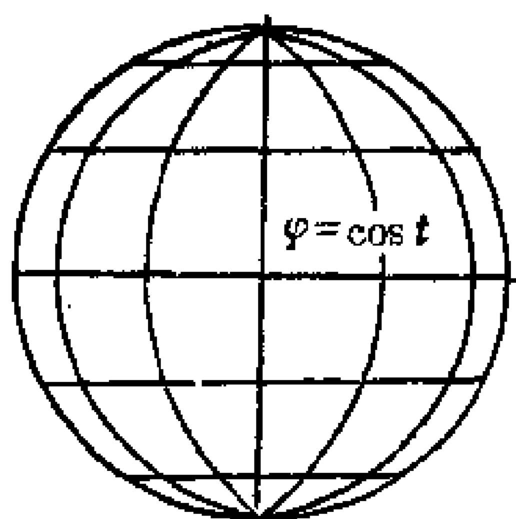


图2′—3

网（图2′—4）。由上面的例子我们看到，正则的未必是正交的，但正交必正则。无论是正则网还是正交网，它们的建立都需要通过曲面的适当的参数化来实现。

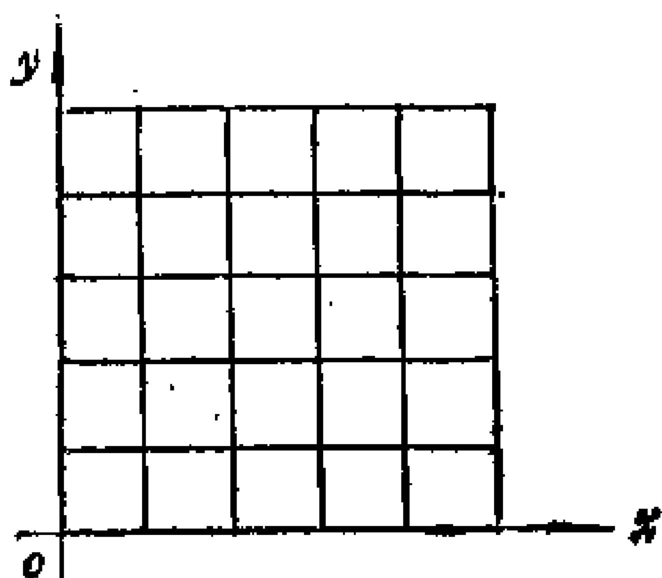


图2′—4

4. 曲面的奇点与坐标网的奇点

曲面的奇点是指曲面上不存在切平面的点，因此它有本质的奇异性。例如对于锥面：

$$x = u\sin\alpha\cos\varphi$$

$$y = u\sin\alpha\sin\varphi \quad (\alpha = \text{常数})$$

$$z = u\cdot\cos\alpha$$

x, y, z分别对u, φ求导，有雅可比阵

$$M = \begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\sin\varphi & \cos\alpha \\ -u\sin\alpha\sin\varphi & u\sin\alpha\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

在顶点$(u = 0)$有$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_\varphi = 0$，即在顶点，切平面之法向量为0，其方向不定，故不存在切平面。

所谓坐标网的奇点，是指曲面在这点之法向量 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = 0$ 的点。这种奇点可由于曲面本身的性质（有不存在切平面之点存在）而出现，也可由坐标网的选取而产生。例如把方程（2）中球面的参数方程写为：

$$x = a\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = a\cos\theta\sin\varphi$$

$$z = a\sin\theta$$

x, y, z分别对θ和φ求导，有

$$M=\begin{bmatrix}-a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0\end{bmatrix}\quad (a=\text{常数})$$

显然，在 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$两点（南北极）皆有 $\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi=0$，然而这两点显然存在切平面，故是正常点．法向量等于零向量是由于θ曲线族与φ曲线族所构的坐标网造成的。

综上所述，曲面的奇点必是坐标网的奇点，反之，坐标网的奇点未必都是曲面的奇点。换言之，条件 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq0$ 仅是正常点的充分条件，不是必要条件。

5．包络曲面与判别曲面

我们知道，如果单参曲面族$\{S_a\}$：$F(x,y,z;a)=0$，存在包络曲面S，那么从方程组：

$$\begin{cases}F(x,y,z;a)=0\\ F_a(x,y,z;a)=0\end{cases}\tag{3}$$

中消去a得到判别曲面 Σ：$\varphi(x,y,z)=0$，再从判别曲面Σ上去掉曲面族$\{S_a\}$上的奇点，即得包络曲面 S。下面，我们对上述论断给以进一步的阐述。

从本章推证可知，S 上点都在Σ上，然面Σ上的点却可能不全是S上的点，对后一种情形进一步予以证明：

设 P 为判别曲面Σ上任一点，在Σ上过P任取一条曲线C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，并将其代入方程组（3）的第一式，又对$t$求导得

$$F_x\dot{x}+F_y\dot{y}+F_z\dot{z}+F_a\dot{a}=0$$

再由（3）之二式有

$$F_x\dot{x}+F_y\dot{y}+F_z\dot{z}=0\tag{4}$$

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\{\dot{x},\dot{y},\dot{z}\}$为$C$在点$P$之切向量，$\nabla F=\{F_x,\ F_y,\ F_z\}$为曲面族$\Sigma_a$中曲面$\Sigma_a$在点$P$之法向量，由（4）式可推出两种结

果．其一，若$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$与$\nabla F$皆非零向量，则据(4)有$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\perp\nabla F$，由$C$之任意性，在点$P$ Σ_a之法向量垂直于Σ之切平面，又由P之任意性，据包络定义，显然此时Σ即为包络S；其二，若$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$与$\nabla F$至少之一为零向量，因为对于曲线$C$来说，其切向量$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\neq 0$，据（4）式必有$\nabla F=0$，即$F_x=F_y=F_z=0$，这说明$\Sigma_a$在$P$点之法向量为零向量，故其在切点不存在切平面，由包络定义可知，P点不是包络S上点，因而在第二种情形下，Σ上去掉Σ_a中奇点才为包络。

这里指出，按包络定义，包络面上必须没有奇点。在上面的证明中，实际上我们是承认了判别曲面上过任意点的任意一条曲线的切向量$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的存在性，其实不然，例如，在锥面上过顶点的曲线在该点就不都存在切向量，这样就破坏了相切条件（4），因而严格说来，锥面去掉顶点后才是单参平面族的包络。总之，对于已给的单参曲面族，求得其判别曲面后，从判别曲面上去掉曲面族及判别曲面上的奇点后才为包络曲面。

6．包络的存在性与唯一性

(i) 关于唯一性

已给单参曲面（线）族，如果存在包络，由定义，包络必是唯一的。因为包络是把曲面（线）族联络成一个整体的曲面（线），所以求得的包络无论是用几个方程表示的曲面(线)，它都代表一个包络，也就是说，如果包络存在，那么，它就是唯一的。例如，x轴与y轴两条直线构成了圆族

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

的包络。

(ii) 关于存在性

在包络曲面的求法定理中，我们推得两个结果：一是包络上点必在判别曲面上；二是从判别曲面上去掉其本身及族曲面上之奇点，其余的点所构成的曲面才是包络。由此，我们有：

(a) 已给单参曲面族，存在包络的充分必要条件是它存在判别曲面，且判别曲面去掉其上及族曲面中奇点后仍是曲面。

上述结论，实际上就是本章中包络求法定理1所阐述的。它对判别已给单参曲面族是否存在包络并没有什么实际意义，面为我们还没有找到判别曲面存在与否的条件。这里我们强调这个结论的目的在于向读者指出，由已给的单参曲面族方程及由该方程对族参数求导得到的方程联立消去参数，新得到的方程不一定就是判别曲面方程，只有在包络存在的前提下它才是判别曲面方程。否则就可能出现错误。例如已给过一直线 P 的面束方程：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\alpha(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (5)$$

对族参数 α 求导，有

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad (6)$$

由（5）和（6）两式消去 α，得

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \quad (7)$$

我们知道，（7）式是表示过直线 P 的平面，它上既没奇点也没有面束（5）上的奇点，但不可误认为（7）就是平面族（5）的包络。（5）是过一定直线的平面族，从直观上也可知道它没有包络。

读者也许会问，一般书中的求包络习题，按上述求判别曲面方法去做，为什么消去族参数就得判别曲面呢？这是因为所给的求包络习题在客观上都存在包络的缘故。

由于曲面族各式各样，比较复杂，目前还没有更好的判别包络存在的统一办法。不过，对于特殊的曲面族——单参平面族，已经得到了完备的结果。

(b) 若单参平面族不是面束（平行面束或有轴面束）；则它总存在包络。

上述结论在吴大任编著的《微分几何讲义》一书中已有论证，这里略去。

(c) 关于单参曲线族的包络存在问题，读者可参阅后面问题（9）。

7. **包络线与脊线**

关于曲线族包络问题，本章中仅就特征线族给出了其包络（脊线）定义，下面我们给出一般平面曲线族的包络定义。

〔定义〕已给单参平面曲线族 C_α：$F(x, y; \alpha)=0$，其中 α 为族参数，如果存在曲线L，它满足：

(i) 在L上每个点都有族C_α中一曲线与L相切；

(ii) 族C_α中每条曲线都与曲线L相切。则曲线L叫做曲线族C_α的包络线（图2′—5）。

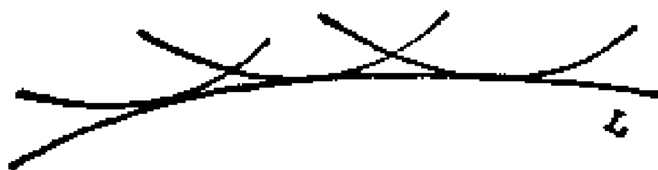


图2′—5

可以看出，这个定义与特征线包络定义没有什么区别，包络线的求法与脊线求法也类似，大同小异。需要指出的是，求脊线过程中不存在奇点问题，这是因为脊线是特征线族的包络线，而特征线一般是包络面上的光滑曲线。但是，在求一般曲线族包络时，就要考虑奇点问题了。

〔例〕试求半立方抛物线族C_α

$$3(y-\alpha)^2-(x-\alpha)^3=0$$

的包络。

（解）就参数α微分上面方程，得

$$F_\alpha=y-\alpha-(x-\alpha)^2=0$$

所以判别曲线方程为

$$\begin{cases}F=3(y-\alpha)^2-(x-\alpha)^3=0\\ F_\alpha=y-\alpha-(x-\alpha)^2=0\end{cases} \tag{8}$$

解（8）得

$$x-\alpha=0,\ y-\alpha=0 \tag{9}$$

$$x-\alpha=\frac{2}{3},\ y-\alpha=\frac{4}{9} \tag{10}$$

下面我们去掉奇点，首先求出

$$F_x=-3(x-\alpha)^2 \tag{11}$$

$$F_y=6(y-\alpha) \tag{12}$$

将（9）和（10）代入（11）和（12）得知（9）使 $F_x=F_y=0$，而（10）使 F_x，F_y 皆不为零，因此(10)式所确定的直线是包络线，而（9）所确定的直线是族$\{C_\alpha\}$中曲线上奇点的轨迹，它们都是被除掉的点，所以它不是所求的包络（图2′—6）。

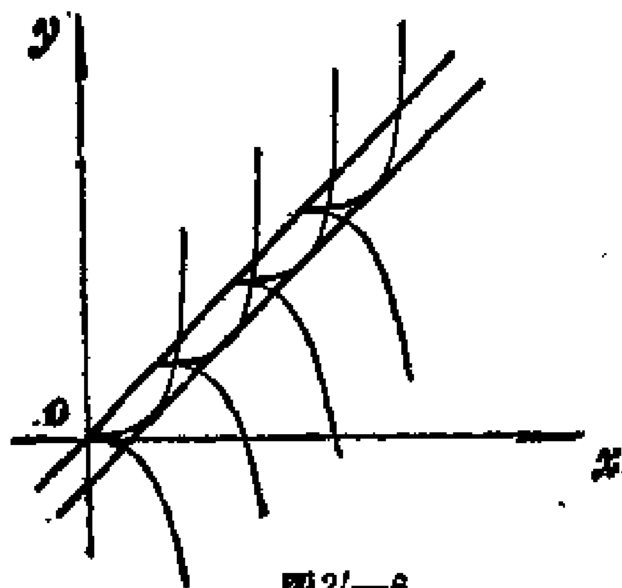


图2′—6

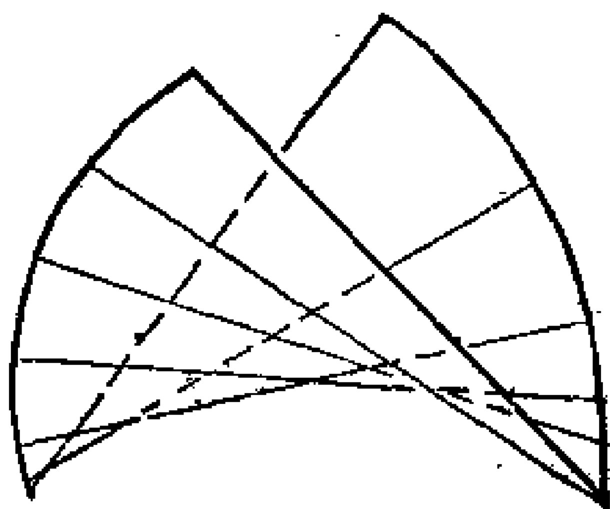


图2′—7

其次，简要介绍一下“脊线”命名的由来。

一个切线曲面被它的脊线分为两叶，脊线的正半切线构成切线曲面的一叶，负半切线构成另一叶，这两叶沿脊线被割开，同时沿这条脊线非常独特的粘在一起（图 2′—7）由于这条线处于“脊梁”位置，通常人们把它叫做脊线。

8. 直纹面与可展曲面

直纹面是已知直线按某种规律运动所产生的曲面，直线称为其母线。我们已经知道，单叶双曲面、双曲抛物面、柱面、锥面，切线曲面都是直纹面。

可展曲面是指沿一条母线将其切开后，可以完全贴合在平面上的直纹面，在包络论中，我们已经得到了如下结果：柱面、锥面和切线曲面都是可展曲面，而且可展曲面只有这三种类型。

综上可见，可展曲面一定是直纹面，而直纹面不一定是可展曲面。

9. 包络与奇解

为了说明微分方程中奇解与微分几何中包络间关系，从而利用方程中已有结果来研究包络问题，我们首先复习一下奇解定义：

〔定义〕如果微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$的积分曲线上每一点都破坏唯一性，则称该积分曲线为这个方程的奇积分曲线，它所对应的解称为方程的奇解。

在微分方程中关于包络与奇解关系还有如下定理：

〔定理〕方程$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$的积分曲线族$\{C\}$的包络线L是该方程的奇积分曲线。

有了这个定理，一方面可用微分几何中求包络的方法求得方程的奇解；另一方面，亦可用奇解的知识来研究包络问题。比如利用奇解可以研究曲线族的包络存在问题。

首先，给了单参曲线族$\{C\}$：

$$\varphi(x, y; a)=0 \tag{12}$$

消掉族参数 a，通过微分法得到方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{13}$$

这样研究（12）的包络存在问题，就转化为研究（13）的奇解的存在问题了。

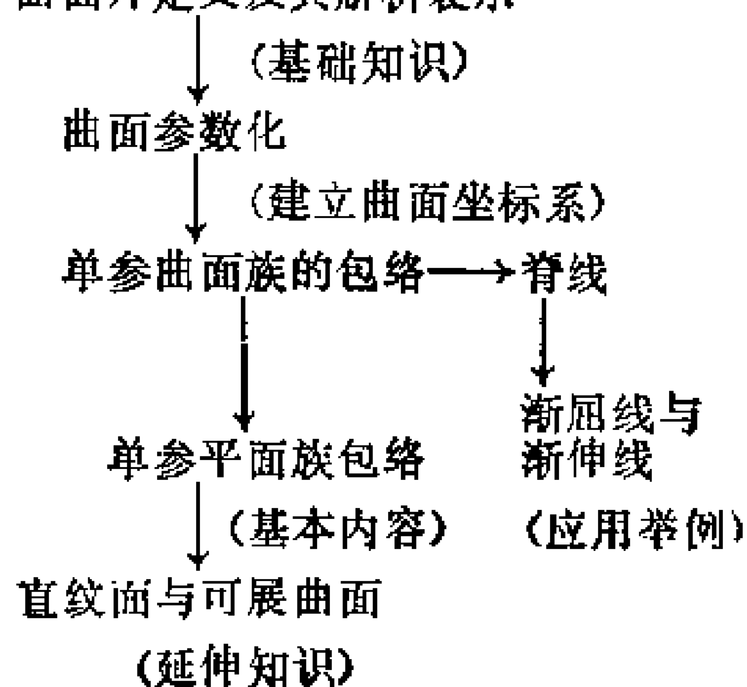
(i) 存在唯一性定理指出，如果$f(x, y)$在区域G上连续且$f_y'(x, y)$在G上有界（或连续），则在G内，初值解存在且唯一，从而在G内（13）肯定不存在奇解，即（12）不存在包络。

(ii) 曲线L为（13）的奇积分曲线的必要条件是：在L上至少或者$f(x, y)$不连续，或者$f_y'(x, y)$无界。

这里指出，要想得到包络存在的充分条件，对某一类问题，还必须加强条件，由于比较复杂，这里不做介绍了。

（四）本章小结

我们对知识的学习总是由多而杂到少而精，学过本章后，我们列下表，以便大家复习和掌握本章基本知识。


简单曲面片定义及其解析表示
(基础知识)
曲面参数化
(建立曲面坐标系)
单参曲面族的包络
脊线
渐屈线与
渐伸线
单参平面族包络
(基本内容)
(应用举例)
直纹面与可展曲面
(延伸知识)

第三章　曲面论学习指导

（一）本章要点

曲面是微分几何主要的研究对象，对曲面性质的讨论，可分为四个部分。

一、曲面的内在性质：所谓曲面的内在性质是指，与曲面的第一基本量E、F、G有关，而与曲面的形状、参数选择无关的性质。这些性质又称为曲面的内在几何或内蕴几何。它主要包括下列内容：

（1）曲面上曲线的弧长；

（2）曲面的第一基本微分形式；

（3）曲面上二曲线的交角；

（4）曲面上闭曲线围成的面积；

（5）曲面的高斯曲率；

（6）二曲面的等距、等角、等积变换；

（7）曲面的测地线；

（8）曲面上向量的列维一齐维他平行移动。

二、曲面的外在性质：所谓曲面的外在性质是相对内在性质而提出的，即除曲面的内在性质以外与曲面的形状有关，即曲面在它所实现空间的刚体运动下的不变性质。它的特点是，不仅与曲面的第一基本量有关，也与第二基本量有关。主要内

容包括：

（1）曲面的法曲率；

（2）曲面的第二基本微分形式；

（3）曲面的主曲率与主方向；

（4）曲面的渐近方向，共轭方向，渐近曲线；

（5）曲面的曲率线，曲率线网，脐点；

（6）曲面的正常点邻域结构；

（7）曲面的杜班标形、默尼埃（Meusnier）定理；

（8）曲面的平均曲率。

三、第三部分是为了更进一步讨论曲面的性质和使计算简化，给出了新的指标记号，利用指标记法写出曲面的相伴三棱形的微小移动公式、高斯公式和方加滕公式，并证明了曲面的基本定理。

四、最后讨论了常曲率曲面的基本性质，讲了测地线、向量的列维—齐维他平行性、高斯—波涅定理，以及常曲率曲面的性质。这些就是本章的要点。

（二）基本要求

1．明确哪些是曲面的度量性质，并能用弧长公式、求角公式、面积公式计算和证明一些实际问题，要着重理解这些公式与哪些量有关及导出过程。

2．明确什么是曲面的第一基本微分形式，及第一基本量，它有什么性质，它在微分几何中重要作用如何。

3．弄清讨论曲面的等距、等角、等积变换的目的，着重理解曲面等距、等角、等积变换的解析表示式与必要充分条件以及它们之间的关系。对简单曲面如何找出变换、对如何证明

等距等价曲面的一般方法作一般的了解。

4. 明确曲面上的法曲率、主曲率、主方向、渐近方向、渐近曲线、曲率线等基本概念。

5. 掌握由定义法曲率到欧拉定理、高斯曲率，讨论曲面在正常点邻域结构的基本想法与基本过程。

6. 会用基本公式计算曲面的法曲率、主曲率，求曲率线方程，并能利用这些性质证明一些基本问题。

7. 熟悉曲面在正常点邻域结构的三种类型及判别条件。

8. 明确什么是自由指标、总和指标。熟悉和掌握有关指标记法的基本意义及运算方法。

9. 明确什么是曲面的相伴三棱形，知道它与曲线相伴三棱形不同处是什么。知道什么是曲面的高斯公式和 万 加 滕 公式。它的几何意义是什么？

10. 通过对曲线基本定理的证明，理解曲面基本定理的证明方法。明确高斯方程和柯达奇方程是高斯公式和万加滕公式看成微分方程时的可积条件。

11. 知道曲面上向量的列维—齐维他平行移动是一般向量平行概念的推广。它具一般平行移动的基本特征；它是曲面的内在性质。

12. 明确什么是曲面上的测地线，它的方程是 如 何 导 出的，特别要记住在正交网中的测地线方程及主要推论。

13. 明确什么是半测地坐标曲线网，测地极坐标网，它们所满足的条件及在这种坐标网中，第一基本微分形式的简化式是什么。

14. 知道什么是常曲率曲面及它的第一基本微分形式的三种形式，以及它在几何发展中的重要意义如何。

（三）内容分析

一、概述

本章主要讨论与曲面的外形无关而与它的度量有关的所谓内在性质，和曲面在正常点邻域结构的所谓曲面的外在性质以及曲面的其它性质等基本问题。

在讨论曲面的内在性质时，首先通过内积引入曲面的第一基本微分形式

$$\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

这个恒正二次微分形式，给出了曲面的可度量函数、即由它导出了曲面上曲线的弧长公式：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

曲面上二曲线交角公式：

$$\cos\varphi = \frac{Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2 + 2Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2}}$$

及曲面上闭曲线所围成的面积公式：

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

因为，只要给定度量二次微分形式和曲线弧、相交二曲线弧或某闭曲线围成的区域而不考虑曲面的形状如何，我们就可按公式求得弧长、交角和面积。从而自然地提出不同形状的曲面是否具有相同的度量，也可以说，二不同形状的曲面上，是否有相同的度量几何？所以讨论了曲面的等距、等角、等积变换。首先给出了曲面的等距、等角、等积变换解析定义。同时

也给出了曲面等距、等角、等积等价充分必要条件及三者之间的关系。实际上，它对曲面分类提出一个条件：使等距、等角、等积等价的曲面属于同一类，根据这种分类，例如可展曲面和平面属于同类。它们虽然外形不同，但是它们具有相同的度量几何。

曲面论的第二部分讨论曲面在正常点的邻域结构，也和解析几何讨论二次曲面的形状类似，它是以平行截口来研究曲面形状，而微分几何是通过法线的平面与曲面交线——法截线的形状来研究的。因此首先定义曲面的法曲率概念，然后导出了曲面的第二基本微分形式

$$\varphi_2 = Ldu^2 + 2Fdudv + Ndv^2$$

它在讨论曲面上正常点邻域结构占有重要的地位。接着通过法曲率κ_n的极值，给出了主曲率、主方向的定义。在给出主曲率k_1, k_2的同时，导出欧拉公式，高斯曲率 $K = k_1 \cdot k_2$，平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ 的概念。利用高斯曲率 $K>0$ 椭圆点，$K<0$ 双曲点，$K=0$ 抛物点对曲面上点进行分类。讨论了曲面上这三种正常点邻域结构。

我们还讨论了曲面上的几种坐标曲线网。根据讨论问题的性质，取相应的坐标曲线网，可以使计算得到简化。我们讨论了，曲率线网，渐近曲线网，共轭网，以及测地线网。在各个网中都可简化第一、第二基本形式，因此，使计算都有简化。

曲面的第三部分，为了证明曲面的基本定理，我们对曲面的一些公式引入新的记号与算法——自由指标、总和指标，并导出了曲面的相伴三棱形的微小转动的高斯公式和万加滕公式，以及导出作为高斯和万加滕公式可积条件的基本方程高斯方程和柯达奇方程。最后我们比较仔细的讨论了测地线的性质，证明了常曲率曲面，高斯——波涅定理。通过这一定理我们

知道，高斯常曲率曲面给出三种度量几何的模型．(1) $K>0$ 的曲面是黎曼几何的模型．(2) $K<0$ 的曲面是罗氏几何的模型．(3) $K=0$ 的曲面是欧氏几何的模型．

通过这个定理使我们看到，客观的物质世界是万有空间，当我们研究它的某个侧面，而需要用哪种空间更确切，我们就用那种空间，因此，不能说那种空间的真伪．而都是存在于万有物质空间之中的．

二、对主要问题的分析

1．曲面的度量性质与第一基本微分形式

从第二章的一开始，我们给出了简单曲面片的定义．它是作为平面片到三维空间的连续变形（同胚变换）得到的光滑曲面片，是三维空间的二维子空间．它的方程写为 $\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$，同时通过这里的二独立参数 u、v 在曲面 Σ 上建立了坐标曲线网．通过曲线网建立了 Σ 上的曲线坐标系，使实数组 (u, v) 与曲面上点之间建立了一对一的对应，这只是给出一个二维空间．为了讨论这个二维空间的度量性质，必须在这个空间引进度量，即长度、角度和面积的概念和计算公式．这也和在曲线上引进度量——弧长是借助于切线，同样地，在曲面上引进度量是借助于它的切空间——切平面．从第二章中切平面的定义已知，它是一个仿射空间，它上的向量可记做 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$，那么在这个空间引入内积之后，它就是曲面 Σ 的切欧氏空间，把这个空间的内积定义为 Σ 的内积，就在 Σ 上引进度量．因此在 Σ 上的弧长定义为

$$\begin{aligned} S &= \int |\dot{\boldsymbol{r}}|\, dt \\ &= \int \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}\, dt \end{aligned}$$

所以$ds^2=(dr)(dr)=(r_u du+r_v dv)\cdot(r_u du+r_v dv)$

$$
\begin{aligned}
&=(r_u)^2du^2+2(r_u r_v)dudv+(r_v)^2dv^2\\
&=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2\\
&=\varphi_1
\end{aligned}
$$

在本章中已证，它是恒正的二次微分形式．若把ds叫做弧素，那么φ_1是弧素的平方、它给出曲面Σ上的弧长，所以也把它叫度量二次形式．

在Σ上给定φ_1，Σ上就可度量弧长，Σ就成为度量空间．显然在二维空间的度量性质，无非是弧长、交角和面积．在本章中已证过，只要在Σ上给定度量二次形式φ_1，就有：

(i) 已给曲线弧$C:u=u(t),v=v(t),a\leqslant t\leqslant b$，则$C$的弧长为

$$S=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

(ii) 已给二曲线C_1：$u=u_1(t)$，$v=v_1(t)$

C_2：$u=u_2(t)$，$v=v_2(t)$

则它们的交角φ的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{ds_1\ ds_2}$$

(iii) 已给单一闭曲线C，它所围成的区域D的面积S为

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\ dudv$$

从而只须给出曲面的度量二次形式，曲面上的度量关系完全确定．因此，这个曲面上与度量有关的几何性质也随之确定．

所以度量二次形式或第一基本微分形式，对于研究曲面度量几何是十分重要的．当然并不排斥形状不同的曲面具有相同的第一基本微分形式，这个问题放在下面讨论．

2．曲面的等距（等角、等积）变换

这个问题是高斯研究地图投影，也就是把地球面上的陆地，海洋等等画在平面上的地图，那么在地图上（通过比例放大）量出地球上两点的真实距离、两个方向的交角、某个区域的面积、后来把球面与平面之间的等度量关系推广到一般的曲面，而作为曲面等度量的分类．根据前个问题（1）的讨论，显然，两个曲面具有相同的度量，那么它上的度量几何相同，因此，取其中一个研究之后，那么属于同一类的曲面就不必一一研究，这是研究科学的方法之一．

但是两个形状不同的曲面，怎样判定它们的度量异同呢？下面我们可以通过简单地实例找出办法来．

在本章中曾提到，把平面π，不伸缩、不折裂地卷成柱面．反之，把柱面放在平面上滚动一周，可以把一柱面铺在平面上．显然平面上图形长度、角度、面积不变地变到柱面上去．这两个不同曲面上具有相同的度量几何．如果把平面上的坐标曲线，当平面卷为柱面时，做为柱面的坐标曲线，这时，平面上的坐标曲线网与柱面上坐标曲线网相同．因此，平面上与柱面上对应点的曲线坐标相同，因此，它们的对应曲线弧的方程相同，所以，第一基本微分形式也必相同．反之，已知柱面与平面的第一基本微分形式相同．把柱面在平面上滚动，使柱面的坐标曲线印在平面上作为平面的坐标曲线，因此对应点坐标相同，对应曲线弧的方程也必相同，因此，弧长相同，这样，这个柱面与平面上各有确定的第一基本微分形式，但它们是否具有相同的度量几何？下面给出判定的解析条件．

设已给二曲面的方程为

$$\Sigma: \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),\ \ (u,\ v)\in R$$

$$\Sigma^*: \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^*,\ v^*),\ \ (u^*,\ v^*)\in R^*$$

它们的第一基本微分形式是否相同呢？如前面柱面和平面那样，关键在于是否存在参数（u，v）和（u^*，v^*）之间的变换σ：

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v) \\ v^* = v^*(u, v) \end{cases}$$

使Σ^* 的坐标曲线 u^*、v^* 变为Σ的坐标曲线 u、v，因为要求u^*、v^*变为 u、v 或u、v变为 u^*、v^*，另外还要求单值连续。所以对σ的解析条件要求函数 σ：

（1）单值C^1类（一阶导数存在且连续）。

（2）雅可比行列式。

$$\left| \frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$$

如果有这样的σ 存在，那么对应的坐标曲线相同的点的曲线坐标相同，那$u = u^*$，$v = v^*$，显然对应曲线弧的方程 $u = u^*(t)$，$v = v^*(t)$。所以这两个曲面的第一基本微分形式相同，即第一基本量

$E = E^*$，$F = E^*$，$G = G^*$

反之，若 Σ 与Σ^*有 $E = E^*$，$F = F^*$，$G = G^*$，这时，可取 $u = u^*$，$v = v^*$ ，做为变换σ，这个 σ 显然满足上述变换条件。当然有

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ &= E^*du^{*2} + 2F^*du^*dv^* + G^*dv^{*2} \\ &= ds^{*2} \end{aligned}$$

因此Σ与Σ^*具有等度量、即Σ与Σ^* 上度量几何一致，即所谓Σ与Σ^*等距等价。

关于等角和等积问题与等距的思想方法相同，只是条件比等距条件较弱，因此，比等距范围宽一些面已。

例如，球面与平面不等距等价，而等角等价。

3. 曲面的法曲率，法截线

曲线的弯曲程度是通过曲线离开对应切线的变化来刻划的，因而，曲面的弯曲程度也应通过曲面上点离开与对应的切平面的变化来描述。当然曲面的弯曲比曲线的弯曲复杂得多。但是我们会想到，过切点在曲面上曲线的弯曲程度一般影响曲面的弯曲。这样即可以利用这些曲线的弯曲变化刻划曲面的弯曲。这样即产生了曲面上曲线的法曲率的概念。

曲面上曲线L在点P的曲率向量$\boldsymbol{r}''$在曲面上点P的法向量上$\boldsymbol{n}$的正投影值

$$k_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''$$

叫做曲面上曲线L在P点的法曲率。

这个定义不仅给出法曲率的几何意义，也给出了求曲线L在点P的法曲率的一种方法。它的计算公式为

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

这里应当注意到法曲率k_n为第二基本微分形式φ_2与第一基本微分形式φ_1的比。即

$$k_n = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

这样看来k_n不仅与第一基本量有关，也与第二基本量有关。当已知曲面上一点P，那么E，F，G；L，M，N就是确定值。当给定过点P的曲线C，那么曲线C的切线方向也确定。也就是du：dv的值确定，这样k_n即可确定。从而看出，法曲率k_n是点的位置函数，又与曲线C的切线方向有关。

在曲面上，过一点，有共同切线的曲线有无穷多条（图3—1）。但是，由法曲率公式得到，这些曲线的法曲率值是相同的。这样这些有相同的法曲率的曲线，即可用过点P的法向

量 n 的平面与曲面相交所得的法截线来代表．容易看到，当法截线绕法向量转一周时，法截线弯曲变化能刻划出曲面的弯曲变化。另一方面：法截线 C 在点 P 的法曲率绝对值等于曲线 C 在该点的曲率。即

$$|k_n| = \kappa$$

是重要的．因为它反映了法截线的弯曲变化与法曲率的关系。

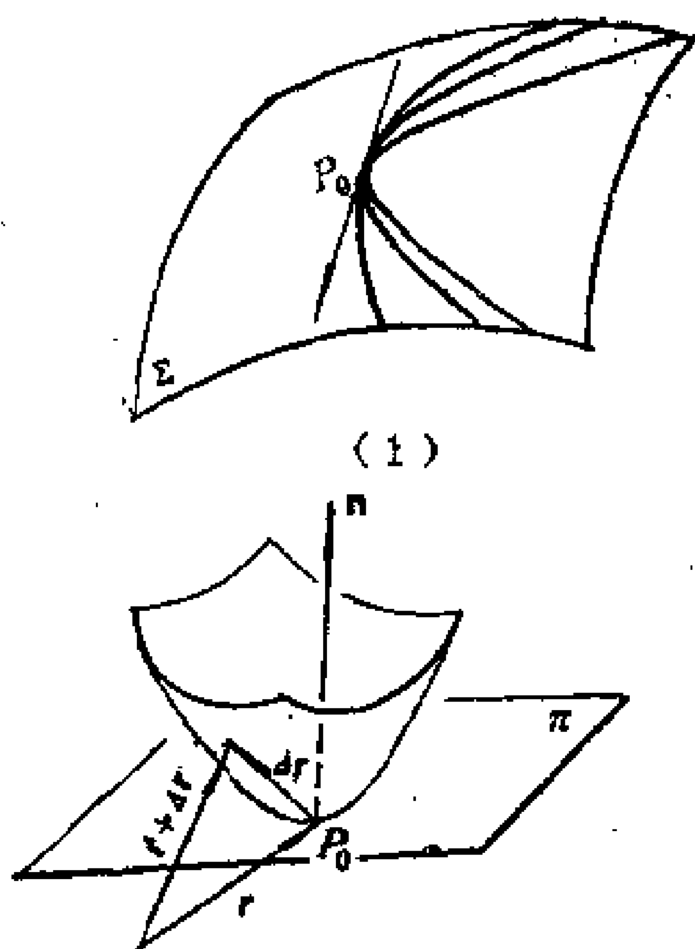


图3—1　（2）

同时也应该注意到法曲率的符号刻划了曲线的凸凹方向。

4．曲面的第二基本微分形式

曲面的第二基本微分形式在讨论曲面正常点邻域结构中起了重要作用。它是从推导法曲率公式过程中而引进的。即

$$\varphi_2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

其中

$$L = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu} = \frac{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vu} = \frac{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} = \frac{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

为第二基本量．第二基本微分形式又可以从另方面引入。设 n

是曲面在点P处的单位法向量，又设$\Delta \boldsymbol{r}$ 是从点P做微小移动后曲面向径$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$的改变量，于是曲面上点 $\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r}$ 与切平面距离h等于 $\boldsymbol{n}\cdot\Delta \boldsymbol{r}$。$\Delta \boldsymbol{r}$，按泰勒公式展开 $\Delta \boldsymbol{r}$，得到

$$\Delta \boldsymbol{r}= \dot{\boldsymbol{r}}\Delta s+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(\Delta s)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(\Delta s)^n+\cdots$$

所以

$$h=\boldsymbol{n}d\boldsymbol{r}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r}+e(du^2+dv^2)$$

当$\sqrt{du^2+dv^2}\to 0$有$e\to 0$。因为$d\boldsymbol{r}$在切平面上，所以 $\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0$；最后一项$e\ (du^2+dv^2)$与微分$du$ 和 dv 的平方相比是高阶无穷小，可以略去不计。这时只剩余$1/2\boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r}$，它可以写成

$$\boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uu}du^2+2\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uv}dudv+\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{vv}dv^2$$

所以曲面上P点邻域中的点到点$M(u+\Delta u, v+\Delta v)$ 到点P的切平面的有向距离 $h=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2\}$

（精确到三阶无穷小），这个式子表明曲面上点P与切平面的离差、因而能刻划曲面的弯曲程度。如果在P点，曲面的切平面P把空间分成两个半空间，法向量$\boldsymbol{n}$ 正方向那一侧叫正半空间，而另一侧叫负半空间。当$h>0$时，曲面上点M在正半空间，当$h<0$ 时，点M在负半空间。因此 $|h|$ 指出曲面的弯曲程度，h 的正负指出曲面的弯曲方向。

第二基本微分形式也可写成

$$\varphi_2=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}$$

它与第一基本微分形式$\varphi_1=d\boldsymbol{r}^2$ 比较，φ_2 是向径的微分与法向量微分的数量积。从公式显然看出，$\boldsymbol{r}_u$，v，$\boldsymbol{n}$都是对于曲面的运动不变量。因而L,M,N也都是不变量。但它们与参数选择有关。这是因为经过参数变换后，法向量的符号，随着参数的

雅可比行列式大于0或小于0而改变符号。

5．曲面的主曲率与主方向

曲面的主曲率是曲面正常点的法曲率的极值．已知曲面主曲率，可确定正常点的法曲率变化范围．这样我们即可利用主曲率的值来考查曲面的弯曲状态和凹向．因而由法曲率的极值而定义的主曲率及主方向是讨论曲面在正常点邻域结构形状主要依据．

若已知曲面方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$，可通过下面方程求在正常点$P$的法截线$C$的主曲率即通过

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN-2FM+LG)k_n+(LN-M^2)=0$$

来求得．

而且在本章中，我们证明了二极值是不相等的．当然，二主曲率也是不相等的．在正常点主曲率有两个值，一是法曲率的极大值，一是法曲率的极小值．

应当指出，对上面方程也会出现等根的情况，这时我们推得

$$E:F:G=L:M:N$$

这种点叫做曲面的**脐点**，即所有法曲率值是相等，因此，在该点的任意方向都是主方向．关于脐点，可分两种情况：当$L=M=N=0$时的脐点，我们称为**平点**，过该点所有法截线都是直线，因此，该点邻域相当于平面．当L、M、N不同时为零时，在该点的法曲率k_n为常值，所有法截线的曲率相同，我们称该点为**圆点**，在该点的邻域相当于球面．脐点是曲面上的特殊点，我们不作详细讨论．

6、杜班标型，欧拉定理

过在曲面正常点P的法向量的所有平面与曲面的交线——**法截线**，它都对应曲面在点P的法曲率值，它的变化范围已经讨论过。而这些法曲率值变化规律如何，不清楚．杜班标型实

际上是给出过点 P 的所有法截线的法曲率值变化规律一个几何模型。而且推得它的方程是二次方程．流动坐标的系数恰好是点 P 的主曲率． k_1，k_2．它描绘出的曲线是以点 P 为原点，在过 P 点的切平面上的二次曲线．而这正是曲面上正常点邻域结构的分类——椭圆点、双曲点、抛物点的名称的由来．

若 P 点为平点，杜班标型不存在．

欧拉定理是给出已知曲面 Σ 上正常点的 P 二主曲率，k_1，k_2 及过这点任意法截线 C 的法曲率 k_n 的关系式．即

$$k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi \tag{A}$$

其中 φ 为法截线 C 的切线方向与主方向的夹角．因为 k_1，k_2 为二主方向所对应的主曲率，且坐标网是曲率线网，坐标曲线 u、v 都是曲率线，我们会得到

$$k_1 = \frac{L}{E}, \qquad k_2 = \frac{N}{G}$$

公式(A)由欧拉提出，因而称为欧拉公式．从公式看出沿任意方向的法截线的法曲率值 k_n，当点 P 给定，主曲率与主方向随之确定．这时 k_n 为 φ 的函数．当 φ 改变时，对应的法截线 C 在点 P 的法曲率值，按欧拉公式关系式而变化．

7．高斯曲率，平均曲率

曲面在已知点处高斯曲率是指主曲率的乘积 $K = k_1 \cdot k_2$，它是讨论曲面在正常点邻域中的重要概念．高斯曲率是曲面运动的不变量．我们证明了它完全可以用曲面的第一基本量及其导函数表出，所以它属于曲面的内在性质．同时也证明了曲面的高斯曲率为零，是曲面可展的必要充分条件，也可以说它是可展曲面的又一重要特征．在正交网中，高斯曲率公式为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}$$

平均曲率是指曲面在已知点处主曲率和的一半，即

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

由定义，可得

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$$

可见平均曲率的绝对值 $|H|$ 对于曲面运动都是不变量。

在平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$ 的点 P，$k_1=-k_2$。若 $k_1=0$ 显然 k_2 也为零。根据定义，显然 P 点为抛物点。若 $k_1\neq0$，则高斯曲率 $K=-k_1^2<0$，这时 P 点为双曲点。

平均曲率 $H=0$ 的曲面称为极小曲面。由此我们得曲面为极小曲面的条件为

$$EN-2FM+GL=0$$

极小曲面重要性质是：已给一条闭曲线，如蒙在这条闭曲线上的曲面中，具有最小面积的曲面。所以极小曲面也叫小积曲面。实验证明：如果把闭曲线浸在肥皂液里然后拿出，闭曲线上蒙上一层肥皂液。在没有外力的作用下，即形成一个小积曲面。从力学角度看，这是因为肥皂液上的表面张力，使得这个曲面面积尽可能地小。

显然，只有平面是可展的小积曲面。除平面外，旋转的极小曲面是悬链面、正螺面。

8．曲面的渐近方向和渐近曲线

在曲面Σ上，点P处，使法曲率 $k_n=0$ 的方向叫做曲面在P点的渐近方向。如果曲线上每一点的方向都是渐近方向。这样的曲线是渐近曲线。显然渐近曲线是曲面上的特殊曲线。已知法曲率 $k_n=\varphi_2/\varphi_1$，由渐近曲线的定义可知渐近曲线的微分方

程为

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

(i) 当$LN-M^2=0$ 时，对含有未知量的二次方程的两根相等。所以在抛物点邻域内过每一点存在唯一一条渐近曲线。

(ii) 当 $LN-M^2<0$ 时，对方程来说，有相异二实根。所以在双曲点的邻域内，过每一点存在两条相交的渐近曲线，因而可构成渐近曲线网。

(iii) 当 $LN-M^2>0$ 时，则方程有二虚根，因为在椭圆点的邻域内，不存在实的渐近曲线。

从渐近曲线微分方程看出，当u曲线为渐近曲线时，$L=0$，当 v 曲线为渐近曲线时，则$N=0$，因而 $L=N=0$ 是坐标曲线为渐近曲线的充分必要条件。

9．曲面的相伴三棱形与高斯万加滕公式

在研究曲线的性质时，在曲线上每一点取三个互相垂直的单位向量：τ、ν、β，构成曲线论里的相伴三棱形，并且将它们对于曲线弧长的导向量写成它们自己的线性组合，这就是有名的F—S公式。它在曲线论中占有重要地位。根据这种思想，在曲面论里也相应的引进了曲面的相伴三棱形。我们在曲面上每一点取三个向量，即$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$ 构成曲面的相伴三棱形。

应当指出，它与曲线的相伴三棱形不同。三个向量$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$不全是单位向量，或者说 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$不是单位向量，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}_v$，但 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 一般情况下不垂直。因而，在用曲面相伴三棱形做为标架的基底时，所得到的公式是比较复杂，所以在讨论曲面一般性质时，不得不引进新的记号——指标记号。

我们曾利用曲线的相伴三棱形导出 F—S 公式。研究了曲线上正常点邻近点的性质。与此类似，我们利用曲面的相伴三

棱形，导出曲面的高斯公式与万加滕公式。

所谓高斯公式，即

$$\boldsymbol{r}_{j,k}=\Gamma^{i}_{jk}\boldsymbol{r}_{i}+\Gamma_{jk}\boldsymbol{n}$$

其中 $$\Gamma^{i}_{jk}=\frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k}+g_{ak,j}-g_{ajk,}),$$

$$\Gamma_{jk}=\mathrm{H}_{jk}$$

当曲面 S 的坐标网为正交网时，$F=0$，则高斯公式写成下面形式

$$\boldsymbol{r}_{11}=\Gamma^{k}_{11}\boldsymbol{r}_{k}+L\boldsymbol{n}=\frac{E_{u}}{2E}\boldsymbol{r}_{1}-\frac{E_{v}}{2G}\boldsymbol{r}_{2}+L\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_{21}=\Gamma^{k}_{12}\boldsymbol{r}_{k}+M\boldsymbol{n}=\frac{E_{v}}{2E}\boldsymbol{r}_{1}+\frac{G_{u}}{2G}\boldsymbol{r}_{2}+M\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{r}_{22}=\Gamma^{k}_{22}\boldsymbol{r}_{k}+N\boldsymbol{n}=-\frac{G_{u}}{2E}\boldsymbol{r}_{1}+\frac{G_{v}}{2G}\boldsymbol{r}_{2}+N\boldsymbol{n}$$

万加滕公式是：

$$\boldsymbol{n}_{,k}=-g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_{i}$$

它表示法向量$\boldsymbol{n}$的偏导函数按 $\boldsymbol{r}_{i}$ 的线性分解式，当曲面 S 的坐标网为正交网时，表示为

$$\boldsymbol{n}_{1}=-\frac{L}{E}\boldsymbol{r}_{1}-\frac{M}{G}\boldsymbol{r}_{2}$$

$$\boldsymbol{n}_{2}=\frac{M}{E}\boldsymbol{r}_{1}-\frac{N}{G}\boldsymbol{r}_{2}$$

高斯公式与万加滕公式一起表示了当曲面相伴三棱形沿曲面上某曲线进行微小移动时，它对于某固定相伴三棱形的相对转动规律。即它们是描述曲面上相伴三棱形 $\{P;\ \boldsymbol{r}_{u},\ \boldsymbol{r}_{v},\ \boldsymbol{n}\}$ 的偏微分方程组。

10. 曲面的基本定理及高斯方程与柯达奇方程

当已知曲面方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u、v)$，则有

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{i}du^{i}$$

$$dr_j = \Gamma^k_{ij} du^i r_k + H_{jk} du^k n$$

$$dn = -g^{ij} H_{jk} r_i du^i$$

其中第一个式子表示相伴三棱形 $\{P(u, v);\ r_u,\ r_v,\ n\}$ 的原点$P(u, v)$的运动，第二式 dr_j 即高斯公式表示切向量 r_u r_v、的转动规律. 而第三式 $n_{\cdot k}$ 即万加滕公式表示法向量 n，即相伴三棱形第三个向量的转动规律. 现在的问题是：上面三个微分方程. 试问它们的系数，即，第一、二基本量g_{ij}与 H_{jk} 之间满足什么关系时曲面存在？如果存在曲面是否是唯一（除空间位置的不同）. 这就是曲面基本定理所要回答的问题.

首先把高斯公式和万加滕公式可以看成是关于 r_i 与n的偏微分方程. 但从微分方程理论知道，把二公式看成微分方程，而该微分方程是否可积.

在本章中，预备定理讨论了高斯方程及柯达奇方程

$$\left\{{l \atop ik}\right\}_{,k} - \left\{{l \atop ji}\right\}_{,k} + \left\{{s \atop jk}\right\}\left\{{l \atop si}\right\} - \left\{{l \atop sj}\right\}\left\{{s \atop ik}\right\}$$
$$= H_{jk} H^l_{\cdot i} - H_{ji} H^l_{\cdot k}$$

及柯达奇方程

$$H_{jk\cdot l} - H_{jl\cdot k} + \left\{{s \atop jk}\right\} H_{sl} - \left\{{s \atop jl}\right\} H_{sk}$$
$$= 0$$

就是高斯和万加滕公式的可积条件. 它是第一、二基本量 g_{ij} 与H_{ik}应满足的关系式. 对于曲面Σ来说，g_{ij}与 H_{jk} 不是独立的，而是应当满足一定条件的. 即应满足高斯方程和柯达奇方程，通过高斯方程可知，H_{jk} 可由 g_{jk} 表示出来.

由上所述高斯公式与万加滕公式是可积的. 根据方程理论，解 $\{r,\ r_i,\ n\}$ 是唯一存在的，且满足给定的初给条件.

其次$\{r, r_i, n\}$具有在某点$P_0(u_0,\ v_0)$的关系

$$r_{0j}\cdot r_{0k} - g_{0jk} = 0,\quad r_{0j}\cdot n_0 = 0,\quad n_0\cdot n_0 - 1 = 0$$

以它为初始条件，是否对任意的 $P(u, v)$，r_i，n 也满足关系

$$\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k-g_{jk}=0,\ \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}-1=0$$

要证明此结果，将它微分，则得微分方程，即

$$d(\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k-g_{jk})=\Gamma^{l}_{ji}du^{i}({}_{l}\boldsymbol{r}_k-g_{lk})+r^{l}_{kj}du^{i}(\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_j-g^{l}_{i})$$

$$+Hdu^{i}(\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{n})+H_{ki}du^{i}(\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n})$$

$$d(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}-1)=-2g_{ij}H_{jk}du^{j}(\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{n})$$

$$d(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{n})=\Gamma^{k}_{ij}du^{i}(\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{n})+H_{ij}du^{i}_{j}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}-1)$$

其未知函数分别为$\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k-g_{jk}$，$\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}-1$。

在给定的初始条件下，有零解。即有

$$\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k=g_{jk},\quad \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}=1$$

对所得曲面$\boldsymbol{r}$它的第一、二基本微分形式的系数恰好是给定的g_{jl}与H_{jk}。

最后证得，曲面方程$\boldsymbol{r}$除空间位置不同外，曲面是唯一确定的。

高斯方程与柯达奇方程在正交网中，即可写成

$$K=\frac{LN-M^2}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}$$

与
$$\begin{cases}\left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\dfrac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-N\dfrac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0\\[2ex]\left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\dfrac{M}{\sqrt{G}}\right)_v-L\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}-M\dfrac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0\end{cases}$$

这种形式在计算问题中经常用到，这里给以提示。

11．平面上的向量平行性与曲面上的列维—齐维他向量的平行性。

曲面上向量的列维—齐维他平行移动是平面上向量的平行移动的概念的推广，因而列维—齐维他向量平行性有平面上向量的平行性的基本特征。在列维—齐维他平行移动下，长度、角度不变。这在本章中已经给出证明。

下面重点讲一下对列维一齐维他向量平行移动及对向量平行性的充分必要条件的理解。

设在曲面Σ上，给出一条曲线 L：$u^i=u^i(t)$。在 $M_0(t_0)$ 点给出Σ上的向量 v^i（曲面Σ上的向量，当然是Σ的切向量，v^i是这个向量的坐标）在曲线L上与M_0的邻近点为$M(t_0+\Delta t)$，曲面Σ的切向量可写为v^i+dv^i，显然，v^i+dv^i 表示切向量v^i 做了一个微小移动Δt变为$M(t_0+\Delta t)$ 点的切向量 v^i+dv^i。再平移回到M_0点，即起点与 M_0 点重合，对曲面 Σ 来说，在一般情况下，在M_0点的 v^i+dv^i 向量不再与曲面相切Σ。它不在过

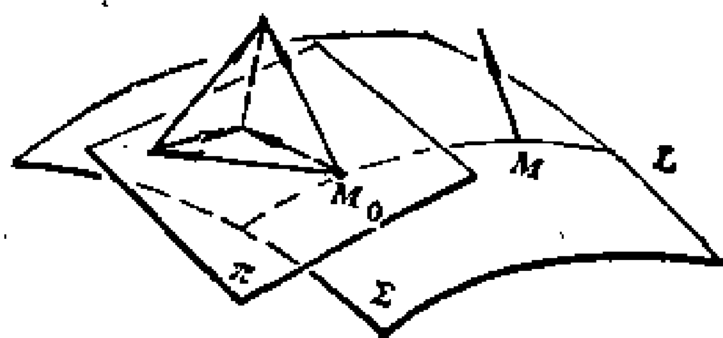


图 3—2

M_0 的切平面上。这时把v^i+dv^i 正投影在 M_0 点的切平面上。设正投影的坐标为 $v^i+\delta v^i$。即 $v^i+\delta v^i$。为 $\overrightarrow{M_0B}$向量的坐标。

从图容易看出$\overrightarrow{AB}$ 向量就是$\overrightarrow{M_0A}$与$\overrightarrow{M_0B}$向量之差。用坐标表示就是 δv^i。显然dv^i在M_0点切面上的投影就是 δv^i，一般的δv^i不为零。称δv^i为v^i沿曲线L的绝对微分。

列维一齐维他平行意义下，平行是指在曲线L上M点的切向量 v^i+dv^i 在M_0 点的切平面上的正投影，即dv^i 垂直于 M_0

的切平面，显然dv^i在切平面正投影$\delta v^i=0$。这时v^i+dv^i恰好等于在M_1点的Σ的切向量v^i。则称v^i+dv^i与v^i沿曲线L是列维一齐维他平行的。

从前面分析看到，向量在列维一齐维他意义下平行的充分必要条件，显然是$\delta v^i=0$。

列维一齐维他平行性与向量v^i沿移动的曲线L有关，平行性的解析表示为

$$\delta v^i=dv^i+\{{}_{jk}^{i}\}v^jdu^k=0$$

我们的目的是找出绝对微分δv^i为零与曲面的关系。应当指出，列维一齐维他平行移动与$\delta v^i=dv^i+\{{}_{jk}^{i}\}v^jdu^k$有关，确切些与$\{{}_{jk}^{i}\}$有关。而$\{{}_{jk}^{i}\}$是曲面的第一基本量的表示式。从而看出，在这个意义下的平行移动，是曲面的内在性质。例如，如果曲面是欧氏平面，在欧氏平面上g_{ij}是常数，所以$\{{}_{jk}^{i}\}=0$，这时$\delta v^i=dv^i$。因此$\delta v^i=dv^i=0$时，在这个平面上列维一齐维他平行性与普通的平行一致，而与曲线L无关。这时的绝对微分与普通微分一致。但是这仅限于平面，一般情况比较复杂，不再多说。

12．曲面上的测地线

测地线是微分几何的主要内容，对它的研究，可分三部分：（1）测地线定义；（2）测地线的性质；（3）测地线的微分方程。

为了给出测地线的定义，首先研究了测地曲率，利用测地曲率等于零，给出测地线的定义。当然也可以用变分法来定义。这样虽然直观，但计算比较麻烦。

测地曲率是曲面Σ上曲线Γ在点P的曲率向量$k\mathbf{v}$在Σ上点P的切平面π上的正投影值。设Γ为Σ上经过点P的一条曲线，π为Σ在P的切平面，Γ^*为Γ在π上的投影，则在P点T

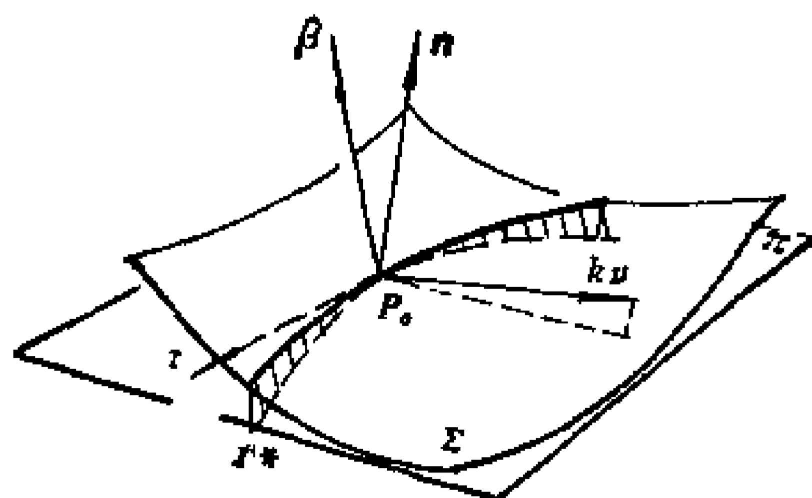


图3—3

的测地曲率kg的绝对值等于T^*曲线的曲率 κ^*、这是显然的。因为Γ^*是Γ的正投影、那么Γ的曲率向量 $k\mathbf{v}$ 的在P点切平 面上的正投影必在 Γ^* 的主法线上。Γ^* 与Γ在P点有相同的切线。Γ和Γ^*同为投影柱面Σ^* 上的曲线。它们有共同P点和共同切向量τ，而Γ^*是投影柱面上的法截线。因此，Γ^* 在点P的曲率等于它在点P的法曲率k_n的绝对值。又根据测地曲率的定义可知，曲线Γ在点P的测地曲率kg等于与T具有共同点，共同切线的曲线Γ^*在点P的法曲率k_n。但Γ^*是Γ射影柱面Σ^* 上在点P的法截线，因为法截线Γ^*在点P的法曲率 $|k_n|=\kappa$。而k_n又等于Γ在点P的测地曲率kg。所以证得Σ上曲线Γ在 点P的测地曲率kg等于与它在P点Σ的切平面上投影曲线在点P的曲率。即$|kg|=\kappa$。曲线的测地曲率 kg

$$kg=\pm\sqrt{g}\begin{vmatrix} u^{1\prime} & u^{2\prime} \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}$$

其中 $a^i=u^{i\prime\prime}+\left\{{i \atop jk}\right\}u^{j\prime}u^{k\prime}$

在正交网中，kg又等于

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\varphi + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\varphi$$

这是著名的刘维尔（Liouville）公式。

由此公式容易看出，测地曲率是曲面的运动不变量。若Σ为平面，u、v 是直角坐标，显然得 $E=G=1$，$F=0$。这时上式化成

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds}$$

于是曲线的测地曲率k_g与相对曲率 k_r 完全一致。这说明曲面上一条曲线的测地曲率 k_g是平面上一条曲线的相对曲率 k_r 的推广。由此我们会得到：若曲面Σ一条曲线 Γ在平面 π 上展成为平面曲线Γ'，则Γ在Σ上测地曲率kg等于 Γ' 在平面π上的相对曲率。由此也容易推得：曲面Σ上一条曲线Γ在平面上展成为直线的充分必要条件是Γ在Σ上的测地曲率恒为零。

从测地曲率的几何意义看出，为什么用测地曲率为零来定义测地线是比较自然的

从测地线的定义得到下面三个等价性质：（1）测地线或者是直线，（2）或者它的密切平面与曲面的切平面垂直。（3）或者测地线的从切平面与曲面的切平面重合。

从此可推出：球面上的测地线是它上面的大圆。

柱面上的螺线，包括母线和它们的正交轨线都是柱面上的测地线。这是因为柱面展成平面时柱面的螺旋线、母线以及母线的正交轨线都展成平面上的直线。

测地线在正交网中的微分方程也可以写作

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi-\dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right) \\
\dfrac{du}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi \\
\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi
\end{cases}
$$

或将上式的后两式代入第一个式子，则可写作

$$
\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(E_v\frac{du}{ds}-G_u\frac{dv}{ds}\right)
$$

这个方程是由三个变数 u，v，φ 及自变量 s 构成的一阶常微分方程．解微分方程或方程组，可确定测地线的参数方程．因 u、v、φ有连续偏导数．根据微分方程理论，对已给的初始条件

$$u(s_0)=u_0,\quad v(s_0)=v_0,\quad \varphi(s_0)=\varphi_0$$

就有唯一解

$$u=u(s),\quad v=v(s),\quad \varphi=\varphi(s)$$

这就证明了从曲面上每一点出发，沿每一个方向，总有唯一的一条测地线．这和过一点沿一方向都有一条直线类似．

应当指出：测地线是短程线，这是局部性质，不是整体概念，否则不一定最短．如过球面上两点，即存在两段弧，就局部来说测地线指劣弧即最短弧而言．

〔例1〕已给拟球面 Σ：$r=\{\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ f(\rho)\}$ $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，其中$\rho=a\cos\varphi$，$f(\rho)=a[\ln(\sec\varphi+\mathrm{tg}\varphi)-\sin\varphi]$．求拟球面$\Sigma$上的测地线方程．

〔解〕从 $f(\rho)=a[\ln(\sec\varphi+\mathrm{tg}\varphi)-\sin\varphi]$

可得：

$$f'(\rho)=-\mathrm{tg}\varphi$$

$$r_\rho=\{\cos\theta,\ \sin\theta,\ -\mathrm{tg}\varphi\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \{-\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\ 0\}$$

第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = \sec^2\varphi d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$= \frac{a^2}{\rho^2} d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$= a^2\rho^2\left[\left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{a}\right)^2\right]$$

作参数代换 $\quad u = \dfrac{\theta}{a} \qquad 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{2\pi}{a}$

$$v = \frac{1}{\rho} \qquad v \geqslant \frac{1}{a}$$

代入上式得

$$\varphi_1 = \frac{a^2}{v^2}(du^2 + dv^2)$$

已知 $\qquad E = G = \dfrac{a^2}{v^2}$

将此式代入测地线的微分方程（坐标曲线网是正交网）

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{E}}\right)\cos\varphi - \dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi \\ \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi \\ \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi \end{cases}$$

则得

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{ds} = -\dfrac{1}{a}\cos\varphi \\ \dfrac{du}{ds} = \dfrac{v}{a}\cos\varphi \\ \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{v}{a}\sin\varphi \end{cases}$$

如果 $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\varphi \neq 0$，则由上式可得

$$du = -v\,dv$$

$$dv = -v\,\mathrm{tg}\varphi\,d\varphi$$

积分上式的第二式得

$$v = c\cos\varphi.$$

把它代入第一式，再积分得

$$u = -c\sin\varphi + u$$

从上面二式消去φ，得

$$(u-u_0)^2 + v^2 = c^2$$

注意上述二式是测地线的参数方程，φ 为参数．消去参数后得测地线方程。

13．半测地坐标网与测地极坐标网

我们知道，对曲面方程来说，坐标系选取适当，可使方程简化．那么选取适当坐标曲线网，可使曲面的第一基本微分形式更为简单，以利于讨论曲面的性质．

半测地坐标网是这样定义的，在曲面Σ上任取一条测地线作为 v 曲线，过曲线上各点作与 v 正交的测地线作为 u 曲线族．我们知道，过曲面上的每一点，沿任意方向都存在一条测地线、因而在任何曲面都可以建立半测地坐标网．而且是正交网．在这个网中，第一基本量的$F=0$。

我们知道，在正交网中，测地线方程为

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi-\frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{du}{ds}=1/\sqrt{E}\cos\varphi,\qquad \frac{dv}{ds}=1/\sqrt{G}\sin\varphi$$

这时对 u 曲线来说，它的切向量 r_u 与测地线切向量重合，即，$\varphi=0$，所以

$$\frac{d\varphi}{ds}=0$$

因为，$du\neq 0$，$dv=0$，由前面方程可得

$$\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{E_v}{\sqrt{E}}=0,\qquad 即\ E_v=0$$

即得 E 与 v 无关，只与 u 有关的函数。

由此，我们得到：若曲面的坐标网为正交网，则 u 一曲线为测地线的必要充分条件为 E 仅为 u 的函数；同理可推得 v 曲线为测地线的必要充分条件：G 仅为 v 的函数。

因此，可取

$$\int E(u)\,du=u,\qquad 即 E(u)=1$$

这时，曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+G(u,v)\,dv^2$$

在半测地坐标网中，当给定的测地线 v_0 看做缩成一点 O 时，而过 O 点沿各方向引测地线族，设它为 u 曲线，与 u 曲线正交的曲线族为 v 曲线。我们证明了

$$G(0,v)=0$$

$$\left[\frac{\partial\sqrt{G(u,v)}}{\partial u}\right]_{u=0}=1$$

满足这些条件的坐标网称为测地极坐标网。从上述定义看出，它也可以看作半测地坐标网的特殊情形。也可以看成是平面极坐标网的一个推广。请注意，这两种坐标网建立的条件及其之间的关系。

14. 常曲率曲面及其高斯—波涅定理

我们知道，高斯曲率K是曲面的内在性质是曲面的微分不变量．因而是曲面的等距变换的不变量．曲面等距等价，在对应点有相等的高斯曲率．但是，若二曲面的点之间有一一对应，它使两个曲面在对应点有相等的高斯曲率．这两个曲面一般的并不一定等距等价．也就是，在一定参数选择下，二曲面有相同的高斯曲率，并不能保证它们有相同的第一基本微分形式．即高斯曲率相等是等距等价的必要条件，但不是充分条件．

又由第三章§7的定理1，可知：高斯曲率为零的曲面都可以和平面贴合；高斯曲率恒等于$\frac{1}{a^2}$的曲面都可以和半径为a的球面贴合，高斯曲率等于$-\frac{1}{a^2}$的曲面都可以和拟球面贴合．应当注意，贴合的区域应当受坐标网正则性的限制，因而贴合是局部的。

由上述定理可知，具有常数高斯曲率K的曲面上的几何有三种，即平面上的欧氏几何，椭圆几何学，双曲几何学、这三种几何学的基本特征是，在它们上面的一个三角形的内角和依次等于，大于，或小于180°。

这就是高斯—波涅定理所要证明的结论．它给这三种度量几何在欧氏空间的实现的形象。

（四）本章小结

- 曲面
  - 曲面的度量性质
    1. 第一基本微分形式
    2. 曲面上曲线的弧长
    3. 曲面上二曲线的交线
    4. 曲面上闭曲线的面积
  - 曲面的其它性质
    1. 曲面的法曲率
       - $\varphi_2/\varphi_1=\kappa_n$
       - 法截线，渐近线
    2. 曲面的主曲率，主方向，曲率线，曲率线网
    3. 杜班标型，欧拉定理
    4. 曲面在正常点结构，高斯曲率，平均曲率
  - 曲面的基本定理
    向量的列维一齐维他平行移动，测地线
    1. 指标记号
    2. 曲面的相伴三棱形及高斯公式，万加藤公式
    3. 曲面的基本方程，高斯方程与柯达齐方程
    4. 曲面的基本定理证明，高斯一波涅定理

第四章　黎曼流形上的几何学习指导

本章是通过黎曼流上的几何来达到两个目的．其一是通过微分几何介绍做为现代数学基础的微分流形、切丛等基础知识．其二是通过微分流形、向量场、纤维丛给出把局部欧氏空间的微分几何推广到大范围的方法．当然只通过这短短的一章不可能把很广泛的内容都包括进来．只是对有关的基本知识、基本思想方法给以介绍．如果通过本章能引起读者对现代微分几何的兴趣和重视，那么也就算达到了目的．

（一）本章要点

由于本章新的概念较多，又考虑自给自足，因此本章由两部分组成．其一是预备知识，这部分很重要，对这部分，通过大量例题要掌握：

1．微分流形、切空间、切丛、纤维丛；

2．向量场、张量场、分布与对合；

3．浸入，嵌入、可定向与不可定向．

其二是黎曼流形上的几何．这部分主要是把局部欧氏几何，搬迁到流形上，并把它们从局部推广到大范围．因此这一部要掌握：

(i) 通过流形的张量场在流形上引进度量g_{ij}和h_{ij}，即第一基本张量场和第二基本张量场，使流形具有黎曼度量．然后把

已知的欧氏局部微分几何迁移到黎曼流形上进行大范围研究.

(ii) 通过浸入、嵌入和可定向判别那些问题可以大范围化.

(iii) 通过切丛上的可微颁布与对合以及最大积分流形来给出曲面基本定理的大范围证明. 对这部分的素材都是在局部微分几何中已知的, 因此, 要通过把它们大范围化来掌握现代微分几何的思想方法.

(二) 基本要求

这一章的部分内容稍高于部颁大纲.因此只提一般的要求.

(i) 了解微分流形、切空间、切丛、纤维丛、向量场、张量场、分布、对合、浸入、嵌入等等的结构与概念.

(ii) 了解欧几思得几何与黎曼几何, 小范围与大范围的异同, 以及可大范围化的条件.

(iii) 理解大范围化的手段和思想方法.

(三) 本章内容分析与概述

数学是描述、研究客观世界的工具, 随着客观世界的发展和人类对客观世界认识的不断深化, 因此数学也必须随之向前发展. 只靠对局部的描述满足不了客观的要求, 从而提出大范围的描述与研究. 关于局部即在点的邻域的性质, 经过人们的实践已有比较充分的理解, 这些局部的性质是否可以推广到大范围去? 怎样推广? 经过长期的研究, 才创造了微分流形这一概念, 它是豪斯道夫空间, 而它的各个邻域都与欧几里得空间的开邻域同胚. 而且它的各个开邻域都利用微分同胚贴连起来, 这就提供了一种可能, 把已知的局部性质推广到大范围上去.

流形好象一个演剧的舞台，各种剧目都可以搬上去演出，但是随剧目的不同而需相适应的道具，那么具有共性的道具就是在本章已讲过的切空间、切丛、纤维丛、浸入、嵌入、向量场、张量场、对合分布、最大积分流形等等。我们回忆一下局部微分几何，想在点的邻域中引进度量是依靠在该点的切平面（欧氏空间）上向量的内积来引进曲面的第一基本微分形式才定义曲面在该点邻域的度量性质的。对于流形也是一样，把它各点的切空间的集合中引入拓扑性质就构成纤维丛，这样对流形的研究就转化成在纤维丛上的研究。又如在局部微分几何中，研究点邻域的形状时，我们是把它实现在三维空间进行研究的。对于流形同样地我们是把它浸入或嵌入在高维空间进行研究。这里涉及到流形是否可定向的问题。通过这些道具才能把强而有力的分析、代数和几何搬到流形上去，通过它们才能把局部的一些已知问题推广到大范围中去。

按这种想法选取了内容，主要是把第一、二、三章中的欧几里得局部微分几何内容搬到黎曼流形上并把它们推广到大范围中去。我们的目的不是讲更多的黎曼几何内容，而是通过已知的知识使读者了解做为现代数学基础之一的微分流形以及纤维丛、张量场、分布与对合等等的作用以及其在大范围微分几何中的应用。如有兴趣深入研究，请参阅下列参考书：

1. 佐佐木重夫著 黎曼几何(苏步青译)科学出版社1964。
2. 立花俊一著 黎曼几何(王运达译)东北工学院1981。
3. S.Sternberg: Lecture on differential geometry, Prentice-Hall 1964.
4. W.B.Boothby: Anintroduction to Differentialle manifolds and Rismannian geometry. Acadmie prass 1975.

第三部分　微分几何习题解答

第一章　曲线论习题解答

1. （解）若 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=f(t)$ 表示平面曲线，则该曲线的切向量 $\dot{r}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ \dot{f}(t)\}$ 应为平行固定平面的向量，故有 $(\dot{r}\ddot{r}\dddot{r})=0$.

$$\because\quad \ddot{r}=\{-a\cos t,\ -a\sin t,\ \ddot{f}(t)\}$$

$$\dddot{r}=\{a\sin t,\ -a\cos t,\ \dddot{f}(t)\}$$

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & \dot{f}(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & \ddot{f}(t) \\ a\sin t & -a\cos t & \dddot{f}(t) \end{vmatrix}=0$$

即　　$\dot{f}(t)+\dddot{f}(t)=0$

此微分方程的通解为：

$$f(t)=A\sin t-B\cos t+C$$

所以此曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t & ① \\ y=a\sin t & ② \\ z=A\sin t-B\cos t+C & ③ \end{cases}$$

由①、②得

$$x^2+y^2=a^2 \qquad ④$$

又因，$\cos t=\dfrac{x}{a}$，$\sin t=\dfrac{y}{a}$，代入③得

$$z=A\frac{y}{a}-B\frac{x}{a}+C$$

即　　$Ay-Bx-az+aC=0$　　⑤

所以此曲线的一般方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ Bx-Ay+az-aC=0 \end{cases}$$

即曲线为平面⑤上的一个椭圆。

2. （证明） ∵锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的母线的方向向量为 $\{x, y, z\}$，故与曲线相交的锥面母线的方向向量为 $\boldsymbol{a}=ae^t\{\cos t, \sin t, 1\}$。

曲线与锥面母线相交点处的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=ae^t\{-\sin t+\cos t, \sin t+\cos t, 1\}$$

设 θ 为曲线与锥面母线的交角，则有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{a}||\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

∴ θ 为定角，即曲线与锥面母线相交成定角。

3. （证明） 设圆柱面的方程为 $x^2+y^2=R^2$，则此圆柱面的母线的方向向量为 $\boldsymbol{a}=\{0, 0, 1\}$。

设与柱面母线交成定角 θ 的曲线方程为

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t)$$

则此曲线的切向量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\{\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)\}$$

于是有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{a}||\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{\dot{h}(t)}{\sqrt{\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)+\dot{h}^2(t)}}$$

即 $$[\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)+\dot{h}^2(t)]\cos^2\theta=\dot{h}^2(t)$$

或 $$[\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)]\text{ctg}^2\theta=\dot{h}^2(t)$$

从而 $$\dot{h}(t)=\text{ctg}\theta\sqrt{\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)}$$

$$h(t)=\text{ctg}\theta\int\sqrt{\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)}\,dt$$

故与圆柱面母线交成定角 θ 的曲线方程为

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=\operatorname{ctg}\theta\int\sqrt{\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)}\,dt$$

当柱面为椭圆柱面、抛物柱面、双曲柱面的标准位置时，它们的标准方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=2Px,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

其母线的方向向量均为 $a=\{0,\ 0,\ 1\}$，故按圆柱面的证法一样，可得出与其母线相交成定角 θ 的曲线方程为

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=\operatorname{ctg}\theta\int\sqrt{\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)}\,dt.$$

4.（1）（解） ∵ $\dot{x}(t)=2t,\ \dot{y}(t)=3t^2-3,\ \dot{z}(t)=6t$，∴ $\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)$ 对任意的 t，均不同时为零且连续，即

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)>0$$

∴曲线（1）在任意点邻域上确定一简单曲线弧.

（2）（解） ∵ $\dot{x}(t)=-3\cos^2t\sin t,\dot{y}(t)=3\sin^2t\cos t$，$\dot{z}(t)=-2\sin2t$对任意的 t 连续.

又当令$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)=0$时，即

$$9\cos^4t\sin^2t+9\sin^4t\cos^2t+16\sin^2t\cos^2t=25\cos^2t\sin^2t$$

$=0$ 时，其实数解为 $t=0,\frac{\pi}{2},\ \pi,\frac{3}{2}\pi$. 即这些点不是正常点.

∴曲线在去掉点$t=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\frac{3}{2}\pi$ 外的各点邻域里确定简单曲线弧.

（3）（解）曲线可写为

$$\begin{cases} F=(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0\\ G=z-5=0\end{cases}$$

于是

$F_x = 4x(x^2+y^2) - 4a^2x$, $F_y = 4y(x^2+y^2+a^2)$, $F_z = 0$

$G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 1$

故曲线上任意点有矩阵

$$\begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2)-4a^2x & 4y(x^2+y^2+a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

除曲线上的点(0,0, 5)外，上述矩阵的秩均为 2，故曲线除点(0,0,5)外，都是正常点．因此曲线上除点(0,0,5)外，各点邻域是简单曲线弧．

（4） 曲线可写成

$$\begin{cases} F = x^2+y^2-R^2 = 0 \\ G = x^2+z^2-R^2 = 0 \end{cases}$$

于是 $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 0$

$G_x = 2x$, $G_y = 0$, $G_z = 2z$

故曲线上任一点有矩阵

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ x & 0 & z \end{pmatrix}$$

曲线上除点 $(R, 0, 0)$及 $(-R, 0, 0)$ 外，其余点的矩阵的秩均为2．故曲线除点 $(R, 0, 0)$ 及 $(-R, 0, 0)$ 外，在各点邻域确定简单曲线弧．

5． (解) $\because \dot{r} = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ c\}$

$$|\dot{r}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2} = \sqrt{a^2+c^2}$$

$$\therefore\ s = \int_0^t \sqrt{a^2+c^2}\,dt = \sqrt{a^2+c^2}\,t.$$

6． (解) $\therefore\ \dot{r} = \{a\,\mathrm{sh}t,\ a\,\mathrm{ch}t,\ a\}$

$$|\dot{r}| = \sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t + a^2\mathrm{ch}^2 t + a^2} = \sqrt{2}\,a\,\mathrm{ch}t$$

$$\therefore\ s = \int_0^t \sqrt{2}\,a\,\mathrm{ch}t\,dt = \sqrt{2}\,a\,\mathrm{sh}t.$$

7. （解） $\because \dot{r}=\left\{1, \operatorname{sh}\frac{t}{a}, 0\right\}$

$$|\dot{r}|=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{t}{a}}=\operatorname{ch}\frac{t}{a}$$

$\therefore\ s=\int_0^t \operatorname{ch}\frac{t}{a}\,dt=a\operatorname{sh}\frac{t}{a}$.

8. （解） $\because\ \dot{r}=\{-a\sin\varphi,\ a\sec\varphi-a\cos\varphi,\ 0\}$

$|\dot{r}|=\sqrt{a^2(\sin^2\varphi+\sec^2\varphi+\cos^2\varphi-2)}=a\operatorname{tg}\varphi$

$\therefore\ s=\int_0^\varphi a\operatorname{tg}\varphi d\varphi=-a\ln\cos\varphi$.

（证明）设切点为M，切线与y轴的交点为N，过M作x轴的平行线交y轴于G，则

$GM=x$，$GN=x\operatorname{tg}\varphi$，于是有

$$|\overline{MN}|=\sqrt{x^2+(x\operatorname{tg}\varphi)^2}=\sqrt{a^2\cos^2\varphi(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}$$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\varphi\sec^2\varphi}=|a|\text{（取正值）}$$

9. （解） $\because\ \dot{r}=\{4a\sqrt{1-t^2},\ 4at,\ 4a\}$

$$|\dot{r}|=4a\sqrt{1-t^2+t^2+1}=4\sqrt{2}a$$

$\therefore\ s=\int_{t_1}^{t_2}4\sqrt{2}a\,dt=4\sqrt{2}a(t_2-t_1)$

10. （解）先将此交线化为参数方程，令，

$x=b\cos\theta$，则 $y=b\sin\theta$，$z=\pm\sqrt{a^2-b^2}$

于是 $\dot{r}=\{-b\sin\theta,\ b\cos\theta,\ 0\}$

$|\dot{r}|=b$

$\therefore\ s=\int_0^{2\pi}b\,d\theta=2b\pi$

因球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=b^2$ 的交线包含

$z=+\sqrt{a^2-b^2}$ 和 $z=-\sqrt{a^2-b^2}$ 两个平面上的圆曲线，所以交线的总弧长为 $4b\pi$。

11. （解）将曲线化为参数方程

令， $x=x$， 则 $y=y(x)$， $z=z(x)$。

$\dot{r}=\{1,\ \dot{y}(x),\ \dot{z}(x)\}$

$|\dot{r}|=\sqrt{1+\dot{y}^2(x)+\dot{z}^2(x)}$

$$\therefore\quad s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\dot{y}^2(x)+\dot{z}^2(x)}\,dx.$$

12. （解）以 x 为参数，曲线化为

$$x=x,\ y=\frac{x^3}{3a^2},\ z=\frac{a^2}{2x}$$

曲线与二平面 $y=\frac{a}{3}$、 $y=9a$ 各交于 $x=a$， $x=3a$。

$$\because\ \dot{r}=\left\{1,\frac{x^2}{a^2},\ -\frac{a^2}{2x^2}\right\}$$

$$|\dot{r}|=\sqrt{1+\frac{x^4}{a^4}+\frac{a^4}{4x^4}}=\frac{2x^4+a^4}{2a^2x^2}$$

$$\therefore\quad s=\int_a^{3a}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{2x^2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3a^2}-\frac{a^2}{2x}\right)\Bigg|_a^{3a}=9a.$$

13. （解）曲线与 xy 面相交时，$z=4at=0$，即 $t=0$。

$\because\ \dot{r}=\{-3a\sin t,\ 3a\cos t,\ 4a\}$

$|\dot{r}|=\sqrt{9a^2+16a^2}=5a$

$$\therefore\quad s=\int_0^t 5a\,dt=5at.$$

14. （解）曲线与 xy 平面相交时，$z=4a\cos\frac{t}{2}=0$ 即

$t=\cdots,\ -\pi,\ \pi,\ \cdots$

$$\because\ \dot{r}=\left\{a(1-\cos t),\ a\sin t,\ -2a\sin\frac{t}{2}\right\}$$

$$|\dot{r}| = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t+4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\,a\sin\frac{t}{2}$$

$$\therefore\quad s=\int_{-\pi}^{0}-2\sqrt{2}\,a\sin\frac{t}{2}dt+\int_{0}^{\pi}2\sqrt{2}\,a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=4\sqrt{2}\,a\cos\frac{t}{2}\Big|_{-\pi}^{0}-4\sqrt{2}\,a\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=4\sqrt{2}\,a+4\sqrt{2}\,a$$

$$=8\sqrt{2}\,a.$$

15. （解）先求弧长

$$\because\ \dot{r}=\{a\,\mathrm{sh}t,\ a\,\mathrm{ch}t,\ a\}$$

$$|\dot{r}|=\sqrt{2}\,a\,\mathrm{ch}t$$

$$\therefore\quad s=\int_0^t\sqrt{2}\,a\,\mathrm{ch}t\,dt=\sqrt{2}\,a\,\mathrm{sh}t$$

$$t=\mathrm{sh}^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}\,a}$$

$$\because\ \mathrm{ch}^2 t=1+\mathrm{sh}^2 t=\quad 1+\frac{s^2}{2a^2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{ch}t=\sqrt{1+\frac{s^2}{2a^2}}$$

代入原方程，得曲线的自然参数表示式

$$x=a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}=a\sqrt{1+\frac{s^2}{2a^2}},\quad y=\frac{s}{\sqrt{2}},$$

$$z=a\,\mathrm{sh}^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}a.$$

16. （解） $\because\ \dot{r}=\{e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t\sin t+e^t\cos t,\ e^t\}$

$$\therefore\ |\dot{r}|=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1}$$

$$=\sqrt{3}e^t$$

$$\therefore s=\int_0^t\sqrt{3}e^t dt=\sqrt{3}(e^t-1)$$

$$t=\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$$

代入原方程，得曲线的自然参数表示式

$$r=\left\{\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right\}$$

17. （解）　将二曲线分别化为参数方程形式。

$$r_1=\left\{x,\quad e^2\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right),\quad 0\right\}$$

$$r_2=\{x,e^x,\qquad\qquad 0\}$$

$$\because\ \dot{r}_1(2)=\{1,\ e^2,\ 0\},\ \dot{r}_2(2)=\{1,\ e^2,\ 0\}$$

$$\ddot{r}_1(2)=\{0,\ e^2,\ 0\},\ \ddot{r}_2(2)=\{0,\ e^2,\ 0\}$$

$$\dddot{r}_1(2)=\{0,\ 0,\ 0\},\ \dddot{r}_2(2)=\{0,\ e^2,\ 0\}$$

即　$\dot{r}_1(2)=\dot{r}_2(2)$，$\ddot{r}_1(2)=\ddot{r}_2(2)$，$\dddot{r}_1(2)\neq\dddot{r}_2(2)$

∴二曲线在点$x=2$处有二阶切触。

18. （解）∵平面的法向量 $n=\{-a,\ 0,\ 1\}$，

又：$\dot{r}=\{\cos t-t\sin t,\ -\sin t-t\cos t,\ a\}$

$$\dot{r}(0)=\{1,\ 0,\ a\}$$

$$n\cdot\dot{r}(0)=-a+a=0$$

$$\ddot{r}=\{-2\sin t-t\cos t,\ -2\cos t+t\sin t,\ 0\}$$

$$\ddot{r}(0)=\{0,\ -2,\ 0\}$$

$$n\ddot{r}(0)=0$$

$$\dddot{r}=\{-3\cos t+t\sin t\ \ 3\sin t+t\cos t,\ 0\}$$

$\ddot{r}(0)=\{-3,\ 0,\ 0\}$

$n\ddot{r}(0)=3a\neq 0$

∴曲线与平面在 $t=0$ 处有二阶切触.

19.（1）（解）令，$x=x$，则 $y=\dfrac{x^3}{3a^2}$，$z=\dfrac{a^2}{2x}$

即 $r=\left\{x,\ \dfrac{x^3}{3a^2},\ \dfrac{a^2}{2x}\right\}$

从而 $\dot{r}=\left\{1,\dfrac{x^2}{a^2},\ -\dfrac{a^2}{2x^2}\right\}$

$|\dot{r}|=\dfrac{2x^4+a^4}{2a^2x^2}$

$\therefore\ \tau=\dfrac{\dot{r}}{|\dot{r}|}=\left\{\dfrac{2a^2x^2}{2x^4+a^4},\ \dfrac{2x^4}{2x^4+a^4},\ -\dfrac{a^4}{2x^4+a^4}\right\}$

又因 $\ddot{r}=\left\{0,\dfrac{2x}{a^2},\ \dfrac{a^2}{x^3}\right\}$

$\dot{r}\times\ddot{r}=\left\{\dfrac{2}{x},\ -\dfrac{a^2}{x^3},\ \dfrac{2x}{a^2}\right\}$

$|\dot{r}\times\ddot{r}|=\dfrac{2x^4+a^4}{a^2x^3}\quad(x>0)$

$\therefore\ \beta=\left\{\dfrac{2a^2x^2}{2x^4+a^4},\ -\dfrac{a^4}{2x^4+a^4},\ \dfrac{2x^4}{2x^4+a^4}\right\}$

$v=\beta\times\tau=\left\{\dfrac{2x^4-a^4}{2x^4+a^4},\ -\dfrac{2a^2x^2}{2x^4+a^4},\ -\dfrac{2a^2x^2}{2x^4+a^4}\right\}$

（2）（解）∵ $\dot{r}=\{-3\cos^2t\sin t,\ 3\sin^2t\cos t,\ -2\sin 2t\}$

$|\dot{r}|=5\cos t\sin t$

$\tau=\left\{-\dfrac{3}{5}\cos t,\ \dfrac{3}{5}\sin t,\ -\dfrac{4}{5}\right\}$

$$\tau = \left\{\frac{3}{5}\sin t,\ \frac{3}{5}\cos t,\ 0\right\}$$

$$\tau \times \dot{\tau} = \left\{\frac{12}{25}\cos t,\ -\frac{12}{25}\sin t,\ -\frac{9}{25}\right\}$$

$$|\tau \times \dot{\tau}| = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \beta = \left\{\frac{4}{5}\cos t,\ -\frac{4}{5}\sin t,\ -\frac{3}{5}\right\}$$

$$v = \beta \times \tau = \{\sin t,\ \cos t,\ 0\}$$

（3） （解）当 $x=y=z=0$时，$t=0$。

$$\dot{r}(0) = \{\sin t + t\cos t,\ \cos t - t\sin t,\ e^t + te^t\}_{t=0}$$

$$= \{0,\ 1,\ 1\}$$

$$\tau_0 = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0,\ 1,\ 1\}$$

$$\ddot{r}(0) = \{2,0,\ 2\}$$

$$\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0) = \{2,\ 2,\ -2\}$$

$$|\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)| = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,\ 1,\ -1\}$$

$$v_0 = \beta_0 \times \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\{2,\ -1,\ 1\}$$

20. （1） （解）当$x=1$ $y=z=0$时，$t=0$。

∵曲线的切向量为

$$\dot{r} = \{-\sin t,\ \cos t,\ 1\}$$

$$\therefore\ \dot{r}(0) = \{0,\ 1,\ 1\}$$

设曲线在点(1,0,0) 处的切线上任意点的坐标为（ξ，η，ζ），且在此点的法平面上任一点的坐标为（X，Y，Z），则曲线在此点的切线方程为

$$\frac{\xi-1}{0} = \frac{\eta}{1} = \frac{\zeta}{1}$$

在此点的法平面方程为

$$Y+Z=0$$

（2）（解）∵曲线在 $t=0$处的切向量为

$$\dot{r}(0)=\{e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t\sin t+e^t\cos t,\ e^t\}_{t=0}$$

$$=\{1,\ 1,\ 1\}$$

当 $t=0$时，曲线上的点坐标为 $(1,0,1)$。设此点处的切线上任意点的坐标为 $(\xi,\ \eta,\zeta)$，此点处的法平面上任一点的坐标为 $(X,\ Y,\ Z)$，从而曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{\xi-1}{1}=\frac{\eta}{1}=\frac{\zeta-1}{1}$$

该点处的法平面方程为

$$X-1+Y+Z-1=0$$

即 $$X+Y+Z-2=0$$

（3）（解）令 $F=x^2-2az=0$

$$G=y^2-2bz=0$$

于是 $F_x=2x,\ F_y=0,\ F_z=-2a$

$$G_x=0,\ G_y=2y,\ G_z=-2b$$

∴曲线在P_0点的切向量为

$$\{ay_0,\ bx_0,\ x_0y_0\}$$

设曲线在P_0点的切线上任一点的坐标为$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，在P_0点法平面上任一点的坐标为 $(X,\ Y,\ Z)$，从而曲线在该点的切线方程为

$$\frac{\xi-x_0}{ay_0}=\frac{\eta-y_0}{bx_0}=\frac{\zeta-z_0}{x_0y_0}$$

在该点处的法平面方程为

$$ay_0(X-x_0)+bx_0(Y-y_0)+x_0y_0(Z-z_0)=0.$$

（4）（解）令$F=x^2+y^2+z^2-1=0$

$$G = x^2 + y^2 - x = 0$$

于是 $F_x = 2x \quad F_y = 2y \quad F_z = 2z$

$G_x = 2x - 1 \quad G_y = 2y \quad G_z = 0$

∴曲线在点(0,0, 1)的切向量为

$\{-4yz,\ 4xz - 2z,\ 2y\}_{(0,0,1)}$

$= \{0,\ -2,\ 0\}$,可取 $\{0,\ 1,\ 0\}$.

设曲线在(0,0,1)点的切线上任一点的坐标为 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，在该点法平面上任一点的坐标为 $(X,\ Y,\ Z)$. 从而曲线在该点的切线方程为

$$\frac{\xi}{0} = \frac{\eta}{1} = \frac{\zeta - 1}{0} \qquad \text{或}\begin{cases}\xi = 0\\ \zeta = 1\end{cases}$$

在该点处的法平面方程为

$$Y = 0$$

21. (1) (解) 当 $x = 1\ y = z = 0$时, $\theta = 0$

∵ $\dot{r}(0) = \{-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 1\}_{\theta=0} = \{0,\ 1, 1\}$

$\ddot{r}(0) = \{-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 0\}_{\theta=0} = \{-1,\ 0,\ 0\}$

∴副法线的方向向量为

$\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0) = \{0,\ -1,\ 1\}$

主法线的方向向量为

$[\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)] \times \dot{r}(0) = \{-2,\ 0,\ 0\}$,可取$\{1,\ 0,\ 0\}$.

设曲线在点(1,0,0,)的副法线和主法线上任意点的坐标分别为 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, $(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})$, 在该点的密切面和从切面上任意点的坐标分别为 $(X,\ Y,\ Z)$、$(\bar{X},\ \bar{X},\ \bar{Z})$, 从而曲线在该点的副法线方程为

$$\frac{\xi - 1}{0} = \frac{\eta}{-1} = \frac{\zeta}{1}$$

在该点的主法线方程为

$$\frac{\overline{\xi}-1}{1}=\frac{\overline{\eta}}{0}=\frac{\overline{\zeta}}{0}$$

在该点的密切面方程为

$$Y-Z=0$$

在该点的从切面方程为

$$\overline{X}-1=0$$

（2）（解）当 $x=y=z=0$时，$t=0$。

∵ $\dot{r}(0)=\{a,\ 2bt,\ 3ct^2\}_{t=0}=\{a,\ 0,\ 0\}$

$\ddot{r}(0)=\{0,\ 2b,\ 6ct\}_{t=0}=\{0,\ 2b,\ 0\}$

∴副法线的方向向量为，

$\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)=\{0,\ 0,\ 2ab\}$，可取 $\{0,\ 0,\ 1\}$。

主法线的方向向量为

$[\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)]\times\dot{r}(0)=\{0,\ 2a^2b,\ 0\}$，可提$\{0,\ 1,\ 0\}$。

设该点的副法线、主法线、密切面及从切面上任意点的坐标分别为$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，$(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ \overline{\zeta})$、$(X,\ Y,\ Z)$、$(\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z})$。从而曲线在该点的副法线方程为

$$\frac{\xi}{0}=\frac{\eta}{0}=\frac{\zeta}{1}$$

在该点的主法线方程为

$$\frac{\overline{\xi}}{0}=\frac{\overline{\eta}}{1}=\frac{\overline{\zeta}}{0}$$

在该点的密切面方程为

$$Z=0$$

在该点的从切面方程为

$$\overline{Y}=0$$

（3）（解） $t=0$时，曲线上的点为$(1,1,0)$。

$\because$ $\dot{r}(0)=\{e^t,\ -e^{-t},\ \sqrt{2}\}_{t=0}=\{1,\ -1,\ \sqrt{2}\}$

$\ddot{r}(0)=\{e^t,\ e^{-t},\ 0\}_{t=0}=\{1,\ 1,\ 0\}$

$\therefore$副法线的方向向量为

$\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)=\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\}$，可取 $\{-1,1,\ \sqrt{2}\}$

主法线的方向向量为

$[\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)]\times\dot{r}(0)=\{4,\ 4,\ 0\}$，可取 $\{1,\ 1,\ 0\}$。

设过点$(1,1,0)$ 的副法线、主法线、密切面及从切面上的任意点的坐标分别为 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$、$(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ \overline{\zeta})$ 、及 $(X,\ Y,\ Z)$、$(\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z})$。于是曲线在该点的副法线方程为

$$\frac{\xi-1}{-1}=\frac{\eta-1}{1}=\frac{\zeta}{\sqrt{2}}$$

在该点的主法线方程为

$$\frac{\overline{\xi}-1}{1}=\frac{\overline{\eta}-1}{1}=\frac{\overline{\zeta}}{0}$$

在该点的密切面方程为

$$X-Y-\sqrt{2}Z=0$$

在该点的从切面方程为

$$\overline{X}+\overline{Y}-2=0$$

22. （解）设 $(X,\ Y,\ Z)$ 为密切面上任意一点。

$\because$ $\dot{r}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ c\}$

$\ddot{r}=\{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\}$

$\therefore$密切面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-a\cos t & Y-a\sin t & Z-ct \\ -a\sin t & a\cos t & c \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=0$$

即 $\qquad c\sin tX - c\cos tY + aZ = act$

∴此平面与 z 轴的交点为 $(0, 0, ct)$.

23. （解）设 (X, Y, Z) 为曲线在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的密切面上的任意一点. $t=\frac{\pi}{2}$ 时，曲线上的点为 $(b, a, 0)$.

$$\because \dot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\{-a\sin t+b\cos t, a\cos t-b\sin t, 2c\cos 2t\}_{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\{-a, -b, -2c\}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\{-a\cos t-b\sin t, -a\sin t-b\cos t, -4c\sin 2t\}_{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\{-b, -a, 0\}$$

∴曲线在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的密切面方程为

$$\begin{vmatrix} X-b & Y-a & Z \\ -a & -b & -2c \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}=0$$

即 $\qquad 2acX-2bcY-(a^2-b^2)Z=0$

24. （解）先求单位副法线.

$$\because \dot{\boldsymbol{r}}=\{-\cos\alpha\sin t, \cos\alpha\cos t, \sin\alpha\}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\{-\cos\alpha\cos t, -\cos\alpha\sin t, 0\}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\{\sin\alpha\cos\alpha\sin t, -\sin\alpha\cos\alpha\cos t, \cos^2\alpha\}$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|=|\cos\alpha|$$

$$\therefore \boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}=\{\sin\alpha\sin t, -\sin\alpha\cos t, \cos\alpha\}$$

新曲线为

$$\rho=\boldsymbol{r}+\beta=\{\cos(t-\alpha), \sin(t-\alpha), t\sin+\cos\alpha\}$$

$$\because \dot{\rho}=\{-\sin(t-\alpha), \cos(t-\alpha), \sin\alpha\}$$

$$\ddot{\rho}=\{-\cos(t-\alpha), -\sin(t-\alpha), 0\}$$

∴新曲线的密切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X-\cos(t-\alpha) & Y-\sin(t-\alpha) & Z-(t\sin\alpha+\cos\alpha) \\ -\sin(t-\alpha) & \cos(t-\alpha) & \sin\alpha \\ -\cos(t-\alpha) & -\sin(t-\alpha) & 0 \end{vmatrix}=0$$

即 $\sin\alpha\sin(t-\alpha)\chi-\sin\alpha\cos(t-\alpha)Y+Z-(t\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

25. （证明）∵曲线的切向量为

$$\dot{r}=\{\dot{f}(t),\ \dot{g}(t),\ c\sqrt{\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)}\}$$

z 轴的方向向量为 $k=\{0,\ 0,\ 1\}$.

设 $\dot{r}$ 与k 的夹角为 θ，则有

$$\cos\theta=\frac{k\cdot\dot{r}}{|k|\ |\dot{r}|}=\frac{c\sqrt{\dot{f}^2(t)+{}^2\dot{g}(t)}}{\sqrt{(c^2+1)(\dot{f}^2(t)+\dot{g}^2(t)}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

∴ θ 为定角.

26. （证明）∵曲线的切向量为

$$\dot{r}=\{3,\ 6t,\ 6t^2\}$$

直线 $y=z-x=0$ 的方向向量为

$$a=\{1,\ 0,\ 1\}$$

设 $\dot{r}$ 与 a 的夹角为θ,则有

$$\cos\theta=\frac{a\cdot\dot{r}}{|a|\ |\dot{r}|}=\frac{3+6t^2}{\sqrt{2}(3+6t^2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

即 $\theta=45°$

27. （证明）取螺旋线轴的方向向量为 $k=\{0,\ 0,\ 1\}$.

（1）∵切线的方向向量为

$$\dot{r}=\{-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ b\}$$

∴切线与轴的夹角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{k\cdot\dot{r}}{|k|\ |\dot{r}|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

即切线与轴交成定角.

（2）∵副法线的方向向量为

$$\dot{r}\times\ddot{r}=\{b\sin\theta,\ -b\cos\theta,\ a\}$$

∴副法线与轴的交角 ψ 满足

$$\cos\psi=\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\dot{r}\times\ddot{r})}{|\boldsymbol{k}|\ |\dot{r}\times\ddot{r}|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

即副法线与轴交成定角。

（3）∵主法线的方向向量为

$$(\dot{r}\times\ddot{r})\times\dot{r}=\{-(a^2+b^2)\cos\theta,\ -(a^2+b^2)\sin\theta,\ 0\}$$

而 $\boldsymbol{k}\cdot[(\dot{r}\times\ddot{r})\times\dot{r}]=0$

∴主法线与轴垂直，又因圆柱螺线的轴与主法线共面，故相交。

28. （证明）先求圆柱螺线的副法向量。

∵ $\dot{r}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$

$\ddot{r}=\{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\}$

∴副法向量为

$\dot{r}\times\ddot{r}=\{ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2\}$. 可取 $\{b\sin t,$
$-b\cos t,\ a\}$.

设副法线上任意点的坐标为 (X, Y, Z)，则所求副法线方程为

$$\frac{X}{b\sin t}=\frac{Y}{-b\cos t}=\frac{Z}{a}$$

或
$$\begin{cases}aX=b\sin tZ & ①\\ aY=-b\cos tZ & ②\end{cases}$$

将①、②两边平方后相加，即消去参数t，得锥面方程

$$a^2(X^2+Y^2)=b^2Z^2.$$

29. （证明）设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

由数学分析隐函数存在定理知，存在可微函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$。

∴球面曲线上任意一点 (x, y, z) 的切向量为 $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$

设在这点的法平面上任意点的坐标为 (X, Y, Z)，则在该点的法平面方程为

$$\dot{x}(X-x)+\dot{y}(Y-y)+\dot{z}(Z-z)=0$$

或 $$\dot{x}X+\dot{y}Y+\dot{z}Z-(\dot{x}x+\dot{y}y+\dot{z}z)=0$$

又因为，对 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 两边求导，有

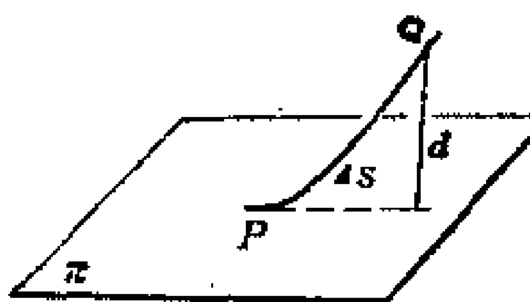
$$2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}=0$$

即 $$\dot{x}x+\dot{y}y+\dot{z}z=0$$

∴法平面方程为 $\dot{x}X+\dot{y}Y+\dot{z}Z=0$。此平面通过原点，即通过球心。

30. （证明）由题意已知

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{d}{(\Delta S)^3}\neq 0$$



题解答30

∴曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 与平面 π 在点 $P(s)$ 处有二阶切触。

设平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$ 则有 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'=0$，$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}''=0$，$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'''\neq 0$

设 ρ 为平面 π 上任意点的流动向径，则有

$$\pi:\ \boldsymbol{n}\cdot[\rho-\boldsymbol{r}(s_0)]=0 \quad (\boldsymbol{r}(s_0)\text{为 } P(s) \text{ 点的向径})$$

又由 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'=0$，$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}''=0$ 知 $\boldsymbol{n}$ 的方向向量即为 $\boldsymbol{r}(s)$ 在 $P(s)$ 点的副法线向量方向。

∴平面 π 是该曲线在 $P(s)$ 点的密切面。

31. （证明）设曲线为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$P$、$Q$、$R$ 点的向径分别为 $\boldsymbol{r}(s_0)$、$\boldsymbol{r}(s_1)$、$\boldsymbol{r}(s_2)$，由泰勒公式

$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{r}(s_1) - \boldsymbol{r}(s_0) = \boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s_0)$

$= \boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s + \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}''(s_0) + \boldsymbol{\varepsilon}](\Delta s)^2$ 其中$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$

$\overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r}(s_2) - \boldsymbol{r}(s_0) = \boldsymbol{r}(s_0 + \lambda\Delta s) - \boldsymbol{r}(s_0)$

$= \boldsymbol{r}'(s_0)(\lambda\Delta s) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}''(s_0) + \delta](\lambda\Delta s)^2$其中$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\delta = 0$

∵平面过点 P、Q、R，故平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行于

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \frac{\lambda^2}{2}\boldsymbol{r}'(s_0) \times [\boldsymbol{r}''(s_0) + \delta]\ (\Delta s)^3 - \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{r}'(s_0)$

$\times[\boldsymbol{r}''(s_0) + \boldsymbol{\varepsilon}]\Delta s^3 + \frac{\lambda^2(\Delta S)^4}{4}[(\boldsymbol{r}''(s_0) + \varepsilon) \times (\boldsymbol{r}''(s_0) + \delta)]$

即 $\boldsymbol{n}$ 平行于

$\lambda\{\boldsymbol{r}'(s_0) \times [\boldsymbol{r}''(s_0) + \delta]\} - \boldsymbol{r}'(s_0) \times [\boldsymbol{r}''(s_0) + \boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{\lambda\Delta s}{2}[(\boldsymbol{r}''(s_0)$

$+ \varepsilon) \times (\boldsymbol{r}''(s_0) + \delta)]$

当 Q、R沿曲线趋于 P 时，$\Delta s \to 0$，上式的极限为$(\lambda - 1)[\boldsymbol{r}'(s_0) \times \boldsymbol{r}''(s_0)]$，于是平面的法向量就被 $\boldsymbol{r}'(s_0) \times \boldsymbol{r}''(s_0)$ 完全确定．故这时平面即为曲线在点P 的密切平面．

32．（证明）设曲线在 P_0 处的密切面的法向量为 $\boldsymbol{n}$．

$\because\ \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \times \boldsymbol{r}^{(i)}(t_0) = 0 \qquad i = 2,\ 3,\ \cdots m - 1$

又因密切面的法向量可用 $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \times \boldsymbol{r}^{(m)}(t_0)$确定，

即 $\qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \times \boldsymbol{r}^{(m)}(t_0) = \lambda\boldsymbol{n}$．

$\therefore\ \ \boldsymbol{n} \perp \dot{\boldsymbol{r}}(t_0),\ \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{r}^{(m)}(t_0)$

从而 $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$，$\boldsymbol{r}^{(m)}(t_0)$平行于曲线在 P_0 点的密切平面．

33．（解）$\because\ \ \boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}') = k\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}') = k(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = 0$

$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{v}',\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}') = 0$

$\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}') = \chi - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}') = -\chi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = 0$

$\therefore\ \boldsymbol{\tau}'$、$\boldsymbol{v}'$、$\boldsymbol{\beta}'$ 都垂直于$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}'$

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} \times (-k\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta}) = -k(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\tau}) + \chi(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\beta})$

$= -k(-\beta)+\chi\tau = v\tau + k\beta$

34. (证明)（1）$\because -\tau'\beta' = -(kv)(-\chi v) = k\chi$

$\therefore k\chi = -\tau'\beta'$

（2）$\because (r', r'', r''') = (\tau, \tau', \tau'')$

$= (\tau, kv, k'v + kv')$

$= (\tau, kv, k'v) + (\tau, kv, kv')$

$= (\tau, kv, -k^2\tau + k\chi\beta)$

$= (\tau, kv, k\chi\beta)$

$= k^2\chi(\tau, v, \beta)$

$= k^2\chi.$

35. (证明)

$\because r^{(n-1)} = a'_n\tau + a_n\tau' + b'_n v + b_n v' + c'_n\beta + c_n\beta'$

$= a'_n\tau + a_n kv + b'_n v + b_n(-k\tau + \chi\beta) + c'_n\beta + c_n(-\chi v)$

$= (a'_n - kb_n)\tau + (a_n k + b'_n - c_n\chi)v + (c'_n\chi + b_n\chi)\beta$

$\therefore a_{n+1} = a'_n - kb_n \quad b_{n+1} = b'_n + ka_n - \chi c_n \quad c_{n+1} = c'_n + \chi b_n$

36. (证明) 设满足与曲线 $r = r(s)$在P_0有二阶切触的平面为 π，其法向量为 n，ρ 为平面π上的流动向径。由题意有

π: $n[\rho - r(s_0)] = 0$, 且有 $nr'(s_0) = 0$, $nr''(s_0) = 0$

$\because r'(s_0) = \tau(s_0)$, $r''(s_0) = \kappa v(s_0)$

$\therefore n\tau(s_0) = 0$, $n\kappa v(s_0) = 0$

从而 $\tau(s_0)$, (vs_0) 都在平面 π 上，故n与 $\beta(s_0)$ 共线。

$\therefore$ π 为曲线在 P_0点处的密切面。

37. (1) (证明)

$\because \tau' = \kappa v$

$$\tau'' = \kappa'\nu + \kappa\nu' = \kappa'\nu - \kappa^2\tau + \kappa\chi\beta$$

$$\tau''' = \kappa''\nu + \kappa'\nu' - 2\kappa\kappa'\tau - \kappa^2\tau' + \kappa'\chi\beta + \chi'\kappa\beta + \kappa\chi\beta'$$

$$= \kappa''\nu - \kappa\kappa'\tau + \kappa'\chi\beta - 2\kappa\kappa'\tau - \kappa^3\nu + \kappa'\chi\beta + \chi'\kappa\beta - \kappa\chi^2\nu =$$

$$-3\kappa\kappa'\tau + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\chi^2)\nu + (2\kappa'\chi + \chi'\kappa)\beta$$

$$\therefore\ (\tau',\ \tau'',\ \tau''') = \begin{vmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2 & \kappa' & \kappa\chi \\ -3\kappa\kappa' & \kappa'' - \kappa^3 - \kappa\chi^2 & 2\kappa'\chi + \chi'\kappa \end{vmatrix}$$

$$= \kappa(\kappa^3\chi' - \kappa^2\chi\kappa')$$

$$= \kappa^3(\kappa\chi' - \chi\kappa')$$

而 $$\kappa^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\chi}{\kappa}\right) = \kappa^5 \frac{\chi'\kappa - \kappa'\chi}{\kappa^2}$$

$$= \kappa^3(\kappa\chi' - \kappa'\chi)$$

$$\therefore\ (\tau',\ \tau'',\ \tau''') = \kappa^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)$$

（2）（证明）

$$\because\ \beta' = -\chi\nu$$

$$\beta'' = -\chi'\nu - \chi\nu' = \chi\kappa\tau - \chi'\nu - \chi^2\beta$$

$$\beta''' = -\chi''\nu - \chi'\nu + \chi'\kappa\tau + \kappa'\chi\tau + \chi\kappa\tau' - 2\chi'\beta - \chi^2\beta'$$

$$= -\chi''\nu + \chi'\kappa\tau - \chi'\beta + \chi'\kappa\tau + \kappa'\chi\tau + \chi\kappa^2\nu - 2\chi\chi'\beta + \chi^3\nu$$

$$= (2\chi'\kappa + \kappa'\chi)\tau + (\chi^3 + \chi\kappa^2 - \chi'')\nu - 3\chi\chi'\beta$$

$$\therefore\ (\beta', \beta'', \beta''') = \begin{vmatrix} 0 & -\chi & 0 \\ \chi\kappa & -\chi' & -\chi^2 \\ 2\chi'\kappa + \kappa'\chi & \chi^3 + \chi\kappa^2 - \chi'' & -3\chi\chi' \end{vmatrix}$$

$$= \chi(-3\kappa\chi^2\chi' + 2\kappa\chi^2\chi' + \kappa'\chi^3)$$

$$= \chi^3(-\kappa\chi' + \kappa'\chi)$$

而 $$\chi^5 \frac{d\chi}{ds}\left(\frac{\kappa}{\chi}\right) = \chi^5\frac{\kappa'\chi - \kappa\chi'}{\chi^2} = \chi^3(\kappa'\chi - \kappa\chi')$$

$\therefore (\beta', \beta'', \beta''') = \chi^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{\chi}\right)$

38. (1) (解) $\because \dot{r} = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ c\}$

$\ddot{r} = \{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\}$

$\dot{r} \times \ddot{r} = \{ac\sin t,\ ac\cos t,\ a^2\}$

$|\dot{r}| = \sqrt{a^2 + c^2}$

$|\dot{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{a^2(a^2 + c^2)} = a\sqrt{a^2 + c^2}$

$$\therefore \kappa = \frac{a\sqrt{a^2 + c^2}}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

(2) (解) $\because \dot{r} = \{1 - \cos t,\ \sin t,\ 1\}$

$\ddot{r} = \{\sin t,\ \cos t,\ 0\}$

$\dot{r} \times \ddot{r} = \{-\cos t,\ \sin t,\ \cos t - 1\}$

$|\dot{r}| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 1}$

$= \sqrt{1 + 2(1 - \cos t)}$

$|\dot{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{1 + (1 - \cos t)^2}$

$$\therefore \kappa = \frac{\sqrt{1 + (1 - \cos t)^2}}{(\sqrt{1 + 2(1 - \cos t)})^3} = \frac{\left(1 + 4\sin^4 \frac{t}{2}\right)^{1/2}}{\left(1 + 4\sin^2 \frac{t}{2}\right)^{3/2}}$$

(3) (解) $\because \dot{r} = \{a\,\mathrm{sh}t,\ a\,\mathrm{ch}t,\ a\}$

$\ddot{r} = \{a\,\mathrm{ch}t,\ a\,\mathrm{sh}t,\ 0\}$

$\dot{r} \times \ddot{r} = \{-a^2\mathrm{sh}t,\ a^2\mathrm{ch}t,\ -a^2\}$

$|\dot{r}| = \sqrt{2}\,a\,\mathrm{ch}t,\quad |\dot{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{2}\,a^2\mathrm{ch}t$

$$\therefore \kappa = \frac{\sqrt{2}\,a^2\mathrm{ch}t}{2\sqrt{2}\,a^3\mathrm{ch}^3 t} = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$$

(4) (解) 当 $x = y = z = 0$ 时，$t = 0$

$\because\ \dot{r}(0)=\{\sin t+t\cos t,\ \cos t-t\sin t,\ e^t+te^t\}_{t=0}$

$=\{0,\ 1,\ 1\}$

$\ddot{r}(0)=\{2\cos t-t\sin t,\ -2\sin t-t\cos t,\ 2e^t+te^t\}_{t=0}$

$=\{2,\ 0,\ 2\}$

$\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)=\{2,\ 2,\ -2\}$

$|\dot{r}(0)|=\sqrt{2},\qquad |\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)|=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \kappa=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（5） （解）

$\because\ \dot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\{-3\cos^2t\sin t,\ 3\sin^2t\cos t,\ -2\sin 2t\}_{t=\frac{\pi}{4}}$

$=\left\{-\dfrac{3}{4}\sqrt{2},\ \dfrac{3}{4}\sqrt{2},\ -2\right\}$

$\ddot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\{9\sin^2t\cos t-3\cos t,\ 9\cos^2t\sin t-3\sin t,$

$-4\cos 2t\}_{t=\frac{\pi}{4}}$

$=\left\{\dfrac{3}{4}\sqrt{2},\ \dfrac{3}{4}\sqrt{2},\ 0\right\}$

$\dot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\ddot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left\{\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\ -\dfrac{9}{4}\right\}$

$\left|\dot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{5}{2},\qquad \left|\dot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\ddot{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{15}{4}$

$\therefore\ \kappa=\dfrac{\dfrac{15}{4}}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^3}=\dfrac{6}{25}$

（6） （解）将原方程化为参数形式

令 $x=x$，则 $y=\dfrac{x^3}{3a^2}$，$z=\dfrac{a^2}{2x}$。

即 $\quad \boldsymbol{r} = \left\{x,\ \dfrac{x^3}{3a^2},\ \dfrac{a^2}{2x}\right\}$

$\because \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \left\{1, \dfrac{x^2}{a^2},\ -\dfrac{a^2}{2x^2}\right\}$

$\quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \left\{0, \dfrac{2x}{a^2},\ \dfrac{a^2}{x^3}\right\}$

$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \left\{\dfrac{2}{x},\ -\dfrac{a^2}{x^3},\ \dfrac{2x}{a^2}\right\}$

$|\dot{\boldsymbol{r}}| = \dfrac{2x^4 + a^4}{2a^2x^2} \qquad |\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}| = \dfrac{2x^4 + a^4}{a^2x^3}$

$\therefore \ \kappa = \dfrac{2x^4 + a^4}{a^2x^3} \Big/ \left(\dfrac{2x^4 + a^4}{2a^2x^2}\right)^3 = \dfrac{8a^4x^3}{(2x^4 + a^4)^2}$

39. （证明）

$\because \quad \kappa^2 = \left(\dfrac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}\right)^2 = \dfrac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}{(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2)^3}$

而 $\quad |\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2 = (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}})(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = [(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times \dot{\boldsymbol{r}}]\ddot{\boldsymbol{r}}$

$\qquad = [(\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}})\ddot{\boldsymbol{r}} - (\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}]\ddot{\boldsymbol{r}}$

$\qquad = (\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}})(\ddot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}) - (\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})$

$\qquad = (\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}})(\ddot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}) - (\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})^2$

$(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2)^3 = (|\dot{\boldsymbol{r}}||\dot{\boldsymbol{r}}|)^3 = (\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}})^3$

$\therefore \ \kappa^2 = \dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}})(\ddot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}) - (\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})^2}{(\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}})^3}$

40. （解）$\because \ \dot{\boldsymbol{r}} = \{f(t)\sin t,\ f(t)\cos t,\ f(t)\operatorname{tg} t\}$

$\ddot{\boldsymbol{r}} = \{\dot{f}(t)\sin t + f(t)\cos t, \dot{f}(t)\cos t - f(t)\sin t, \dot{f}(t)\operatorname{tg} t + f(t)\sec^2 t\}$

$= \{\dot{f}(t)\sin t,\ \dot{f}(t)\cos t,\ \dot{f}(t)\operatorname{tg} t\} + \{f(t)\cos t, -f(t)\sin t,\ f(t)\sec^2 t\}$

$\dot{r} \times \ddot{r} = \{f(t)\sin t,\ f(t)\cos t,\ f(t)\mathrm{tg}t\} \times \{f(t)\cos t,\ -f(t)\sin t,\ f(t)\sec^2 t\}$

$$= \left\{f^2(t)\frac{1+\sin^2 t}{\cos t},\quad f^2(t)\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t},\quad -f^2(t)\right\}$$

$|\dot{r}| = f(t)\sec t$

$|\dot{r} \times \ddot{r}| = f^2(t)\sec^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}$

$$\therefore\ k = \frac{f^2(t)\sec^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}}{f^3(t)\sec^3 t} = \frac{\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}}{f(t)}$$

若 $k = c$（常数）　$(c \neq 0)$

则
$$f(t) = \frac{1}{c}(\cos t\sqrt{1+\cos^2 t})$$

41.（解）先确定此曲线的主法线方向。

$\because\ \dot{r} = \{1,\ \cos t,\ \dot{\varphi}(t)\}$

$\ddot{r} = \{0,\ -\sin t,\ \ddot{\varphi}(t)\}$

$\dot{r} \times \ddot{r} = \{\cos t\ddot{\varphi}(t) + \sin t\dot{\varphi}(t),\ -\ddot{\varphi}(t),\ -\sin t\}$

故主法线方向为

$(\dot{r} \times \ddot{r}) \times \dot{r} = \{\cos t\sin t - \dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t),\ -(\cos t\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) + \sin t\dot{\varphi}^2(t) + \sin t),\ \cos^2 t\ddot{\varphi}(t) + \cos t\sin t\dot{\varphi}(t) + \ddot{\varphi}(t)\}$

由主法线平行yz面的条件知主法向量与 x 轴垂直，故有

$$\cos t\sin t - \dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) = 0$$

即
$$\cos t\sin t = \dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t)$$

用分离变量法解上述微方程。

令 $y(t) = \dot{\varphi}(t)$，则

$$y\frac{dy}{dt} = \sin t\cos t$$

$\therefore\ \ y dy = \sin t\cos t dt$

积分
$$\int y dy = \int \sin t\cos t dt$$

或 $$\int y dy=\int \sin t d\sin t$$

$\therefore \quad y=\dot{\varphi}(t)=\sin t$

从而 $$\varphi(t)=\int \sin t dt=-\cos t+c$$

因此可取 $\varphi(t)=-\cos t$。

42. （证明）设曲线为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，定点的向径为 $\boldsymbol{\rho}_0$，则曲线上任一点的切线都满足：

$$\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{r}(s)=\lambda\boldsymbol{\tau}(s)$$

对上式两端求导，有

$$-\boldsymbol{r}'(s)=\lambda\boldsymbol{\tau}'(s)=\lambda\boldsymbol{r}''(s)$$

即 $\quad \boldsymbol{r}'(s) \parallel \boldsymbol{r}''(s)$

$\therefore \boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)=0$

从而 $\quad \kappa=0$，曲线为直线。

43. （证明）设曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在任意点的切线为 $\overline{\boldsymbol{r}}(t)$。

$\because$ 切线与曲线有二阶切触，

$\therefore \dot{\overline{\boldsymbol{r}}}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t),\quad \ddot{\overline{\boldsymbol{r}}}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$。

又因 $\overline{\boldsymbol{r}}(t)$为具有固定方向的变向量，所以有

$$\dot{\overline{\boldsymbol{r}}}\times\ddot{\overline{\boldsymbol{r}}}=0$$

从而 $\quad \dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=0$

即 $\quad \kappa=0$，曲线是直线。

44. （1）（解）$\because \dot{\boldsymbol{r}}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ c\}$

$\ddot{\boldsymbol{r}}=\{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\}$

$\dddot{\boldsymbol{r}}=\{a\sin t,\ -a\cos t,\ 0\}$

$\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\{ac\sin t,\ ac\cos t,\ a^2\}$

$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})=a^2c$

$$|\dot{r}\times\ddot{r}|=\sqrt{a^2(a^2+c^2)}$$

$$\therefore \chi=\frac{a^2c}{a^2(a^2+c^2)}=\frac{c}{a^2+c^2}$$

（2）（解）$\because$ $\dot{r}=\{1-\cos t,\ \sin t, 1\}$

$$\ddot{r}=\{\sin t,\ \cos t,\ 0\}$$

$$\dddot{r}=\{\cos t,\ -\sin,\ 0\}$$

$$(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r})=-1$$

$$\dot{r}\times\ddot{r}=\{-\cos t,\ \sin t,\ \cos t-1\}$$

$$|\dot{r}\times\ddot{r}|=\sqrt{1+(1-\cos t)^2}$$

由挠率公式可知

$$\therefore \chi=\frac{-1}{1+(1-\cos t)^2}=-\frac{1}{1+4\sin^4\frac{t}{2}}$$

（3）（解）$\because$ $\dot{r}=\{a\operatorname{sh}t,\ a\operatorname{ch}t,\ a\}$

$$\ddot{r}=\{a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ 0\}$$

$$\dddot{r}=\{a\operatorname{sh}t,\ a\operatorname{ch}t,\ 0\}$$

$$(\dot{r}\ddot{r}\dddot{r})=a^3$$

$$\dot{r}\times\ddot{r}=\{-a^2\operatorname{sh}t,\ a^2\operatorname{ch}t,\ -a^2\}$$

$$|\dot{r}\times\ddot{r}|=\sqrt{2}\,a^2\operatorname{ch}t$$

$$\therefore \chi=\frac{a^3}{2a^4\operatorname{ch}^2t}=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2t}$$

（4）（解）当 $x=y=z=0$时，　$t=0$

$\because$ $\dot{r}(0)=\{0,\ 1,\ 1\}$

$$\ddot{r}(0)=\{2,\ 0,\ 2\}$$

$$\dddot{r}(0)=\{-3\sin t-t\cos t,\ -3\cos t+t\sin t,\ 3e^t+te^t\}_{t=0}=\{0,\ -3,\ 3\}$$

$(\dot{r}(0),\ \ddot{r}(0),\ \dddot{r}(0)) = -12$

$\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0) = \{2,\ 2,\ -2\}$

$|\dot{r}(0)\times\ddot{r}(0)| = 2\sqrt{3}$

$$\therefore\ x = \frac{-12}{(2\sqrt{3})^2} = -1$$

（5）（解）$\because\ \dot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\{-\frac{3}{4}\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\sqrt{2},\ 2\right\}$

$$\ddot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\{\frac{3}{4}\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\sqrt{2},\ 0\right\}$$

$$\dddot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\{\frac{15}{4}\sqrt{2},\ -\frac{15}{4}\sqrt{2},\ 8\right\}$$

$$\left(\dot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \ddot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \dddot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{9}{2}$$

$$\left|\dot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\ddot{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{15}{4}$$

由挠率公式可知

$$\therefore\ x = \frac{\frac{9}{2}}{\left(\frac{15}{4}\right)^2} = \frac{8}{25}$$

（6）将原方程化成参数形式

即 $$r = \left\{x,\ \frac{x^3}{3a^2},\ \frac{a^2}{2x}\right\}$$

$$\because\ \dot{r} = \left\{1,\ \frac{x^2}{a^2},\ -\frac{a^2}{2x^2}\right\}$$

$$\ddot{r} = \left\{0,\ \frac{2x}{a^2},\ \frac{a^2}{x^3}\right\}$$

$$\dddot{r} = \left\{0,\ \frac{2}{a^2},\ -\frac{3a^2}{x^4}\right\}$$

$$(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r}) = -\frac{8}{x^4}$$

$$|\dot{r} \times \ddot{r}| = \frac{2x^4 + a^4}{a^2x^3}$$

$$\therefore \ \chi = -\frac{8}{x^3} \Big/ \left(\frac{2x^4 + a^4}{a^2x^3}\right)^2 = -\frac{8a^4x^3}{(2x^4 + a^4)^2}$$

45. （证明） $\because \ \chi = \dfrac{(\dot{r}, \ \ddot{r}, \ \dddot{r})}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}$

而 $|\dot{r} \times \ddot{r}|^2 = (\dot{r} \times \ddot{r})(\dot{r} \times \ddot{r})$

$$= (\dot{r}\dot{r})(\ddot{r}\ddot{r}) - (\dot{r}\ddot{r})^2$$

$$\therefore \ \chi = \frac{(\dot{r}, \ \ddot{r}, \ \dddot{r})}{(\dot{r}\dot{r})(\ddot{r}\ddot{r}) - (\dot{r}\ddot{r})^2}$$

46. （1） （证明） $\because \ \dot{r} = \{3, \ 6t, \ 6t^2\} = 3\{1, \ 2t, \ 2t^2\}$

$$\ddot{r} = 3\{0, \ 2, \ 4t\} = 6\{0, \ 1, \ 2t\}$$

$$\dddot{r} = 6\{0, \ 0, \ 2\} = 12\{0, \ 0, \ 1\}$$

$\dot{r} \times \ddot{r} = 18\{2t^2, \ -2t, \ 1\}$, $(\dot{r}, \ \ddot{r}, \ \dddot{r}) = 216$

$|\dot{r} \times \ddot{r}| = 18(2t^2 + 1)$, $\qquad |\dot{r}| = 3(2t^2 + 1)$

$$\therefore \ \kappa = \frac{18(2t^2+1)}{27(2t^2+1)^3} = \frac{2}{3(2t^2+1)^2}$$

$$\chi = \frac{216}{18^2(2t^2+1)^2} = \frac{2}{3(2t^2+1)^2}$$

即 $\qquad \kappa = \chi$

（2） （证明）

$$\because \dot{r} = \{4a\sqrt{1-t^2}, \ 4at, \ 4a\} = 4a\{\sqrt{1-t^2}, \ t, \ 1\}$$

$$\ddot{r} = 4a\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, \ 1, \ 0\right\}$$

$$\dddot{r} = 4a\left\{\frac{-1}{(1-t^2)^{3/2}}, \ 0, \ 0\right\}$$

$$\dot{r}\times\ddot{r} = 16a^2\left\{-1,\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right\}$$

$$|\dot{r}| = 4\sqrt{2}a \qquad |\dot{r}\times\ddot{r}| = 16a^2\sqrt{\frac{2}{1-t^2}}$$

$$(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r}) = 64a^3/(1-t^2)^{3/2}$$

$$\therefore\ \kappa = 16a^2\sqrt{\frac{2}{1-t^2}}\Big/(4\sqrt{2}a)^3 = \frac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$$

$$\chi = \frac{64a^3}{(1-t^2)^{3/2}}\Big/\left(16a^2\sqrt{\frac{2}{1-t^2}}\right)^2 = \frac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$$

即 $\kappa = \chi$

（3）（证明）

$$\because\ \dot{r} = \{a(3-3t^2),\ 6at,\ a(3+3t^2)\}$$

$$\ddot{r} = \{-6at,\ 6a,\ 6at\}$$

$$\dddot{r} = \{-6a,\ 0,\ 6a\}$$

$$\dot{r}\times\ddot{r} = 18a^2\{t^2-1,\ 2t,\ 1+t^2\}$$

$$(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r}) = 216a^3$$

$$|\dot{r}| = 3\sqrt{2}a(t^2+1) \qquad |\dot{r}\times\ddot{r}| = 18\sqrt{2}a^2(t^2+1)$$

$$\therefore\ \kappa = \frac{18\sqrt{2}a^2(t^2+1)}{54\sqrt{2}a^3(t^2+1)^3} = \frac{1}{3a(t^2+1)^2}$$

$$\chi = \frac{216a^3}{[18\sqrt{2}a^2(t^2+1)]^2} = \frac{1}{3a(t^2+1)^2}$$

即 $\kappa = \chi$

47.（证明）$\because\ \dot{r} = \{3\sqrt{6}at^2,\ 6at,\ \sqrt{6}a\}$

$$\ddot{r} = \{6\sqrt{6}at,\ 6a,\ 0\}$$

$$\dddot{r} = \{6\sqrt{6}a,\ 0,\ 0\}$$

$$\dot{r}\times\ddot{r} = \{-6\sqrt{6}a^2,\ 36a^2t,\ -18\sqrt{6}a^2t^2\}$$

$$= 6a^2\{-\sqrt{6},\ 6t,\ -3\sqrt{6}t^2\}$$

$$|\dot{r}\times\ddot{r}|=6\sqrt{6}a^2(3t^2+1)$$

$$(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r})=-216a^3$$

$$\therefore \chi=\frac{-216a^3}{216a^4(3t^2+1)^2}=\frac{-a}{a^2(3t^2+1)^2}=-\frac{a}{y^2}$$

48. （证明） $\because\ \dot{r}=\{\text{sh}t,\ 2\text{ch}t,\ e^t\}$

$$\ddot{r}=\{\text{ch}t,\ 2\text{sh}t,\ e^t\}$$

$$\dddot{r}=\{\text{sh}t,\ 2\text{ch}t,\ e^t\}$$

$\therefore\ (\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r})=0$，即 $\chi=0$。

故曲线为平面曲线。

49. （证明）设曲线为 $r=r(t)$，曲线在任意点的切向量为 $\dot{r}(t)$，由于切线与某一平面平行，

$$(\dot{r}(t),\ \ddot{r}(t),\ \dddot{r}(t))=0$$

$\because\ \chi=\dfrac{(\dot{r}(t),\ \ddot{r}(t),\ \dddot{r}(t))}{|\dot{r}(t)\times\ddot{r}(t)|^2}$（若$\dot{r}(t)\times\ddot{r}(t)=0$，结论显然）

$\therefore\ \chi=0$ 即曲线是平面曲线。

50. （证明）设曲线 $r=r(s)$的密切平面为

$[\rho-r(s)]\beta(s)=0$ （ρ为密切面上流动向径）（1）

且过定点 P_0 的向径为 ρ_0。

由题义对于曲线上任一点的密切面均满足

$$[\rho_0-r(s)]\beta(s)=0$$

对上式两边求导，有

$$-r'(s)\beta(s)+[\rho_0-r(s)]\beta'(s)=0$$

即 $[\rho_0-r(s)]\chi\nu(s)=0$

若$[\rho_0-r(s)]\nu(s)=0$，由（1）$[\rho_0-r(s)]\beta(s)=0$，从而必有 $\rho_0-r(s)=\lambda\tau(s)$，即切线均过一定点，故曲线为直线（由题42证得）。

若 $[\rho_0-r(s)]\nu(s)\neq0$，则必有$\chi=0$，即曲线为平面曲线。

综上所述，得证若曲线的密切面都过一定点，则曲线是平

面曲线。

51. （证明）设曲线为 $r=r(s)$，其任意点的密切面为 $[\rho-r(s)]\beta(s)=0$

∵ 密切面与曲线有三阶切触，故有

$$\beta(s)r'(s)=0,\quad \beta(s)r''(s)=0,\quad \beta(s)r'''(s)=0.$$

从而得出 $r'(s)$，$r''(s)$，$r'''(s)$ 共面，即有 $(r'(s),\ r''(s),\ r'''(s))=0$，因此 $\chi=0$。即曲线为平面曲线。

52. （证明）∵ $\dot{\bar{r}}=\frac{1}{\chi}(-\kappa\tau+\chi\beta)-\beta=-\frac{\kappa}{\chi}\tau$

$$\ddot{\bar{r}}=-\frac{\kappa}{\chi}(\kappa\nu)-\frac{\kappa'}{\chi}\tau$$

$$=-\frac{\kappa^2}{\chi}\nu-\frac{\kappa'}{\chi}\tau$$

$$\dddot{\bar{r}}=-\frac{2\kappa\kappa'}{\chi}\nu-\frac{\kappa^2}{\chi}(-\kappa\tau+\chi\beta)$$

$$-\frac{\kappa''}{\chi}\tau-\frac{\kappa'}{\chi}\kappa\nu$$

$$=\left(\frac{\kappa^3-\kappa''}{\chi}\right)\tau-\frac{3\kappa\kappa'}{\chi}\nu-\kappa^2\beta$$

$$\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}=\frac{\kappa^3}{\chi^2}(\tau\times\nu)=\frac{\kappa^3}{\chi^2}\beta.$$

$$|\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}|=\frac{\kappa^3}{\chi^2},\qquad |\dot{\bar{r}}|=\left|\frac{\kappa}{\chi}\right|$$

$$\therefore\quad \bar{\kappa}=\frac{\dfrac{\kappa^3}{\chi^2}}{\left|\dfrac{\kappa}{\chi}\right|^3}=|\chi|$$

又 $(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}}) = -\frac{\kappa^5}{\chi^2}$

$$\therefore \quad \bar{\chi} = \frac{-\frac{\kappa^5}{\chi^2}}{\left(\frac{\kappa^3}{\chi^2}\right)^2} = -\frac{\chi^2}{\kappa}$$

53. （证明）设有一方向一定的单位向量$\boldsymbol{a}$，由题意有

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{\tau} = \cos\theta, \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{\beta} = \cos\varphi$$

关于s微分有

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{\tau}' = -\sin\theta\cdot\theta', \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{\beta}' = -\sin\varphi\cdot\varphi'$$

即 $$\kappa\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu} = -\sin\theta\cdot\theta', \quad \chi\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu} = \sin\varphi\cdot\varphi'$$

消去 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}$，得$\frac{\sin\theta\cdot\theta'}{\sin\varphi\cdot\varphi'} = -\frac{\kappa}{\chi}$

即 $$\frac{\sin\theta d\theta}{\sin\varphi d\varphi} = -\frac{\kappa}{\chi}$$

54. （证明）设近似曲线为

$$\bar{\Gamma}: \boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}}(s) = \left\{s, \frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \frac{1}{6}\kappa_0\chi_0 s^3\right\}$$

$$\because \dot{\bar{r}} = \left\{1, \kappa_0 s, \frac{1}{2}\kappa_0\chi_0 s^2\right\}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \{0, \kappa_0, \kappa_0\chi_0 s\}$$

$$\dddot{\bar{r}} = \{0, 0, \kappa_0\chi_0\}$$

$$\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}} = \left\{\frac{1}{2}\kappa_0^2\chi_0 s^2, -\kappa_0\chi_0 s, \kappa_0\right\}$$

$$(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}}) = \kappa_0^2\chi_0$$

$$|\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}| = \kappa_0\sqrt{1 + \chi_0^2 s^2 + \frac{1}{4}\kappa_0^2\chi_0^2 s^4},$$

$$|\dot{\bar{r}}| = \sqrt{1 + \kappa_0^2 s^2 + \frac{1}{4}\kappa_0^2\chi_0^2 s^4}$$

∴ 在P_0点 $\overline{r}(s)$的曲率为

$$\overline{\kappa}_0 = \frac{\kappa_0\sqrt{1+\chi_0^2 s^2+\frac{1}{4}\kappa_0^2\chi_0^2 s^4}}{\left(\sqrt{1+\kappa_0^2 s^2+\frac{1}{4}\kappa_0^2\chi_0^2 s^4}\right)^3_{s=0}} = \kappa_0$$

在P_0点$\overline{r}(s)$的挠率为

$$\overline{\chi}_0 = \frac{\kappa_0^2\chi_0}{\kappa_0^2\left(1+\chi_0^2 s^2+\frac{1}{4}\kappa_0^2\chi_0^2 s^4\right)_{s=0}} = \chi_0$$

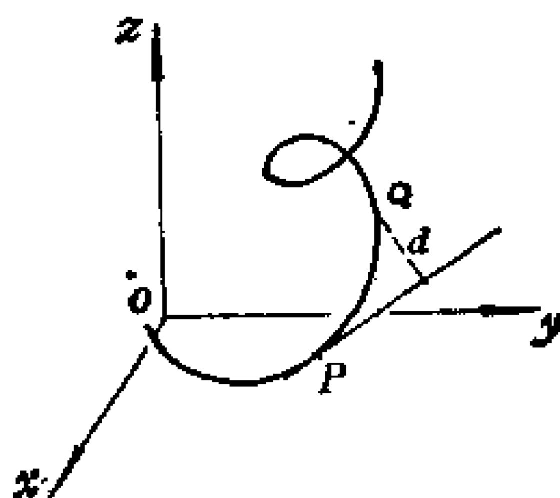
∴ $r=r(s)$ 与 $r=\overline{r}(s)$在点 P_0 有相同的曲率和挠率。

55. （证明）作点P的相伴三棱形 Px, y, z, 设 Q 点在此坐标系中的坐标为 $Q(x、y、z)$则有 $\overrightarrow{PQ^2}=x^2+y^2+z^2$

$$d^2=y^2+z^2$$

由 Bouguet 公式

$$\overrightarrow{PQ^2}=x^2+y^2+z^2$$
$$=s^2+\left(\frac{1}{4}\kappa^2-\frac{\kappa^2}{3}\right)s^4+\cdots$$



55题解答

$$d^2=\frac{1}{4}\kappa^2 s^4+\cdots$$

$$d=\frac{1}{2}\kappa s^2+\cdots$$

$$\therefore \lim_{P\to Q}\frac{2d}{\overrightarrow{PQ^2}}=\lim_{s\to 0}\frac{\kappa s^2+\cdots}{s^2+\cdots}=\kappa$$

∴ 当 $P\to Q$ 时，$\dfrac{2d}{\overrightarrow{PQ^2}}$的极限值就是曲线在点$P$的曲率。

56. （1）（解）∵ $\kappa=\dfrac{a}{a^2+b^2}$　$\chi=\dfrac{b}{a^2+b^2}$

∴　自然方程即为

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2},\ \chi=\frac{b}{a^2+b^2}$$

（2）（解）∵ $\kappa=\dfrac{1}{2a\operatorname{ch}^2t}$，$\chi=\dfrac{1}{2a\operatorname{ch}^2t}$

$$s=\int_0^t\sqrt{2}\,a\operatorname{ch}t\,dt=\sqrt{2}\,a\operatorname{sh}t$$

从而　$\operatorname{sh}t=\dfrac{s}{\sqrt{2}\,a}$

$$\therefore\ \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2t}=\frac{1}{2a(1+\operatorname{sh}^2t)}=\frac{1}{2a\left(1+\dfrac{s^2}{2a^2}\right)}=\frac{a}{2a^2+s^2}$$

故自然方程为

$$\kappa(s)=\chi(s)=\frac{a}{2a^2+s^2}$$

（3）（解）∵ $\dot{r}=\{a(1-\cos\theta),\ a\sin\theta,\ 0\}$

$$\ddot{r}=\{a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ 0\}$$

$$\dot{r}\times\ddot{r}=\{0,\ 0,\ a^2(\cos\theta-1)\}$$

$$|\dot{r}\times\ddot{r}|=a^2(1-\cos\theta)$$

$$|\dot{r}|=\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos\theta}$$

$$\therefore\ \kappa=\frac{a^2(1-\cos\theta)}{2\sqrt{2}\,a^3(1-\cos\theta)^{3/2}}=\frac{1}{4a\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\because\ \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos\theta}=2a\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ s=-4a\cos\frac{\theta}{2}$$

又 $$\kappa^2=\frac{1}{\left(4a\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{1}{16a^2\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{16a^2-s^2}$$

故自然方程为

$$\kappa(s)=\frac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}\qquad \chi(s)=0$$

(4) (解) ∵ $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$

$$y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}\qquad y''=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

∴ $$s=\int_0^x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}$$

又因 $$\kappa=\frac{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{3/2}}=\frac{a}{a^2\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)}$$

$$=\frac{a}{a^2+s^2}$$

故自然方程为

$$\kappa(s)=\frac{a}{a^2+s^2},\quad \chi(s)=0$$

57. (证明) 先求出此曲线的自然方程.

∵ $$\dot{\vec r}=\left\{a,\ \frac{\sqrt{2}a}{t}-\frac{a}{t^2}\right\}$$

$$\ddot{\vec r}=\left\{0,\ -\frac{\sqrt{2}a}{t^2},\ \frac{2a}{t^3}\right\}$$

$$\dddot{r} = \left\{ 0, \ \frac{2\sqrt{2}a}{t^3}, \ -\frac{6a}{t^4} \right\}$$

$$\dot{r} \times \ddot{r} = \left\{ \frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}, \ -\frac{2a^2}{t^3}, \ -\frac{\sqrt{2}a^2}{t^2} \right\}$$

$$|\dot{r} \times \ddot{r}| = \frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}(t^2+1), \ |\dot{r}| = \frac{a}{t^2}(t^2+1),$$

$$(\dot{r}\ddot{r}\dddot{r}) = \frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6}$$

$$\therefore \ \kappa = \frac{\sqrt{2}a^2(t^2+1)}{t^4} \Big/ \left[\frac{a}{t^2}(t^2+1)\right]^3 = \frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}$$

$$\chi = \frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6} \Big/ \left[\frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}(t^2+1)\right]^2 = \frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}$$

又因为 $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{a}{t^2}(t^2+1)$

从而有 $s = a\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

$$s^2 = a^2t^2 + \frac{a^2}{t^2} - 2a^2$$

$$\therefore \ \frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{a\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{a^2t^2 + \dfrac{a^2}{t^2} + 2a^2} = \frac{\sqrt{2}a}{s^2+4a^2}$$

令 $A = \sqrt{2}a$，则有

$$\kappa(s) = \chi(s) = \frac{A}{s^2+2A^2}$$

上述结果与（56）题（2）双曲螺旋线的自然方程完全相

同，故此曲线为双曲螺旋线。

58.（1）（证明）

$$\because \ \kappa=\frac{1}{2a\mathrm{ch}^2t}, \qquad \chi=\frac{1}{2a\mathrm{ch}^2t}$$

$$\therefore \ \frac{\kappa}{\chi}=1$$

∴ 曲线为定倾曲线。

（2）（证明）

$$\because \ \dot{\boldsymbol{r}}=\{a\sin\alpha(t),\ a\cos\alpha(t),\ b\}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\{a\cos\alpha(t)\cdot\dot{\alpha}(t),\ -a\sin\alpha(t)\cdot\dot{\alpha}(t),\ 0\}$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=a\ddot{\alpha}(t)\{\cos\alpha(t),\ -\sin\alpha(t),\ 0\}+a\dot{\alpha}^2(t)\{-\sin\alpha(t),\ -\cos\alpha(t),\ 0\}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=a\dot{\alpha}(t)\{b\sin\alpha(t),\ b\cos\alpha(t),\ -a\}$$

$$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})=a^2\dot{\alpha}^3(t)(-b)=-a^2b\dot{\alpha}^3(t)$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{a^2-b^2} \qquad |\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|=a\dot{\alpha}(t)\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \ \kappa=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}\ \dot{\alpha}(t)}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}\dot{\alpha}(t)$$

$$\chi=\frac{-a^2b\dot{\alpha}^3(t)}{a^2\dot{\alpha}^2(t)\sqrt{(a^2+b^2)^2}}=-\frac{b}{a^2+b^2}\dot{\alpha}(t)$$

从而 $$\frac{\kappa}{\chi}=\frac{a}{a^2+b^2}\dot{\alpha}(t)\Big/-\frac{b}{a^2+b^2}\dot{\alpha}(t)=-\frac{a}{b}$$

∴此曲线为定倾曲线。

59.（证明）由题37（1）知，

$$(\boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''',\ \boldsymbol{r}^{(4)})=(\boldsymbol{\tau}',\ \boldsymbol{\tau}'',\ \boldsymbol{\tau}''')=k^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)$$

⟹ 若 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为定倾曲线，则

$$\frac{\chi}{\kappa}=c \qquad (c\text{为常数})$$

从而 $(\boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''',\ \boldsymbol{r}^{(4)})=\kappa^5\frac{d}{ds}(c)=0$

$\Longleftarrow$ 若 $(\boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''',\ \boldsymbol{r}^{(4)})=0$，则

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)=0,\quad \text{即}\frac{\chi}{\kappa}=c$$

∴曲线为定倾曲线。

60. （证明）∵ $\overline{\boldsymbol{r}}=R\boldsymbol{\tau}-\int \boldsymbol{\nu}ds$

$$\dot{\overline{\boldsymbol{r}}}=R'\boldsymbol{\tau}+R\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\nu}=R'\boldsymbol{\tau}+R\kappa\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}=R'\boldsymbol{\tau}$$

∴ $\overline{\boldsymbol{\tau}}\,/\!/\,\boldsymbol{\tau}$。

由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为定倾曲线，故其切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与固定方向成定角，而 $\overline{\boldsymbol{\tau}}\,/\!/\,\boldsymbol{\tau}$，即 $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ 也与固定方向成定角，所以曲线 $\overline{\boldsymbol{r}}=R\boldsymbol{\tau}-\int \boldsymbol{\nu}ds$也是定倾曲线。

61. （解）（1）∵ $\boldsymbol{\beta}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-\cos t,\ -\sin t,\ 0\}\cdot\frac{dt}{ds}=-\chi\boldsymbol{\nu}$

∵ $\chi\neq0$，（否则$\frac{dt}{ds}=0$，不合理。）

∴ $\boldsymbol{\nu}=\varepsilon\{\cos t,\sin t,\ 0\}\quad \varepsilon=\pm1$

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\{\sin t,\ -\cos t,\ 1\}$$

（2）证曲线是定倾曲线。

∵ $\boldsymbol{\tau}'=\kappa\boldsymbol{\nu}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\{\cos t,\ \sin t,\ 0\}\frac{dt}{ds}$

$$\therefore \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dt}{ds}$$

$$\because \ \beta' = -\chi\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-\cos t, \ -\sin t, \ 0\} \frac{dt}{ds}$$

$$\therefore \chi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{dt}{ds}$$

因此 $\quad \dfrac{\kappa}{\chi} = \varepsilon$

$\therefore$ 曲线是定倾曲线.

62. （证明）设 $c: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$， $\bar{c}: \bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\bar{s})$.

由条件知 $\bar{\tau} \parallel \tau$.

$\therefore \quad \bar{\tau} = \varepsilon\tau \qquad (\varepsilon = \pm 1)$

对上式两端微分，有

$$\bar{\kappa}\bar{\nu}\frac{d\bar{s}}{ds} = \varepsilon\kappa\nu \tag{1}$$

$$\therefore \quad \bar{\nu} \parallel \nu \tag{1*}$$

从而 $\quad \bar{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta}$

由 $\bar{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta}$, 得到 $\bar{\boldsymbol{\beta}} = e\boldsymbol{\beta}$

对上式两端微分，得

$$-\bar{\chi}\bar{\nu}\frac{d\bar{s}}{ds} = -e\chi\nu \tag{2}$$

由（1）、(1*)有

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \tag{2*}$$

由（2）、（2*）有

$$\frac{d\bar{s}}{ds}=\frac{\chi}{\bar{\chi}}$$

故 $\quad \frac{\chi}{\bar{\chi}}=\frac{\kappa}{\bar{\kappa}}$，即 $\quad \frac{\kappa}{\chi}=\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\chi}}$

∴ 若 c 为定倾曲线时，$\bar{c}$ 也为定倾曲线。

63．（证明）设圆柱螺线为 $r=\{a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ b\theta\}$

则 $\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}$，$\chi=\frac{b}{a^2+b^2}$，

$$\frac{\kappa}{\chi}=\frac{a}{b}$$

∴ 圆柱螺线是定倾曲线。

令 $\lambda=\frac{a^2+b^2}{2a}$，$\qquad \mu=\frac{a^2+b^2}{2b}$

则有 $\quad \lambda\kappa+\mu\chi=1$

∴ 圆柱螺线又是贝特朗曲线。

64．（1）（证明）

设平面上圆的方程为

$x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，$z=0$（R为任意正数）

因为任取同心圆中的两个，在其对应点的单位主法线向量均为 $\nu=\{-\cos\theta,\ -\sin\theta, 0\}$。又因主法线过圆心，即对应点的主法线重合。由定义知这两个圆是贝特朗曲线。由取法的任意性，得出平面上的同心圆都是贝特朗曲线。

（2）（证明）先求 $r(s)$的主法向量

$\because\ r'(s)=\{-\sqrt{1-s^2},\ -s,\ 0\}\qquad |r'|=1$

$$r''(s)=\left\{\frac{s}{\sqrt{1-s^2}},\ -1,\ 0\right\}$$

$$|\boldsymbol{r}''(s)| = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$\therefore\ \nu(s) = \frac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|} = \{s,\ -\sqrt{1-s^2},\ 0\}$$

再求 $\bar{\boldsymbol{r}}(s)$ 的主法向量，因 s 是 $\boldsymbol{r}$ 的弧长，而不是 $\bar{\boldsymbol{r}}$ 的弧长，所以

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(s) = \frac{1}{2}\left\{-2\sqrt{1-s^2}-1,\ -2s-\frac{s}{\sqrt{1-s^2}},\ 0\right\}$$

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}(s) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2s}{\sqrt{1-s^2}},\ -2-\frac{1}{(1-s^2)^{3/2}},\ 0\right\}$$

$$\therefore\ \bar{\nu}(s) = \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}\times\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}\times\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}}{|\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}\times\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}\times\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}|} = \{s,\ -\sqrt{1-s^2},\ 0\}$$

由 $\boldsymbol{r}(s)$ 与 $\bar{\boldsymbol{r}}(s)$ 在对应点的主法线重合，故得出结论。即 $\boldsymbol{r}(s)$ 与 $\bar{\boldsymbol{r}}(s)$ 都是贝特朗曲线。

65. （证明）令 $\bar{\nu}=\varepsilon\nu$ $(\varepsilon=\pm1)$

见图1—15， $\bar{\theta}=-\varepsilon\theta$ （θ 为对应点两切线夹角）

$\therefore\ \cos\bar{\theta}=\cos\theta,\ \sin\bar{\theta}=-\varepsilon\sin\theta\ \ \mathrm{tg}\bar{\theta}=-\varepsilon\mathrm{tg}\theta$

由 $\boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}+\bar{\lambda}\bar{\nu}$ 及 $\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}+\lambda\nu$

得 $\bar{\lambda}=-\varepsilon\lambda$

故 $\bar{\mu}=\bar{\lambda}\mathrm{tg}\bar{\theta}=(-\varepsilon\lambda)(-\varepsilon\mathrm{tg}\theta)=\lambda\mathrm{tg}\theta=\mu$

从而由 $\bar{\lambda}\bar{\kappa}+\bar{\mu}\bar{\varkappa}=1$ 得出

$$-\varepsilon\lambda\bar{\kappa}+\mu\bar{\varkappa}=1$$

$\because\ (1-\lambda\kappa)(1+\varepsilon\lambda\bar{\kappa})=\mu\chi\cdot\mu\bar{\varkappa}=\mu^2\chi\bar{\varkappa}$

$\therefore$ 只须证 $\chi\bar{\chi}=\dfrac{1}{\lambda^2+\mu^2}$ 即可

由本章§9定理2证明中（9.5）有

$$\lambda\chi = \frac{d\bar{s}}{ds}\sin\theta \qquad ①$$

对应上式有

$$\overline{\lambda\chi} = \frac{ds}{d\bar{s}}\sin\bar{\theta} = \frac{ds}{d\bar{s}}(-\varepsilon\sin\theta) \qquad ②$$

从①、②两式中消去$\frac{d\bar{s}}{ds}$，得

$$\lambda\bar{\lambda}\chi\bar{\chi} = -\varepsilon\sin^2\theta$$

即
$$-\varepsilon\lambda^2\chi\bar{\chi} = -\varepsilon\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \chi\bar{\chi} = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

又∵ $\sin\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$

$$\therefore \quad \chi\bar{\chi} = \frac{1}{\lambda^2+\mu^2}$$

从而
$$(1-\lambda\kappa)(1+\varepsilon\bar{\lambda}\bar{\kappa}) = \frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}$$

66．（证明）设曲线 C和 $\bar{C}$ 均以弧长为参数

c：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$\bar{c}$：$\bar{\boldsymbol{r}}=\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{s})$

由它们在对应点有公共的副法线

∴ $\bar{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}(s)+\mu(s)\boldsymbol{\beta}(s)$

对 s 微分

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds} = \boldsymbol{\tau}+\mu'\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\tau}+\mu'\boldsymbol{\beta}-\mu\chi\boldsymbol{\nu}$$

∵曲线有公共主法线

∴ $\bar{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\beta = (\tau + \mu'\beta - \mu\chi\nu)\beta = \mu'$$

而 $$\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\beta = \pm\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|\bar{\tau}\cdot\bar{\beta} = 0$$

∴ μ 是常数.

$$\because \bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{d\bar{s}} = (\tau - \mu\chi\nu)\frac{ds}{d\bar{s}}$$

再对 $\bar{s}$ 微分

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{s}} = (\tau' - \mu\chi'\nu - \mu\chi\nu')\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 + (\tau - \mu\chi\nu)\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}$$

$$= [\mu\kappa\chi\tau + (\kappa - \mu\chi')\nu - \mu\chi^2\beta]\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 + (\tau - \mu\chi\nu)\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}$$

又 $\because$ $$\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{s}} = \bar{\kappa}\bar{\nu}$$

$$\therefore \bar{\tau}\times\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{s}} = \bar{\kappa}\bar{\beta}$$

$$= [\mu^2\chi^3\tau + \mu\chi^2\nu + (\kappa - \mu\chi' + \mu^2\chi^2\kappa)\beta]\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3$$

为保持副法线一致，则必须

$$\mu\chi^2\nu + \mu^2\chi^3\tau = 0$$

即 $$\mu\chi^2(\nu + \mu\chi\tau) = 0$$

若μ为零，则C与$\bar{C}$为同一曲线，故 $\mu\neq 0$. 从而 $\chi = 0$，曲

线为平面曲线。

67．（证明）设空间二已知曲线为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s) \qquad \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(s_1)$$

s，s_1 是它们的弧长；曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率为 $\kappa=b$ （常数），$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(s_1)$ 的挠率为 $\chi_1=c$ （常数）。二曲线对应点连线按定比 $m:n$ 内分，此分点的轨迹应为

$$\boldsymbol{\rho}=\frac{m\boldsymbol{r}_1+n\boldsymbol{r}}{m+n}$$

用 $t=\dfrac{ms_1+ns}{m+n}$ 为参数，则$\boldsymbol{\rho}$，t 关于 s 的微分为（用 ' 表示）

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}=\frac{\boldsymbol{\rho}'}{t'}=\frac{m\boldsymbol{r}_1'+n\boldsymbol{r}'}{ms_1'+n}$$

∵ 对应点切线平行

$$\therefore \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}_1}{ds_1}$$

从而 $\quad \boldsymbol{r}_1'=\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}=\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{ds_1}\cdot\dfrac{ds_1}{ds}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\dfrac{ds_1}{ds}=\boldsymbol{r}'s_1'$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}=\frac{ms_1'\boldsymbol{r}'+n\boldsymbol{r}'}{ms_1'+n}=\boldsymbol{r}'$$

因此，t 是曲线 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(t)$的弧长。

又：$\dfrac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}=\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}=\boldsymbol{r}''\dfrac{m+n}{ms_1'+n}=\dfrac{(m+n)\kappa}{ms_1'+n}\boldsymbol{\nu}$

∴ $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(t)$的曲率

$$\bar{\kappa}=\pm\frac{(m+n)\kappa}{ms_1'+n}=\pm\frac{(m+n)b}{ms_1'+n} \quad (\bar{\kappa}\text{取正号})$$

同理 $\boldsymbol{\rho}$，t 关于 s_1的微分为（用 · 表示）

$$\frac{d\rho}{dt}=\dot{r}_1 \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\cdot\ddot{r}_1$$

从而 $\quad \bar{\kappa}=\pm\frac{(m+n)\kappa_1}{m+n\dot{s}}$

$$\because \quad \frac{d^3\rho}{dt^3}=\left(\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\right)^2\dddot{r}_1-\frac{n\ddot{s}(m+n)^2}{(m+n\dot{s})^2}\ddot{r}_1$$

$$\therefore \quad \bar{\chi}=\left(\frac{d\rho}{dt}\ \frac{d^2\rho}{dt^2}\ \frac{d^3\rho}{dt^3}\right)\Big/\left|\frac{d\rho}{dt}\times\frac{d^2\rho}{dt^2}\right|^2$$

$$=\frac{1}{\bar{\kappa}^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\ \frac{d^2\rho}{dt^2}\ \frac{d^3\rho}{dt^3}\right)$$

$$=\left(\frac{m+n\dot{s}}{m+n}\right)^2\frac{1}{\kappa_1^2}\left(\dot{r}_1,\ \frac{m+n}{m+n\dot{s}}\ddot{r}_1,\right.$$

$$\left.\left(\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\right)^2\dddot{r}_1-\frac{n\ddot{s}(m+n)}{(m+n\dot{s})^3}\ddot{r}_1\right),$$

$$=\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\cdot\frac{1}{\kappa_1^2}(\dot{r}_1\ddot{r}_1\dddot{r}_1)$$

$$=\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\cdot\frac{(\dot{r}_1\ddot{r}_1\dddot{r}_1)}{|\ddot{r}_1|^2}$$

$$=\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\cdot\frac{(\dot{r}_1,\ \ddot{r}_1,\ \dddot{r}_1)}{|\dot{r}_1\times\ddot{r}_1|^2}$$

$$=\frac{m+n}{m+n\dot{s}}\chi_1$$

$$=\frac{s_1'(m+n)}{ms_1'+n}\chi_1 \qquad \left(\because\ \dot{s}=\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$=\frac{s_1'(m+n)}{ms_1'+n}c$$

从而
$$\left(\pm\frac{n}{(m+n)\kappa}\right)^{\overline{\kappa}}+\left(\frac{m}{(m+n)\chi_1}\right)^{\overline{\chi}}$$

$$=\frac{n}{(m+n)b}\cdot\frac{(m+n)b}{ms_1{}^{t}+n}+\frac{m}{(m+n)c}\cdot\frac{s_1{}^{t}(m+n)c}{ms_1{}^{t}+n}$$

$$=\frac{n}{ms_1{}^{t}+n}+\frac{ms_1{}^{t}}{ms_1{}^{t}+n}=1$$

∴ 此内分点的轨迹是贝特朗曲线。

第二章　包络论习题解答

1．（解）（1）在曲面上任取一点 $M(x, y, z)$，设 M 在 oxy 平面的投影为 M'，ox 轴与 oM' 的交角为 u，于是由椭圆的参数方程知

$$x = a\cos u \qquad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi)$$
$$y = b\sin u$$

又因柱面的母线平行于 oz 轴，所以可设

$$z = v \qquad (-\infty < v < +\infty)$$

则椭圆柱面的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos u,\ b\sin u,\ v\}$$

（注意：选择参数时不必具有几何意义，因此以下各题不指出其几何意义．）

（2）因柱面母线平行于 oz 轴，所以可设

$$z = v \qquad (-\infty < v < +\infty)$$

$$x = a\sec u \quad \left(-\pi < u < \pi,\ u \neq \pm\frac{\pi}{2}\right)$$

则将上式代入双曲柱面方程中解得

$$y = b\,\mathrm{tg}\,u$$

于是双曲柱面的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \{a\sec u,\ b\,\mathrm{tg}\,u,\ v\}$$

（3）设 $x = u,\quad y = v \quad (-\infty < u,\ v < +\infty)$

则将上式代入锥面方程中解得

$$z = \pm C\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}$$

于是锥面的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \left\{u,\ v,\ \pm C\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}\right\}$$

（4）设　$x = av\cos u$　$(-\infty < v < +\infty)$

$y = bv\sin u$　$(0 \leqslant u < 2\pi)$

则将上式代入椭圆抛物面中解得

$$z = \frac{v^2}{2}$$

于是椭圆抛物面的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \left\{av\cos u,\ bv\sin u,\ \frac{v^2}{2}\right\}$$

（5）设双曲抛物面的两族直母线的族参数为 u，v $(-\infty < u,\ v < +\infty)$ 即

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v \\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z \end{cases}$$

由此解得

$$x = a(u+v),\ y = b(u-v),\ z = 2uv$$

于是，若以两族直母线的族参数为曲面的参数，则其参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}$$

2、（解）（1）由参数方程知

$$\frac{x}{a}=\cos u\ \cos v$$

$$\frac{y}{b}=\cos u\ \sin v$$

$$\frac{z}{c}=\sin u$$

则有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\cos^2u\cos^2v+\cos^2u\sin^2v+\sin^2u$$

$$=\cos^2u(\cos^2v+\sin^2v)+\sin^2u$$

$$=1$$

由此可知原参数方程确定一个椭圆面。

（2）由参数方程得

$$x^2=u^2+\frac{v^2}{a^2}-\frac{2}{a}vu$$

$$y^2=v^2+\frac{u^2}{b^2}+\frac{2}{b}uv$$

则

$$ax^2+by^2=au^2+\frac{v^2}{a}-2uv+\frac{u^2}{b}+bv^2+2uv$$

$$=au^2+bv^2+\frac{v^2}{a}+\frac{u^2}{b}$$

$$=(1+ab)\left(\frac{v^2}{a}+\frac{u^2}{b}\right)$$

$$=z$$

由此可知原参数方程确定一椭圆抛物面。

（3）由参数方程得

$$\frac{x}{a}=u+v$$

$$\frac{y}{b}=u-v$$

则

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(u+v)^2-(u-v)^2=4uv=2z$$

因此原参数方程确定一双曲抛物面。

（4）由参数方程得

$$\frac{x}{a}=\mathrm{ch}u$$

$$\frac{y}{b}=\mathrm{sh}u\cos v$$

$$\frac{z}{c}=\mathrm{sh}u\sin v$$

则有

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\mathrm{ch}^2u-\mathrm{sh}^2u\cos^2v-\mathrm{sh}^2u\sin^2v$$

$$=\mathrm{ch}^2u-\mathrm{sh}^2u(\cos^2v+\sin^2v)$$

$$=\mathrm{ch}^2u-\mathrm{sh}^2u$$

$$=1$$

因而原参数方程确定一双叶双曲面。

3．（解）（1）由参数方程得

$$\frac{x}{a}=\frac{1+uv}{u+v},\quad \frac{y}{b}=\frac{u-v}{u+v},\quad \frac{z}{c}=\frac{1-uv}{u+v}$$

则 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{(1+uv)^2+(u-v)^2-(1-uv)^2}{(u+v)^2}$$

$$=\frac{u^2+2uv+v^2}{(u+v)^2}$$

$$=1$$

即方程（1）确定单叶双曲面。

（2）由参数方程得

$$\frac{x}{a}=\operatorname{ch}u\cos v,\ \frac{y}{b}=\operatorname{ch}u\sin v,\ \frac{z}{c}=\operatorname{sh}u$$

则

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\operatorname{ch}^2u\cos^2v+\operatorname{ch}^2u\sin^2v-\operatorname{sh}^2u$$

$$=\operatorname{ch}^2u(\cos^2v+\sin^2v)-\operatorname{sh}^2u$$

$$=1$$

由此可知参数方程（2）与方程（1）确定同一单叶双曲面。

对参数方程（1）微分得

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{a\frac{v^2-1}{(u+v)^2},\ b\frac{2v}{(u+v)^2},\ c\frac{-v^2-1}{(u+v)^2}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\left\{a\frac{u^2-1}{(u+v)^2},\ b\frac{-2u}{(u+v)^2},\ c\frac{-u^2-1}{(u+v)^2}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=\frac{a^2(v^2-1)(u^2-1)-4b^2uv+c^2(v^2+1)(u^2+1)}{(u+v)^4}$$

因为上式一般都不为零，所以其参数曲线网不是正交网。

对参数方程（2）微分得

$$\boldsymbol{r}_u=\{a\operatorname{sh}u\cos v,\ b\operatorname{sh}u\sin v,\ c\operatorname{ch}u\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-a\operatorname{ch}u\sin v,\ b\operatorname{ch}u\cos v,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=-a^2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\sin v\cos v+b^2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\sin v\cos v$$

由此可知当曲面为旋转单叶双曲面（即$a=b$）时，参数曲线是正交网，否则不是。

4．（解）将参数方程分别对 u，v 微分得

$$\boldsymbol{r}_u=\{a\,\text{sh}u\cos v,\ \ a\,\text{sh}u\sin v,\ \ a\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-a\,\text{ch}u\sin v,\ \ a\,\text{ch}u\cos v,\ \ 0\}$$

则 $$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=-a^2\text{sh}u\,\text{ch}u\sin v\cos v+a^2\text{sh}u\,\text{ch}u\sin v\cos v=0$$

即两族参数曲线在任意点（u，v）的切向量都垂直，所以它们构成正交曲线网。

5．（解）$\boldsymbol{r}_u=\{1,\ 2u,\ 3u^2\}$

$$\boldsymbol{r}_v=\{1,\ 2v,\ 3v^2\}$$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{6uv,\ \ -3(u+v),\ \ 2\}(v-u)\qquad(*)$$

由已知条件得

$$2=u+v,\ \ 2=u^2+v^2,\ \ 2=u^3+v^3$$

解得 $u=1$，$v=1$

代入(*)式中得

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=0$$

因此在点 $P(2,2,2)$ 处没有切平面。

6．（解）由方程组

$$\left.\begin{aligned}u\cos v&=1\\ u\sin v&=1\\ 2v&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}$$

解得 $u=\sqrt{2}$，$v=\dfrac{\pi}{4}$ (*)

而 $$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v,\ \sin v,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v,\ \ u\cos v,\ \ 2\}$$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{2\sin v,\ \ -2\cos v,\ \ u\}$$

由(*)式得

$$r_s \times r_t = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\}$$

则切于点 P 的切平面方程为

$$\sqrt{2}(x-1) - \sqrt{2}(y-1) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

或 $$x - y + z - \frac{\pi}{2} = 0$$

7．（证）设曲面上经过 P 点的任一条曲线方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

则有 $$F(x(t),\ y(t),\ z(t)) = 0$$

对 t 微分得

$$F_{x_0}\frac{dx}{dt} + F_{y_0}\frac{dy}{dt} + F_{z_0}\frac{dz}{dt} = 0$$

因为 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$ 是曲线在点 P 的切向量坐标，而曲线又是经过点 P 的任意一条，所以 $\{F_x,\ F_y,\ F_z\}$ 垂直于过点 P 的任一切向量。从而 $\{F_x,\ F_y,\ F_z\}$ 可作为曲面在点 P 的法向量，于是经过点 P 的曲面的切平面方程为

$$(x - x_0)F_{x_0} + (y - y_0)F_{y_0} + (z - z_0)F_{z_0} = 0$$

8．（证）由上题结论知，曲线的切平面方程为

$$(x - x_0)F_{x_0} + (y - y_0)F_{y_0} + (z - z_0)F_{z_0} = 0$$

而 $$F_{x_0} = nx_0^{n-1},\ F_{y_0} = ny_0^{n-1},\ F_{z_0} = nz_0^{n-1}$$

则有 $$xx_0^{n-1} + yy_0^{n-1} + zz_0^{n-1} = x_0^n + y_0^n + z_0^n$$

因坐标 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 满足曲面方程，于是得到

$$xx_0^{n-1} + yy_0^{n-1} + zz_0^{n-1} = a^n$$

9．（解）$F_{x_0} = y_0z_0$，$F_{y_0} = x_0z_0$，$F_{z_0} = x_0y_0$

则切平面方程为

$$(x - x_0)y_0z_0 + (y - y_0)x_0z_0 + (z - z_0)x_0y_0 = 0$$

或 $$xy_0z_0+yx_0z_0+zx_0y_0-3=0$$

由两平面的平行条件得

$$\frac{y_0z_0}{1}=\frac{x_0z_0}{1}=\frac{x_0y_0}{1}$$

解得 $x_0=1,\ y_0=1,\quad z_0=1$

于是切平面方程

$$x+y+z-3=0$$

10. （证）因为

$$F_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ F_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},\ F_z=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}$$

所以曲面任一点 $P(x_1,\ y_1,z_1)$（坐标轴上的点除外）的切平面方程为

$$(x-x_1)x_1^{-\frac{1}{3}}+(y-y_1)y_1^{-\frac{1}{3}}+(z-z_1)z_1^{-\frac{1}{3}}=0$$

即 $$xx_1^{-\frac{1}{3}}+yy_1^{-\frac{1}{3}}+zz_1^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

而切平面与三坐标轴的交点分别为

$$(a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}},\ 0,0),\quad (0,\ a^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}},\ 0),\quad (0,0,\ a^{\frac{2}{3}}z_1^{\frac{1}{3}})$$

于是在三个坐标面上的三个线段的平方和为

$$[(a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}})^2]+[(a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}})^2]+$$
$$[(a^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}z_1^{\frac{1}{3}})^2]$$
$$=2a^{\frac{4}{3}}(x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}+z_1^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}=2a^2$$

即三线段的平方和为 $2a^2$ 是一定数.

11. （证）取 x 和 $t=\frac{y}{x}$ 为参数，则曲面方程可写成

$$\boldsymbol{r}=\{x,\ xt,\ f(t)x\}$$

求偏导得

$$\boldsymbol{r}_x=\{1,\ t,\ f(t)\}$$
$$\boldsymbol{r}_t=\{0,\ x,\ f'(t)x\}$$

切平面的法向量为

$$n = r_x \times r_t = \{xtf'(t) - xf(t), -xf'(t), x\}$$

于是曲面上任一点的切平面方程为

$$[xtf'(x) - xf(t)](X - x) - xf'(t)(Y - y) + x(Z - z) = 0$$

或

$$[xtf'(t) - xf(t)]X - xf'(t)Y + xZ + [xyf'(t) - x^2tf'(t)] + [x^2f(t) - xz] = 0$$

因为 $y = xt, \quad z = xf(t)$

所以切平面方程为

$$\left[yf'\left(\frac{y}{x}\right) - z\right]X - xf'\left(\frac{y}{x}\right) Y + xZ = 0$$

由此可知，切平面通过坐标原点，因此曲面的所有切平面都通过一定点.

12. (解) 将螺旋线方程

$$r = \{a\cos u, a\sin u, bu\}$$

微分得 $\dot{r} = \{-a\sin u, a\cos u, b\}$

于是切线方程为

$$\frac{x - a\cos u}{-a\sin u} = \frac{y - a\sin u}{a\cos u} = \frac{z - bu}{b}$$

设它们的比值为 v，则 u，v 为参数的切线曲面方程为

$$r(u, v) = \{-va\sin u + a\cos u, va\cos u + a\sin u, b(u+v)\}$$

$$r_u = \{-va\cos u - a\sin u, -va\sin u + a\cos u, b\}$$

$$r_v = \{-a\sin u, a\cos u, b\}$$

$$r_u \times r_v = \{-abv\sin u, abv\cos u, -a^2v\}$$

于是曲面除 $v = 0$ 的点外其它各点的法向量可取为

$$n=\{b\sin u,\quad -b\cos u,\quad a\}$$

它与 oz 轴的夹角余弦为

$$\frac{n\cdot k}{|n|\ |k|}=\frac{0\times b\sin u+0\times b\cos u+1\times a}{\sqrt{b^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u+a^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=$$

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\text{常数}$$

所以切线曲面的法线与 oz 轴交成定角

13. (证)

$$\because r_u=\{\cos v,\quad \sin v,\quad 0\}$$

$$r_v=\{-u\sin v,\quad u\cos v,\quad \varphi'(v)\}$$

$$\therefore r_u\times r_v=\{\varphi'\sin v,\varphi'\cos v,\quad u\}$$

$$|r_u\times r_v|=u^2+\varphi'^2$$

所以法线的方向余弦为

$$x=\frac{\varphi'\sin v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\quad y=\frac{\varphi'\cos v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\quad z=\frac{u}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}$$

14. (证) 设切点坐标为 $(u_0,\ v_0)$,则

$$r_{u_0}=\{\cos v_0,\quad \sin v_0,\quad 0\}$$

$$r_{v_0}=\{-u\sin v_0,\quad u\cos v_0,\quad 2a\cos 2v_0\}$$

$$r_{u_0}\times r_{v_0}=\{2a\sin v_0\cos 2v_0,\quad -2a\cos v_0\cos 2v_0,\quad u_0\}$$

则曲面的切平面方程为

$$2xa\sin v_0\cos 2v_0-2ya\cos v_0\cos 2v_0+zu_0-au_0\sin 2v_0=0$$

将曲面方程代入上式中得

$$2a\sin(v-v_0)[u_0\cos(v+v_0)-u\cos 2v_0]=0$$

于是得到交线方程

$$v=v_0,\quad u=\frac{u_0}{\cos 2v_0}\cos(v+v_0)$$

由原曲面方程知,对应于 $v=v_0$ 的交线是通过切点的曲面的直

母线，而另一条交线的参数方程为

$$\begin{cases} x = u_0\dfrac{\cos(v+v_0)}{\cos 2v_0}\cos v = \dfrac{u_0}{2\cos 2v_0}[\cos(2v+v_0)+\cos v_0] \\ y = u_0\dfrac{\cos(v+v_0)}{\cos 2v_0}\sin v = \dfrac{u_0}{2\cos 2v_0}[\sin(2v+v_0)-\sin v_0] \\ z = a\sin 2v \end{cases}$$

由前两式消去 v 得

$$\left(\frac{x-\dfrac{u_0\cos v_0}{2\cos 2v_0}}{\dfrac{u_0}{2\cos 2v_0}}\right)^2+\left(\frac{y-\dfrac{u_0\sin v_0}{2\cos 2v_0}}{\dfrac{u_0}{2\cos 2v_0}}\right)^2=1$$

由此可知，其交线为一椭圆。

15．（解）

$$\because F(x, y, z; \alpha) = \alpha^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{z^2}{\alpha^2}-1=0 \quad (1)$$

$$\therefore F_\alpha(x, y, z; \alpha) = 2\alpha\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-2\frac{z^2}{\alpha^3}=0 \quad (2)$$

由（1）、（2）式得

$$\alpha^2=2z^2$$

代入（1）式中并整理为

$$4z^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=1 \quad (3)$$

由于满足

$$F_x = 2x\frac{\alpha^2}{a^2}=0$$

$$F_y = 2y\frac{\alpha^2}{b^2}=0$$

$$F_z = 2\frac{z}{\alpha^2}=0$$

的点只有坐标原点，而原点又不在曲面F中，所以（3）式为包络面

16．（解）依题意知，族中任一球心坐标为$(0, y, 0)$，半径为x，而x，y须满足方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，若把半径设为球面族的参数，则其方程为

$$F(X, Y, Z; x)=X^2+(Y-y)^2+Z^2-x^2=0 \quad (1)$$

则有

$$F_x(X, Y, Z; x)=-2(Y-y)y'-2x=0 \quad (2)$$

而由椭圆曲线方程得

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

于是（2）式为

$$F_x= 2x\left[(Y-y)\frac{b^2}{a^2y}-1\right]=0 \quad (3)$$

当 $x=0$ 时，由（1）式得一特殊球面

$$X^2+(Y-b)^2+Z^2=0 \quad (4)$$

当 $x\neq0$ 时，由（3）式得

$$y=\frac{b^2}{a^2+b^2}Y,\quad x^2=a^2-\frac{a^2b^2Y^2}{(a^2+b^2)^2}$$

代入（1）式中得

$$X^2+\left(Y-\frac{b^2}{a^2+b^2}Y\right)^2+Z^2-a^2+\frac{a^2b^2Y^2}{(a^2+b^2)^2}=0$$

或 $$X^2+\frac{a^2}{a^2+b^2}Y^2+Z^2=a^2 \quad (5)$$

显然（4）式不是包络，而（5）式中的点都不使F_X，F_Y，F_Z等于零，所以是包络面。

17. （解） $F(x, y, z; a) = (x+a)^3 - (y+a)^2 = 0$ （1）

$F_a(x, y, z; a) = 3(x+a)^2 - 2(y+a) = 0$ （2）

由（1），（2）式消去 $y+a$ 得

$$4(x+a)^3 = 9(x+a)^4$$

于是有两种可能

$$x+a=0 \qquad (3)$$

$$x+a=\frac{4}{9} \qquad (4)$$

第一种情形：由（1）、（3）式得一判别曲面

$$y=x \qquad (5)$$

由（4）、（2）式得另一判别曲面

$$y=x-\frac{4}{27} \qquad (6)$$

而 $F_x = 3(x+a) = 0$

$F_y = -2(y+a) = 0$

$F_z = 0$

由于满足 $F_x = F_y = F_z = 0$ 的点在判别曲面（5）中，则（5）中可能有奇点．从方程（1）中看出点 $(-a, -a, z)$ 是曲面 F 的奇点，所以（5）式是奇点的轨迹，不是包络．而（6）式中的任一点都不使 $F_x = F_y = F_z = 0$，所以（6）式是包络．

18. （解）

$\dot{r} = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$ 由弧长公式可得

$s'(t) = |\dot{r}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$r' = \frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{r}}{s(t)} = \left\{\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\right.$$

$$\left.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

$$r'' = \frac{dr'}{dt}\ \frac{dt}{ds} = \left\{\frac{-a}{a^2+b^2}\ \cos t, \frac{a}{a^2+b^2}\ \sin t,\ 0\right\}$$

于是从切面方程为

$$(x - a\cos t)\cos t + (y - a\sin t)\sin t = 0$$

或 $$x\cos t + y\sin t - a = 0 \qquad (1)$$

于是有

$$F_t = -x\sin t + y\cos t = 0 \qquad (2)$$

将（1）、（2）式消去 t 得

$$x^2 + y^2 = a^2$$

因为螺旋线在任一点的从切面是平面，而平面上没有奇点，所以上式表示它们的包络面。

19．（证）设

$$F(x, y, z; t)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2f(t)x + 2tf'(t)x - 2f'(t)y - a^2$$
$$= 0 \qquad (1)$$

则

$$F_t(x, y, z; t) = -2f'(t)x + 2f'(t)x + 2tf''(t)x - 2f''(t)y$$
$$= f''(t)(xt - y) = 0$$

因为对任意 t 一般地 $f'(t) \neq 0$，所以

$$F_t(x, y, z; t) = xt - y = 0 \qquad (2)$$

将（2）式代入（1）式中得到特征线方程

$$\begin{cases} y = xt \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2f(t)x - a^2 = 0 \end{cases}$$

20．（证）为求球心坐标先把圆的方程化为极坐标式，令

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$$

则在 oxy 平面上圆的方程为

$$\rho = 2\cos\theta \qquad (1)$$

弦中点坐标为，$\left(\frac{\rho}{2},\ \theta\right)$，于是球心坐标为

$$x = \frac{\rho}{2}\cos\theta$$

$$y = \frac{\rho}{2}\sin\theta$$

$$z = 0$$

利用（1）式消去 ρ 得

$$x = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta),\quad y = \frac{1}{2}\sin 2\theta,\quad z = 0$$

则球面方程为

$$F(X,Y,Z;\theta) = \left(X - \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)^2 +$$

$$\left(Y - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 + (Z-0)^2 = \cos^2\theta$$

或整理为

$$X^2+Y^2+Z^2-X = X\cos^2\theta + Y\sin 2\theta \qquad (2)$$

微分得

$$F_\theta(X,Y,Z;\theta) = 2X\sin 2\theta - 2Y\cos 2\theta \qquad (3)$$

将（2）、（3）式两端平方消去 θ 得

$$(X^2+Y^2+Z^2-X)^2 = X^2+Y^2$$

因为球面上任一点都不是奇点，所以上式确定球面族的包络曲面。

21. （解）根据 §2 例 2 的结果，从混合积 $(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_a) = 0$ 中解出 u, v, t 的关系式再代入 $\boldsymbol{r}$ 中消去 t 即为所求包络。而

$$\boldsymbol{r}_u = \{1,\ 0,\ -a^2\}$$

$$\boldsymbol{r}_v = \{0,\ 1,\ -a\}$$

$$\boldsymbol{r}_a = \{0,\ 0,\ -2ua - v\}$$

由混合积

$$(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & -2u\alpha - v \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\alpha = -\frac{v}{2u}$$

代入 $\boldsymbol{r}$ 中得包络面

$$\boldsymbol{r} = \left\{u, \ v, \ \frac{v^2}{4u}\right\}$$

22. (解) 令

$$F(x, y, z; \alpha) = \alpha^3 + \alpha^2 x + \alpha y + z = 0 \qquad (1)$$

则
$$F_\alpha(x, y, z; \alpha) = 3\alpha^2 + 2\alpha x + y = 0 \qquad (2)$$

$$F_{\alpha\alpha}(x, y, z; \alpha) = 6\alpha + 2x = 0 \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$x = -3\alpha, \ y = 3\alpha^2, \ z = \alpha^3$$

于是脊线方程为

$$\boldsymbol{r} = \{-3\alpha, \ 3\alpha^2, \ \alpha^3\}$$

23. (解) 令

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \varphi) = (a\boldsymbol{e}(\varphi) + b\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{r} - c\varphi = 0 \qquad (1)$$

则
$$\boldsymbol{F}_\varphi(\boldsymbol{r}, \varphi) = a\boldsymbol{e}_1(\varphi)\boldsymbol{r} - c = 0 \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{F}_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{r}, \varphi) = -a\boldsymbol{e}(\varphi)\boldsymbol{r} = 0 \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式求得

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} = \frac{c}{b}\varphi \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi)\boldsymbol{r} = \frac{c}{a} \qquad (5)$$

因为 $e_1(\varphi)$ 是 oxy 平面上的圆向量函数， $\boldsymbol{k}$ 是与它垂直的 oz 轴上的单位向量，所以（4）、（5）式右端分别是 $\boldsymbol{r}$ 在 oz 轴和在 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 上的分量，所以

$$\boldsymbol{r}=\frac{c}{a}\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\frac{c}{b}\varphi\boldsymbol{k}$$

24. （证）令

$$F(x,y,z;\alpha)=\frac{x}{(a+\alpha)}+\frac{y}{(b+\alpha)}+\frac{z}{(c+\alpha)}-1=0$$

则

$$F_\alpha(x,y,z;\alpha)=-\frac{x}{(a+\alpha)^2}-\frac{y}{(b+\alpha)^2}-$$

$$-\frac{z}{(c+\alpha)^2}=0$$

$$+F_{\alpha\alpha}(x,y,z;\alpha)=\frac{2x}{(a+\alpha)^3}+\frac{2y}{(b+\alpha)^3}$$

$$+\frac{2z}{(c+\alpha)^3}=0$$

将以上三个方程联立，利用克兰姆法则及范德蒙行列式求得脊线方程为

$$x=\frac{(a+\alpha)^3}{(b-a)(c-a)},\quad y=\frac{(b+\alpha)^3}{(c-b)(a-b)},$$

$$z=\frac{(c+\alpha)^3}{(a-c)(b-c)}.$$

25. （证）依题意知球面族方程为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))^2-c^2=0 \qquad (1)$$

对上式微分得

$$-2(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))\cdot\boldsymbol{r}'(s)=0 \qquad (2)$$

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))\boldsymbol{r}''(s)-\boldsymbol{r}'(s)^2=0 \qquad (3)$$

因为

$$\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{\tau},\quad \boldsymbol{r}'(s)^2=1,\quad \boldsymbol{r}''(s)=\kappa\boldsymbol{\nu}$$

于是（2）（3）式可分别整理为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))\cdot\boldsymbol{\tau}=0 \tag{2'}$$

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{\kappa}=0 \tag{3'}$$

设脊线方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s)=m\boldsymbol{\tau}+n\boldsymbol{\nu}+P\boldsymbol{\beta} \tag{4}$$

将（4）式分别做 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$ 的数量积并利用（2'）（3'）式得

$m=0$，$n=\frac{1}{\kappa}$，为求 P 将（4）式两端平方并利用（1）式

及 $m=0$，$n=\frac{1}{\kappa}$ 得

$$P=\pm\sqrt{c^2-\frac{1}{\kappa^2}}$$

于是脊线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+\frac{\boldsymbol{\nu}}{\kappa}\pm\sqrt{c^2-\frac{1}{\kappa^2}}\,\boldsymbol{\beta}$$

26. （证）设

$$F(x,y,z;\alpha)=\alpha^2x+\alpha y+z=0$$

则 $$F_\alpha(x,y,z;\alpha)=2\alpha x+y=0$$

$$F_{\alpha\alpha}(x,y,z;\alpha)=2x=0$$

由以上三式解得

$$x=y=z=0$$

即脊线方程是一点（坐标原点），因此包络面的脊线退化为一点。

27. （解）设

$$\boldsymbol{r}=\{2au\cos v,\ 2bu\sin v,\ 2u^2(a\cos^2v+b\sin^2v)\}$$

对 u, v 求偏导得

$$\boldsymbol{r}_u=\{2a\cos v,\ 2b\sin v,\ 4u(a\cos^2v+b\sin^2v)\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-2au\sin v,\ 2bu\cos v,\ 4(b-a)u^2\sin v\cos v\}$$

于是 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=-abu\{2u\cos v,\ 2u\sin v,\ -1\}$

从而曲面在任一点的切平面方程可写成

$$2u\cos v(X-2au\cos v)+2u\sin v(Y-2bu\sin v)-$$
$$[Z-2u^2(a\cos^2v+b\sin^2v)]=0$$

因为要求切平面与 oxy 平面构成定角，则有

$$\frac{2u\cos v\times 0+2u\sin v\times 0+(-1)\times 1}{\sqrt{(2u\cos v)^2+(2u\sin v)^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=C$$

其中 $C=\cos\theta\neq 0$ 是常数$(-1\leqslant C\leqslant 1)$。由上式解得

$$u=\pm\frac{\sqrt{1-c^2}}{2c}=\text{常数}$$

由此可知所求的曲线就是曲因上满足 $u=$ 常数时的切点的轨迹，其方程为

$$\boldsymbol{r}=\{2au_0\cos v,\ 2bu_0\sin v,2u_0^2(a\cos^2v+b\sin^2v)\}$$

为求脊线方程，将切平面方程（1）对 v 微分得

$$F_v=-2ux\sin v+2uy\cos v+4u^2(a-b)\sin v\cos v=0 \quad (2)$$

及 $F_{vv}=-2ux\cos v-2uy\sin v+4u^2(a-b)(\cos^2v-\sin^2v)=0$ (3)

由（1）、（2）、（3）式求得脊线方程为

$$x=2(a-b)u\cos^3v$$
$$y=2(a-b)u\sin^3v$$
$$z=2u^2[(a-2b)\cos^2v+(b-2a)\sin^2v]$$

其中 a,b,u 为常数

28. （证）只须证明包络面的脊线是一点即可，令

$$F(x,\ y,z;\alpha)=\alpha^2x+2\alpha y+2z-2\alpha=0 \quad (1)$$

于是 $F_a(x,y,z;a) = 2ax + 2y - 2 = 0$ （2）

$$F_{aa}(x, y, z; a) = 2x = 0$$

由以上三个方程解得

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0$$

即包络面的脊线退化为一点，因此包络面为锥面。

由（2）式得

$$a = \frac{1-y}{x}$$

代入（1）式中并整理得

$$-y^2 + 2zx + 2z - 1 = 0.$$

29. （解）由第一章§4知，曲线在点 s_1 处的法平面方程为

$$\boldsymbol{\tau}(s)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(s)) = 0 \qquad (1)$$

于是对 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{\tau}$ 求导得

$$\kappa[\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}) - R] = 0 \qquad \left(R = \frac{1}{\kappa}\right) \qquad (2)$$

及 $$\kappa'[\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}) - R] + \kappa[(-\kappa\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau} - R'] = 0 \qquad (3)$$

由以上三式得

$$\chi\boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}) - R' = 0 \qquad (4)$$

另外，由（1）式知 $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\tau}$，即 $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}$ 平行于 $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ 所确定的平面，从面有

$$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r} = m\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{\beta} \qquad (5)$$

其中 m，n 是待定的分解系数。为求出它们，将（5）式代入（4）式中，得

$$n = qR' \qquad \left(q = \frac{1}{\chi}\right)$$

再由（5）、（2）式可求得

$$m = R$$

于是，脊线方程为

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\tau} + qR'\boldsymbol{\beta}$$

30. （证）设定倾曲线的基本向量组为 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$，对应的脊线的基本向量组为 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\beta}$，由上题结果知

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\tau} + R'\boldsymbol{r} + R(-\kappa\boldsymbol{\tau} + \chi\boldsymbol{\beta}) + qR''\boldsymbol{\beta} - qR'\chi\boldsymbol{\nu} + q'R'\boldsymbol{\beta}$$

$$= \boldsymbol{\tau} + R'\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau} + \frac{R}{q}\boldsymbol{\beta} + qR''\boldsymbol{\beta} - R'\boldsymbol{\nu} + q'R'\boldsymbol{\beta}$$

$$= \left(\frac{R}{q} + qR'' + q'R'\right)\boldsymbol{\beta}$$

若设括号内各项之和为 α，则有

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \alpha\boldsymbol{\beta} \tag{1}$$

再求导得

$$\boldsymbol{\tau}_1' = \kappa_1\boldsymbol{\nu}_1 = \alpha'\boldsymbol{\beta} + \alpha(-\chi\boldsymbol{\nu})$$

即 $$\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\alpha'}{\kappa_1}\boldsymbol{\beta} - \frac{\alpha\chi}{\kappa_1}\boldsymbol{\nu}$$

则 $$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}_1 = \alpha\boldsymbol{\beta} \times \left(\frac{\alpha'}{\kappa'}\boldsymbol{\beta} - \frac{\alpha_x}{\kappa_1}\boldsymbol{\nu}\right) = \frac{\alpha^{tx}}{\kappa_1}\boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

由（1），（2）两式可知 $\boldsymbol{\tau}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线，$\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 共线，又因为它们都是单位向量，所以有

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \pm\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\beta}_1 = \pm\boldsymbol{\tau}$$

且 $$\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1 = \pm\boldsymbol{\tau} \times (\pm\boldsymbol{\beta}) = \pm\boldsymbol{\nu}$$

由此可知脊线的切线副法线的旋转角分别等于原曲线的副法线切线的旋转角，即由

$$\boldsymbol{\tau}_1' = \pm\boldsymbol{\beta} \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}' = \pm\boldsymbol{\tau}'$$

得 $$\kappa_1 = \pm\chi \text{和 } \kappa = \pm\chi,$$

因为原曲线是定倾曲线，由定倾曲线的性质知

$$\frac{\kappa}{\kappa_1}=\pm\frac{\chi_1}{\chi}=\text{常数}$$

所以其脊线也是定倾曲线。

31.（证）曲线在点 t 处的切向量为

$$\dot{r}=\{a,\ 2bt,\ 3ct^2\}$$

于是切线方程为

$$\frac{x-at}{a}=\frac{y-bt^2}{2bt}=\frac{z-ct^3}{3ct^2}$$

设它们的比值为 u，则有

$$x=a(t+u),\ y=bt(t+2u),\ z=ct^2(t+3u)$$

由上面三式消去 t，u，得切线曲面方程

$$4\frac{x^3z}{a^3c}-3\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-6\frac{xyz}{abc}+4\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

由此可知切线曲面为四次代数曲面。

32.（证）因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\left\{u^2+\frac{1}{3}v,\ 2u^3+uv,\ u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}\\&=\{u^2,\ 2u^3,\ u^4\}+v\left\{\frac{1}{3},\ u,\ \frac{2}{3}u^2\right\}\end{aligned}$$

当 $u=$ 常数时，v 曲线是直母线，所以曲面是直纹面，于是令

$$\boldsymbol{\rho}(u)=\{u^2,\ 2u^3,\ u^4\}$$

$$\boldsymbol{\tau}(u)=\left\{\frac{1}{3},\ u,\ \frac{2}{3}u^2\right\}$$

则

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}(u)=\{2u,\ 6u^2,\ 4u^3\}$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}(u)=\left\{0,\ 1,\ \frac{4}{3}u\right\}$$

而 $(\dot{\rho}, \tau, \dot{\tau}) = \begin{vmatrix} 2u & 6u^2 & 4u^3 \\ \frac{1}{3} & u & \frac{2}{3}u^2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}u \end{vmatrix} = 0$

由§5例可知曲面 r 是可展曲面。

33. (证) 先求曲面在任一点的法向量

$$\because r_u = \{-\sin v,\ \cos v,\ 1\}$$

$$r_v = \{-2\sin v - (u+v)\cos v,\ 2\cos v - (u+v)\sin v,\ 2\}$$

$$\therefore n = r_u \times r_v$$

$$= \{(u+v)\sin v,\ -(u+v)\cos v,\ u+v\}$$

$$= (u+v)\{\sin v,\ -\cos v,\ 1\}$$

即法向量 n 平行于向量

$$n_1 = \{\sin v,\ -\cos v,\ 1\}$$

而当 $v=$ 常数，即在 u 线上时 n_1 为固定向量，从而沿 u 线上任一点的切平面的法向量均与 n_1 共线，于是 u 为直母线，由可展曲面定义知，曲面是可展曲面。

34. (证) 将二曲线化为参数式

$$x = u,\quad y = \pm 2\sqrt{au},\quad z = 0 \tag{1}$$

和 $$x = 0,\quad y = \pm 2\sqrt{bv},\quad z = v \tag{2}$$

在两曲线上各取一点，则连接这两点的直线的方向向量为

$$\{u,\ \pm(2\sqrt{au} - 2\sqrt{bv}),\ -v\}$$

于是直线方程为

$$\begin{cases} x = u + tu \\ y = \pm 2\sqrt{au} + t(\pm 2\sqrt{au} \mp 2\sqrt{bv}) \\ z = -tv \end{cases} \tag{3}$$

或写成 $$r = \rho(u) + t\tau(u)$$

$$\rho_{(u)} = \{u, \pm 2\sqrt{au}, 0\}$$

$$\tau_{(u)} = \{u, \pm 2\sqrt{au} \mp 2\sqrt{bv}, -v\}$$

若把 v 看作 u 的函数，则当 u，t，变动时（3）式形成一可展曲面，从而必有

$$(\dot{\rho}, \tau, \dot{\tau}) = \begin{vmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{a}{u}} & 0 \\ u & \pm 2\sqrt{au} \mp 2\sqrt{bv} & -v \\ 1 & \pm 2\sqrt{\frac{a}{u}} - 2\sqrt{\frac{b}{v}}v' & -v' \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\dot{v} = \frac{dv}{du}\right)$$

展开后得

$$\sqrt{bv}\,\dot{v} = \sqrt{au}\,\dot{v}$$

从而得

$$bv = au \text{ 或 } \dot{v} = 0$$

当 $\dot{v}=0$ 即 $v=$常数时，直线只通过曲线（2）的一定点，故此种情形除外．把 $bv=au$ 代入（3）式得

$$x = u + tu$$

$$y = \pm 2\sqrt{au}$$

$$z = -t\frac{a}{b}u$$

消去 t，u 得

$$y^2 = 4ax + 4bz$$

由此可知在二曲线上滑动的直线轨迹是一柱面．

35．（证）设 $\rho(u) = \{au, bu, 0\}$，$\tau(u) = \{a, -b, u\}$

于是 $\quad r = \rho(u) + v\tau(u)$

当 u = 常数时，因为 $\rho(u)$ 与 $\tau(u)$ 是固定向量，所以 v 曲线是曲面的直母线，而

$$\dot{\rho}(u)=\{a,\ b,\ 0\}$$

$$\dot{\tau}(u)=\{0,\ 0,\ 1\}$$

$$(\dot{\rho}(u),\ \tau(u),\ \dot{\tau})=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -b & u \end{vmatrix}=2ab\neq 0$$

若设 $\rho(v)=\{av,\ -bv,\ 0\}$，$\tau(v)=\{a,\ b,\ v\}$

则 $$r=\rho(v)+u\tau(v)$$

当 v = 常数时，u 曲线是直母线，而

$$\dot{\rho}(v)=\{a,-b,\ 0\}$$

$$\dot{\tau}(v)=\{0,0,1\}$$

$$(\dot{\rho}(v),\dot{\tau}(v),\tau)=\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & v \end{vmatrix}=-ab\neq 0$$

由此可知双曲抛物面不是可展曲面。

36. （证）已知曲线 $r(s)$ 的主法线和副法线方程分别为

$$\rho(s)=r(s)+\lambda\nu(s) \qquad (1)$$

和 $$\rho(s)=r(s)+\lambda\beta(s) \qquad (2)$$

当以 s 和 λ 为参数曲线时，（1）式和（2）式分别表示曲线 $r(s)$ 的主法线曲面和副法线曲面，由于

$$\begin{aligned}(r'(s),\ \nu(s),\ \nu'(s))&=(\tau\times\nu)(-\kappa\tau+\chi\beta)\\&=(\tau\times\nu)\beta\cdot\chi\\&=\chi\end{aligned}$$

和

$$(\boldsymbol{r}'(s),\ \boldsymbol{\beta}(s),\ \boldsymbol{\beta}'(s)) = (\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\beta})(-\chi\boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\nu}\cdot\chi$$
$$=\chi$$

因为 $\chi\neq 0$，所以由以上二式知$\boldsymbol{r}(s)$的主法线曲面和副法线曲面都不是可展曲面。

37．（解）依题意知，所求的可展曲面应当是沿可展 曲 面上某条曲线的切平面族的包络。若设

$$x = u,\ y = v$$

则已知曲面方程和曲线方程分别为

$$\boldsymbol{r} = \left\{u,\ v,\ \frac{uv}{a}\right\} \tag{1}$$

和
$$\boldsymbol{r} = \left\{u,\ \frac{u^2}{b},\ \frac{u^3}{ab}\right\} \tag{2}$$

对曲面方程（1）求导得

$$\boldsymbol{r}_u = \left\{1,\ 0,\ \frac{v}{a}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_v = \left\{0,\ 1,\ \frac{u}{a}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v = \left\{-\frac{v}{a},\ -\frac{u}{a},\ 1\right\}$$

于是曲面（1）沿曲线（2）的切面方程为

$$-\frac{v}{a}(x-u) - \frac{u}{a}\left(y-\frac{u^2}{b}\right) + z - \frac{u^3}{ab} = 0$$

或
$$u^2x + buy - abz - u^3 = 0 \tag{3}$$

其中 u 为切面的族参数，对 u 求导得

$$2ux + by - 3u^2 = 0 \tag{4}$$

$$2x - 6u = 0 \tag{5}$$

由（3）、（4）、（5）式求得脊线方程为

$$x=3u,\quad y=\frac{-3u^2}{b},\quad z=\frac{-u^3}{ab}$$

38.（解） $\because \dot{\boldsymbol{r}}=\{3,\ 6t,\ 6t^2\}$

$$=3\{1,\ 2t,\ 2t^2\}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=6\{0,\ 1,\ 2t\}$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=3\sqrt{1+4t^2+4t^4}$$

$$=3(2t^2+1)$$

$$S=\int\frac{ds}{dt}dt=\int|\dot{\boldsymbol{r}}|\ dt=\int 3(2t^2+1)dt=2t^3+3t$$

所以当 $t=0$ 时，$s=0$。

$$\tau=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{1}{3(2t^2+1)}\times 3\{1,\ 2t,\ 2t^2\}$$

$$=\frac{1}{2t^2+1}\{1,\ 2t,\ 2t^2\}$$

代入曲线的渐伸线方程

$$\rho=\boldsymbol{r}+(s_0-s)\tau$$

中，得

$$\rho=\{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}+\frac{s_0-s}{2t^2+1}\{1,\ 2t,\ 2t^2\}$$

$$=\frac{1}{2t^2+1}\{4t^3+2t_0^3+3t_0,\ 2t^4-3t^2+4tt_0^3+6tt_0,\ -2t^3+4t^2t_0^3+6t^2t_0\}.$$

39.（解）因为只求椭圆所在平面上的一条，所以$\varphi=0$ 于是这条渐屈线方程为

$$\rho=\boldsymbol{r}+R\nu \tag{1}$$

由此可知，（1）式确定的渐屈线是原曲线的曲率中心的轨

迹。设椭圆方程为

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t$$

则
$$\dot{x}=-a\sin t,\ \dot{y}=b\cos t$$

$$\ddot{x}=-a\cos t,\ \ddot{y}=-b\sin t$$

代入平面曲线的曲率中心公式

$$X=x+\dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{x}},\quad Y=y+\dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}$$

得
$$X=a\cos t-b\cos t\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab\cos^2 t+ab\sin^2 t}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$

$$Y=b\sin t-a\sin t\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab\cos^2 t+ab\sin^2 t}=\frac{a^2-b^2}{-b}\sin^3 t$$

即椭圆所在平面上的渐屈线方程为

$$X=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\quad Y=\frac{a^2-b^2}{-b}\sin^3 t$$

40.（解）设圆柱螺线方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$$

则
$$\dot{\boldsymbol{r}}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$$

$$\frac{ds}{dt}=|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\,t \tag{※}$$

于是
$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'=\left\{-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

代入渐伸线方程

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+(s_0-s)\boldsymbol{\tau}$$

并利用(※)式得

$$\rho=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}+(t_0-t)\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$$
$$=\{a[\cos t-(t_0-t)\sin t],\ a[\sin t+(t_0-t)\cos t],\ bt_0\}$$

由于 t_0 是定数，因而由上式可知，圆柱螺线的渐伸线在平面

$$z=bt_0$$

上，所以都是平面曲线，且它们所在的平面与oz轴，即圆柱的轴垂直。

41. （证）设曲线 c 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

则其渐伸线方程为

$$\boldsymbol{\rho}(s_1)=\boldsymbol{r}(s)+(s_0-s)\boldsymbol{\tau}(s)\qquad(\text{设}S_1\text{为渐伸线的弧长})$$

于是有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_1}=\boldsymbol{r}_1'=\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\ \frac{ds}{ds_1}=(\boldsymbol{\tau}+(s_0-s)\ \boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau})\ \frac{ds}{ds_1}$$

$$=\kappa\ (s_0-s)\ \boldsymbol{\nu}\frac{ds}{ds_1}$$

即 $$\boldsymbol{\tau}_1=\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds_1}=\kappa(S_0-S)\boldsymbol{\nu}\frac{ds}{ds_1}\qquad\left(\frac{ds}{ds_1}\neq 0\right)$$

由此可知曲线C的渐伸线的切向量与C的主法线向量共线，即 $\boldsymbol{\rho}(s_1)$ 的切线与 $\boldsymbol{r}(s)$ 的主法线平行。

42. （证）设曲线C的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

则渐伸线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+(s_0-s)\boldsymbol{\tau}$$

于是有

$$\boldsymbol{\tau}_1(s_1)=\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds_1}=\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\ \frac{ds}{ds_1}=\kappa\ (s_0-s)\ \boldsymbol{\nu}\frac{ds}{ds_1}$$

因为 $|\tau_1(s_1)|=1$，若对 s，s_1 按同一方向微分，则有

$$\frac{ds}{ds_1}=\frac{1}{\kappa|s_0-s|}$$

$$\mathbf{T}_1(S_1)=\mathbf{V}$$

微分得

$$\frac{d\mathbf{T}_1}{ds_1}=\kappa_1\mathbf{r}_1=\frac{d\mathbf{T}}{ds}\ \frac{ds}{ds_1}=(-\kappa\mathbf{T}+\chi\boldsymbol{\beta})\ \frac{ds}{ds_1}$$

于是有

$$\kappa_1{}^2=(\kappa^2+\chi^2)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

$$=\frac{\kappa^2+\chi^2}{(\kappa|s_0-s|)^2}$$

由于 $\kappa_1>0$，所以

$$\kappa_1=\frac{\sqrt{\kappa^2+\chi^2}}{\kappa|s_0-s|}$$

43. （证）由前题知

$$\mathbf{T}=\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}_1=\frac{-\kappa\mathbf{T}+\chi\boldsymbol{\beta}}{\kappa_1}\ \frac{ds}{ds_1}=\frac{-\kappa\mathbf{T}+\chi\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\kappa^2+\chi^2}}$$

$$\frac{ds}{ds_1}=\frac{1}{\kappa|s_0-s|}$$

则 $$\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{T}_1\times\mathbf{r}_1=\frac{\chi\mathbf{T}+\kappa\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\kappa^2+\chi^2}}$$

微分得

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds_1}=\frac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds}\ \frac{ds}{ds_1}=-\chi_1\mathbf{V}_1$$

即 $$-\chi_1\mathbf{V}_1=\left(\frac{\chi\mathbf{T}+\kappa\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\kappa^2-\chi^2}}\right)'_s\frac{ds}{ds_1}$$

$$=\frac{-\kappa\kappa'-\chi\chi'}{(\kappa^2+\chi^2)^{\frac{3}{2}}}(\chi\tau+\kappa\beta)\frac{ds}{ds_1}+$$

$$\frac{\chi'\tau+\kappa'\beta}{(\chi^2+\kappa^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{ds}{ds_1}$$

$$=\frac{(\chi\kappa'-\kappa\chi')(-\kappa\tau+\chi\beta)}{(\kappa^2+\chi^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{ds}{ds_1}$$

于是
$$-\chi_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1=\frac{(\chi\kappa'-\kappa\chi')(-\kappa\tau+\chi\beta)(-\kappa\tau+\chi\beta)}{(\kappa^2+\chi^2)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{\kappa^2+\chi^2})\ \kappa|s_0-s|}$$

$$=\frac{\chi\kappa'-\kappa\chi'}{\kappa|s_0-s|(\kappa^2+\chi^2)}$$

所以有
$$\chi_1=\frac{k\chi'-\chi k'}{\kappa|s_0-s|(\kappa^2+\chi^2)}$$

44. （证）由前题结论知，曲线C的渐伸线的挠率为

$$\chi_1=\frac{\kappa\chi'-\chi\kappa'}{\kappa|s_0-s|(\kappa^2+\chi^2)}$$

因为渐伸线是平面曲线的充要条件是

$$\chi_1=0$$

即
$$\kappa\chi'-\chi\kappa'=0$$

由于曲线C是空间曲线，则

$$\chi\neq0$$

而
$$\frac{\kappa\chi'-\chi\kappa'}{\chi^2}=\left(\frac{\kappa}{\chi}\right)'=0$$

所以
$$\frac{\kappa}{\chi}=C_0\ (\text{常数})$$

由第一章定倾曲线的定理知，曲线C为定倾曲线。

45. （解）把曲线用自然参数表示为

$$\boldsymbol{r}(S)=\left\{a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}s\right\}$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

于是 $$\boldsymbol{\tau}=\left\{-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right\}$$

$$\kappa\boldsymbol{\nu}=\left\{-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right\}$$

$$R=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}''|}=\left[\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}\right)^2+\left(-\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{c^2}{a}$$

$$\boldsymbol{\nu}=\left\{-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right\}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{r}=\left\{\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right\}$$

代入渐屈线方程

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\nu}+(R\,\mathrm{tg}\varphi)\boldsymbol{\beta}$$

得 $$\boldsymbol{\rho}=\left\{a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}s\right\}+\left\{-\frac{c^2}{a}\cos\frac{s}{c},\right.$$

$$\left.-\frac{c^2}{a}\sin\frac{s}{c},\ 0\right\}+\frac{c^2}{a}\mathrm{tg}\varphi\left\{\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\right.$$

$$\left.-\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right\}$$

$$=\left\{-\frac{b^2}{a}\cos\frac{s}{c}+\frac{bc}{a}\mathrm{tg}\varphi\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b^2}{a}\sin\frac{s}{c}\right.$$

$$\left.-\frac{bc}{a}\mathrm{tg}\varphi\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}s+c\cdot\mathrm{tg}\varphi\right\}$$

或写成

$$x = -\frac{b^2}{a}\cos\frac{s}{c} + \frac{bc}{a}\text{tg}\varphi\sin\frac{s}{c}$$

$$y = -\frac{b^2}{a}\sin\frac{s}{c} - \frac{bc}{a}\text{tg}\varphi\cos\frac{s}{c}$$

$$z = \frac{b}{c}s + c\text{tg}\varphi$$

其中$C = \sqrt{a^2 + b^2}$，φ 是主法线与法线 的交角。

第三章　曲面论习题解答

1、（1）（解）

$$\boldsymbol{r}=\{u+v,\ u-v,\ u^2+v^2\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,\quad 1,\quad 2u\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{1,\quad -1,\quad 2v\}$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=2(1+2u^2),\ F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=4uv,\ G=\boldsymbol{r}_v^2=2(1+2v^2)$$

所求椭圆抛物面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=ds^2=2(1+2u^2)du^2+8uvdudv+2(1+2v^2)dv^2$$

（2）（解）

$$\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av+b\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v,\ \sin v,\quad 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v,\ u\cos v,\ a\}$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1$$

$$F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=-u\sin v\cos v+u\sin v\cos v=0$$

$$G=\boldsymbol{r}_v^2=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+a^2=u^2+a^2$$

所求正螺旋面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

（3）（解）

$$\boldsymbol{r}=\{f(u),\ g(u)\ v\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{f'(u),g'(u),0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{0,\quad 0,\quad 1\}$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=f'^2(u)+g'^2(u),\ F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0,\ G=\boldsymbol{r}_v^2=1$$

所求柱面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=(f'^2(u)+g'^2(u))du^2+dv^2$$

（4）（解）

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos u\cos\alpha,\ v\sin u\cos\alpha,\ v\sin\alpha\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{-v\sin u\cos\alpha,\ v\cos u\cos\alpha,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{\cos u\cos\alpha,\ \sin u\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=v^2\cos^2\alpha,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}^2_v=1$$

所求锥面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=v^2\cos^2\alpha du^2+dv^2$$

（5）（解）

$$\boldsymbol{r}=\{f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ g(t)\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-f(t)\sin\theta,\ f(t)\cos\theta,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_t=\{f'(t)\cos\theta,\ f'(t)\sin\theta,\ g'(t)\}$$

$$E=\boldsymbol{r}_\theta^2=f^2(t),\quad F=\boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_t=0,\quad G=\boldsymbol{r}_t^2=f'^2+g'^2$$

所求旋转曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=f^2(t)d\theta^2+(f'^2+g'^2)dt^2$$

（6）（解）把一般曲面方程$z=f(x,\ y)$写成向量形式，

$$\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ f(x,\ y)\}$$

对参数 x，y 求导

$$\boldsymbol{r}_x=\{1,\ 0,\ f'_x\}$$

$$\boldsymbol{r}_y=\{0,\ 1,\ f'_y\}$$

$$E=\boldsymbol{r}_x^2=1+f'^2_x,\quad F=\boldsymbol{r}_x\boldsymbol{r}_y=f'_x\cdot f'_y,\quad G=\boldsymbol{r}'^2_y=1+f'^2_y$$

所求一般曲面 $z=f(x,\ y)$的第一基本微分形式为

$$\varphi_1=(1+f_x'^2)dx^2+2f'_xf'_ydxdy+(1+f_y'^2)dy^2$$

2.（证明）由条件可知 $\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_\theta{}^*\theta_u+\boldsymbol{r}_\varphi{}^*\varphi_u$，$\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_\theta{}^*\theta_v+\boldsymbol{r}_\varphi{}^*\varphi_v$，从而由曲面 $\boldsymbol{r}^*(\theta,\ \varphi)$的第一基本微分形式$\varphi_1{}^*(\theta,\ \varphi)$可得

$$\varphi_1^*(\theta,\ \varphi) = |dr^*|^2 = [(r_\theta^* d\theta + r_\varphi^* d\varphi)]^2$$
$$= [r_\theta^*(\theta_u du + \theta_v dv) + r_\varphi^*(\varphi_u du + \varphi_v dv)]^2$$
$$= [(r_\theta^*\theta_u + r_\varphi^*\varphi_u)du + (r_\theta^*\theta_v + r_\varphi^*\varphi_v)dv]^2$$
$$= [r_u du + r_v dv]^2 = [dr]^2$$
$$= \varphi_1(du,\ dv)$$

于是在已知条件下证得，$\varphi_1^*(d\theta,\ d\varphi) = \varphi_1(du,\ dv)$，由 $r_u = r_\theta^*\theta_u + r_\varphi^*\varphi_u$，$r_v = r_\theta^*\theta_v + r_\varphi^*\varphi_v$ 可得

$$E = r_u^2 = (r_\theta^*\theta_u + r_\varphi^*\varphi_u)(r_\theta^*\theta_u + r_\varphi^*\varphi_u)$$
$$= r_\theta^* r_\theta^* \theta_u^2 + 2r_\theta^* r_\varphi^* \theta_u\varphi_u + r_\varphi^* r_\varphi^* \varphi_u^2$$
$$= E^*\theta_u^2 + 2F^*\theta_u\varphi_u + G^*\varphi_u^2$$

同理可得

$$F = E^*\theta_u\theta_v + F^*(\theta_u\varphi_v + \varphi_u\theta_v) + G^*\varphi_u\varphi_v.$$
$$G = E^*\theta_v^2 + 2F^*\theta_v\varphi_v + G^*\varphi_v^2.$$

3．（解）$r = (u+v)e_1 + (u-v)e_2 + uve_3$

对参数 u，v 求偏导得

$$r_u = e_1 + e_2 + ve_3,\quad r_v = e_1 - e_2 + ue_3$$
$$E = r_u^2 = 2 + v^2,\quad F = r_u r_v = uv,\quad G = r_v^2 = 2 + u^2$$

则 $\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

又 $r^* = \theta e_1 + \varphi e_2 + \dfrac{1}{4}(\theta^2 - \varphi^2)e_3$

对 θ,φ 求偏导得

$$r_\theta^* = e_1 + \frac{1}{2}\theta e_3,\qquad r_\varphi^* = e_2 - \frac{1}{2}\varphi e_3$$
$$E^* = r_\theta^{*2} = 1 + \frac{1}{4}\theta^2,\qquad F^* = r_\theta^* r_\varphi^* = -\frac{1}{4}\theta\varphi$$
$$G^* = r_\varphi^{*2} = 1 + \frac{1}{4}\varphi^2$$

则 $$\varphi_1^* = \left(1 + \frac{1}{4}\theta^2\right)d\theta^2 - \left(\frac{1}{2}\theta\varphi\right)d\theta d\varphi + \left(1 + \frac{1}{4}\varphi^2\right)d\varphi^2$$

在对应点 $u=1$，$v=1$，r 与r^* 的第一基本量分别为

$$E=3,\quad F=1,\quad G=3$$

$$E^*=2,\quad F^*=0,\quad G^*=1$$

4.（解）首先求得锥面的第一基本量为

$$E=r_\theta^2=u^2,\ F=r_\theta r_u=0,\ G=r_u^2=2.$$

又 $$\frac{du}{d\theta}=\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)u,\ \frac{d\theta}{d\theta}=1.$$

从而由曲线弧长公式得

$$s=\int_0^\pi\left[E\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right)^2+2F\frac{d\theta}{d\theta}\frac{du}{d\theta}+G\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left[u^2+2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)u^2\right]^{\frac{1}{2}}d\theta=\sqrt{1+2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}\int_0^\pi u\,d\theta$$

$$=\sqrt{1+2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}\int_0^\pi e^{\theta\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)}d\theta$$

$$=\sqrt{1+2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}\cdot\left(e^{\frac{\pi\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{2}}}-1\right)$$

$$\cos\left(\frac{dr}{d\theta},r_u\right)=\frac{\frac{dr}{d\theta}r_u}{\left|\frac{dr}{d\theta}\right||r_u|}=\frac{\left(r_\theta\frac{d\theta}{d\theta}+r_u\frac{du}{d\theta}\right)r_u}{\left|r_\theta\frac{d\theta}{d\theta}+r_u\frac{du}{d\theta}\right||r_u|}$$

$$=\frac{F+G\frac{d\theta}{du}}{\sqrt{E+F\left(\frac{du}{d\theta}\right)+G\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2}\sqrt{G}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\frac{du}{d\theta}}{\sqrt{u^2+2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2}}=\frac{u\operatorname{ctg}\frac{\beta}{\sqrt{2}}}{\sqrt{u^2+2u^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\beta/\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}} \quad (常值)$$

5. (证明)坐标曲线正交的必要充分条件是 $F=0$。由已知曲面的第一基本微分形式可知 $F=0$，故证得曲面的 u 曲线与 v 曲线正交。

设任意两 v 曲线为 $u=u_1$，$u=u_2$，被任意 u 曲线 $v=v_0$ 截得的弧长为 d，则

$$d=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\left(\frac{du}{du}\right)^2+f(uv_0)\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du$$

由于 $v=v_0$（常数），所以 $\frac{dv}{du}=0$，$\frac{du}{du}=1$，则上式为

$$d=\int_{u_1}^{u_2}du=u_2-u_1 \quad (定值)$$

6. (解)由弧长公式及已知条件 $u=v$，$ds^2=du^2+\operatorname{sh}^2u\,dv$ 可得

$$s=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{du^2+\operatorname{sh}^2u\,dv^2}$$

$$=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2u}\,du \quad (因\ u=v，故\ du=dv)$$

$$=\int_{u_1}^{u_2}\operatorname{ch}u\,du=\operatorname{sh}u_2-\operatorname{sh}u_1$$

7. (证明) 由两向量夹角公式可得

$$\cos\alpha=\frac{(\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v)(\lambda'\boldsymbol{r}_u+\mu'\boldsymbol{r}_v)}{|\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v||\lambda'\boldsymbol{r}_u+\mu'\boldsymbol{r}_v|}$$

$$=\frac{\lambda\lambda'\boldsymbol{r}_u^2+(\lambda\mu'+\mu\lambda')\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v+\mu\mu'\boldsymbol{r}_v^2}{\sqrt{\lambda^2\boldsymbol{r}_u^2+2\lambda\mu\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v+\mu^2\boldsymbol{r}_v^2}\sqrt{\lambda'^2\boldsymbol{r}_u^2+2\lambda'\mu'\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v+\mu'^2\boldsymbol{r}_v^2}}$$

$$=\frac{E\lambda\lambda'+F(\lambda\mu'+\lambda'\mu)+G\mu\mu'}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}\sqrt{E\lambda'^2+2F\lambda'\mu'+G\mu'^2}}$$

8. （解）关于曲线$u+v=0$，令$u=u_1, v=v_1$，则$du_1=-dv_1$。关于曲线 $u-v=0$，令 $u=u_2$，$v=v_2$，则 $du_2=dv_2$。设其交角为θ，则二曲线的交角余弦为

$$\cos\theta=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2+2Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}}$$

由 $\varphi_1=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ 可知

$E=1$，$F=0$，$G=u^2+a^2$，代入上式得

$$\cos\theta=\frac{du_1du_2+(u^2+a^2)dv_1dv_2}{\sqrt{du_1^2+(u^2+a^2)dv_1^2}\sqrt{du_2^2+(u^2+a^2)dv_2^2}}$$

$$=\frac{-dv_1dv_2+(u^2+a^2)dv_1dv_2}{\sqrt{dv_1^2+(u^2+a^2)dv_1^2}\sqrt{dv_2^2+(u^2+a^2)dv_2^2}}$$

$$=\frac{(u^2+a^2+1)dv_1dv_2}{(\sqrt{u^2+a^2+1}\sqrt{u^2+a^2+1})dv_1dv_2}$$

$$=\frac{u^2+a^2-1}{u^2+a^2+1}$$

把曲线$u+v=0$与 $u-v=0$的交点的曲线坐标 $u=0, v=0$代入上式得二曲线的交角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{u^2+a^2-1}{u^2+a^2+1}\Bigg|_{\substack{u=0\\v=0}}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

9. （解）曲面上曲线正交的必要充分条件为

$$Edudu^*+F(dudv^*+du^*dv)+Gdvdv^*=0$$

即
$$E\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{du^*}{dv^*}\right)+F\left(\frac{du}{dv}+\frac{du^*}{dv^*}\right)+G=0$$

由已知曲线族的微分方程$Adu+Bdv=0$可知$\frac{du}{dv}=-\frac{B}{A}$，代入上式得

$$-E\left(\frac{B}{A}\right)\frac{du^*}{dv^*}+F\left(\frac{du^*}{dv^*}\right)-\frac{B}{A}+G=0$$

整理可得已知曲线族的正交轨线的微分方程为

$$(AF-EB)du^*+(AG-FB)dv^*=0$$

10. （证明）对于任意曲面$r(u,\ v)$的u曲线为$r\ (u,v_0)$，v曲线为 $r(u_0\ v)$. 对于 u曲线 $r(u\ v_0)$ 有 $du\neq0$, $dv=0$. 于是有

$$\cos\theta=\frac{Edudu^*+F(dudv^*+du^*dv)+Gdvdv^*}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{Edu^{2*}+2Fdu^*dv+Gdv^{2*}}}$$

$$=\frac{Edudu^*+Fdudv^*}{\sqrt{E}\ duds^*}$$

$$=\frac{Edu^*+Fdv^*}{\sqrt{E}\ ds^*}$$

对于 v曲线 $r(u_0v)$有 $du=0$, $dv\neq0$于是有

$$\cos\theta=\frac{Edudu^*+F(dudv^*+du^*dv)+Gdvdv^*}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{Fdu^{2*}+2Fdu^*dv^*+Gdr^{2*}}}$$

$$=\frac{Fdu^*dv+Gdvdv^*}{\sqrt{G}\ dv\ ds^*}$$

$$=\frac{Fdu^*+Gdv^*}{\sqrt{G}\ ds^*}$$

11. （证明）设$\frac{du^*}{dv^*}$是平分曲面上坐标曲线间夹角的曲线方向，那么根据上题结果必有

$$\frac{Edudu^*+Fdudv^*}{\sqrt{Edu^2}\ ds^*}=\pm\frac{Fdu^*dv+Gdvdv^*}{\sqrt{Gdv^2}\ ds^*}$$

即 $$\frac{Edu^* + Fdv^*}{\sqrt{E}} = \pm\frac{Fdu^* + Gdv^*}{\sqrt{G}}$$

又因坐标曲线间的两族分角线是正交曲线，所以$F=0$，于是上式为

$$\frac{Edu^*}{\sqrt{E}} = \pm\frac{Gdv^*}{\sqrt{G}}$$

整理得所求结果为

$$\sqrt{E}\ du^* \pm \sqrt{G}\ dv^* = 0$$

12. (解)首先求正螺旋面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v, av\}$，的 第一基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$$

已知曲线的微分方程为$du=\sqrt{u^{2*}+a^2}dv$,

即 $$\frac{du}{dv}=\sqrt{u^{2*}+a^2}$$

把所求结果代入曲线正交条件方程

$$Edudu^* + F(dudv^* + du^*dv) + Gdvdv^* = 0$$

即 $$E\left(\frac{du}{dv}\right)\left(\frac{du^*}{dv^*}\right) + F\left(\frac{du}{dv} + \frac{du^*}{dv^*}\right) + G = 0$$

中得 $$\sqrt{u^{2*}+a^2}\frac{du^*}{dv^*} + u^2 + a^2 = 0$$

于是 $$du^* = -\sqrt{u^{*2}+a^2}\ dv^*$$

这就是所求正交轨线的微分方程，积分得正交轨线族为

$$u+\sqrt{u^2+a^2} = ce^{-v}\ (c为积分常数)$$

13. (解) 首先求得旋转抛物面 $x=u\cos v,\ \ y=u\sin v,$ $z=\frac{1}{2}u^2$ 的第一基本量为

$$E=1+u^2,\quad F=0,\quad G=u^2$$

对于u曲线有 $dv=0$,对于 v 曲线有$du=0$,，由所求曲线与u曲线，v曲线之间的夹角相等，并利用夹角的余弦公式可得

$$\frac{(1+u^2)du\delta u}{\sqrt{(1+u^2)du^2}\sqrt{(1+u^2)\delta u^2+u^2\delta v^2}}=$$

$$\frac{u^2dv\delta v}{\sqrt{udv^2}\sqrt{(1+u)^2\delta u^2+u^2\delta v^2}}$$

化简后得

$$\delta v=\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\delta u$$

积分得

$$v=\pm\left(\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\sqrt{1+u^2}+1}\right)+c\text{(积分常数)}$$

(此题可利用11题结果直接可求得，这里δu,与δv,相当于du^*, dv^*。)

14．（解）首先求得已知曲面的第一基本量为

$$E=\frac{u^2}{u^2-a^2},\qquad F=0,\quad G=u^2$$

设所求曲线的方向为$\delta u:\delta v$. 对于已知曲面的 u曲线 $dv=0$，并利用夹角的余弦公式得

$$\cos\theta=\frac{\frac{u^2}{u^2-a^2}du\ \delta u}{\sqrt{\frac{u^2}{u^2-a^2}du^2}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-a^2}\delta u^2+u^2\delta v^2}}$$

即 $$1-\cos^2\theta\frac{u^2}{u^2-a^2}\ \delta u^2=(\cos^2\theta)u^2\delta v^2$$

整理得 $$\delta v=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{u^2-a^2}}\delta u$$

积分得

$$v = \mathrm{tg}\theta \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|+c \quad \text{（积分常数）}$$

15.（解）：把已知抛物面的方程 $z=mxy$ 写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, mxy\}$$

求得抛物面的第一基本量为

$$E=1+m^2y^2, \quad F=m^2xy, \quad G=1+m^2x^2$$

对于抛物面 $z=mxy$的直母线之一：y曲线有

$$\delta x=0, \quad \delta y\neq 0$$

根据曲线正交条件方程

$$Edx\delta x+F(dx\delta x+dy\delta y)+Gdy\delta y=0$$

可得 $\quad (Fdx+Gdy)\delta y=0$

因为 $\delta y\neq 0$，所以由上式可知

$$Fdx+Gdy=0$$

即 $\quad m^2xydx+(1+m^2x^2)dy=0$

分离变量得

$$\frac{m^2x}{1+m^2x^2}dx=-\frac{1}{y}dy$$

积分得 $\quad \left(x^2+\frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}y=c_1$

或 $\quad (1+m^2x^2)y^2=c \quad (c=c_1^2 \text{ 积分常数})$

注意到抛物面 $z=mxy$ 的另一族直母线x曲线与y曲线的对称性可得另一族正交轨线的方程为 $(1+m^2y^2)x^2=c$ （积分常数）

16.（解）设球面的方程为

$$\boldsymbol{r}=a\{\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\theta+\boldsymbol{e}_3\sin\theta\} \quad (\text{其中}\boldsymbol{e}(\varphi)=\boldsymbol{e}_1\cos\varphi+\boldsymbol{e}_2\sin\varphi)$$

则 $\quad \boldsymbol{r}_\theta=a\{-\boldsymbol{e}(\varphi)\sin\theta+\boldsymbol{e}_3\cos\theta\}$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=a\{\boldsymbol{e}'(\varphi)\cos\theta\}$$

所求球面的第一基本量为

$$E=a^2,\ F=0,\ G=a^2\cos^2\theta$$

对于球面的子午线 θ曲线有$\varphi=$常数， $\delta\varphi=0$。设所求曲线与球面子午线的交角为α,则由曲线交角的余弦公式得

$$\cos\alpha=\frac{a^2d\theta\delta\theta}{\sqrt{a^2d\theta^2+a^2\cos\theta d\varphi^2}\sqrt{a^2\delta\theta^2}}$$

$$=\frac{d\theta}{\sqrt{d\theta^2+\cos^2\theta d\varphi^2}}$$

化简后得 $\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\theta d\varphi^2}{d\theta^2}$

由于 α是两曲线的交角$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$。于是令

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\theta d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{\beta}$$

则 $$\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\beta d\varphi$$

积分得所求曲线方程为

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=ce^{\beta\varphi}\ (c\text{是积分常数})\ 。$$

17.（解）因为二次方程 $Adu^2+2Bdudv+cdv^2=0$ 关于$du:dv$ 存在两个解，不妨设为$\dfrac{du}{dv}$，$\dfrac{\delta u}{\delta v}$，于是

$$Adu^2+2Bdudv+cdv^2=(A'du+B'dv)(C'du+D'dv)=0$$

即 $$A'du+B'dv=0$$
$$C'du+D'dv=0$$

从面解得$\dfrac{du}{dv}=B':(-A')$，$\delta u:\delta v=D':(-C')$

若这两个方向是曲面 $r(u\ v)$ 上正交曲线的方向，则这两个方向必满足正交条件

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0$$

即
$$EB'D'-F(B'C'+D'A')+GA'C'$$
$$=EC-2FB+GA=0$$

18. （解）把曲面方程 $z=f(x, y)$ 写成向量方程，并求其第一基本量。

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, f(x, y)\}$$
$$\boldsymbol{r}_x=\{1, 0, f'_x\}$$
$$\boldsymbol{r}_y=\{0, 1, f'_y\}$$
$$E=\boldsymbol{r}_x^2=1+f_x'^2,\ F=\boldsymbol{r}_x\boldsymbol{r}_y=f'_xf'_y,\ G=\boldsymbol{r}_y^2=1+f_y'^2$$

把上面计算结果代入曲面面积公式可得

$$s=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D\sqrt{(1+f_x'^2)(1+f_y'^2)-(f'_xf'_y)^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy$$

19. （解）首先求环面的第一基本量。

$$\boldsymbol{r}=(b+a\sin\varphi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\varphi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\varphi)\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{r}_\theta=-(b+a\sin\varphi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\varphi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{r}_\varphi=(a\cos\varphi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(a\cos\varphi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(a\sin\varphi)\boldsymbol{e}_3$$
$$E=\boldsymbol{r}_\theta^2=(b+a\sin\varphi)^2,\ F=\boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_\varphi=0,\ G=\boldsymbol{r}_\varphi^2=a^2$$

把所求环面的第一基本量代入曲面面积计算公式并注意到 $0<\theta\leqslant2\pi$，$0<\varphi\leqslant2\pi$，有

$$S=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}a(b+a\sin\varphi)\,d\varphi\right)d\theta$$

$= 4ab\pi^2$

20. (解)设圆锥面的方程为

$\boldsymbol{r} = \{v\cos\varphi,\ v\sin\varphi, v\text{ctg}\alpha\}$,求第一基本量,

$\boldsymbol{r}_v = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \text{ctg}\alpha\}$

$\boldsymbol{r}_\varphi = \{-v\sin\varphi,\ v\cos\varphi,\ 0\}$

$E = \cos^2\alpha,\ \ F = 0,\ \ G = v^2$

求得圆锥面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = \cos^2\alpha dv^2 + v^2 d\varphi^2$$

由于圆锥曲面的直母线为 v曲线，从面 $d\varphi = 0$ $dv \neq 0$，于是锥直母线的弧长微分为

$$ds_1 = \sqrt{\cos^2\alpha dv^2}$$

对于已知曲线 $v = ce^{m\varphi}$关于参数微分有

$$\delta v = cme^{m\varphi}\delta\varphi = mv\delta\varphi$$

对于已知曲线的弧长微分为

$$ds_2 = \sqrt{E\delta v^2 + G\delta\varphi^2}$$

$$= \sqrt{(m^2v^2\cos^2\alpha + v^2)\delta\varphi^2}$$

把以上计算结果代入曲线的交角公式有

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(dv\delta\varphi + \delta v d\varphi) + Gd\varphi\delta\varphi}{ds_1\ ds_2}$$

$$= \frac{Edv\delta v}{ds_1 ds_2}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha dv)(mv\delta\varphi)}{\sqrt{\cos^2\alpha dv^2}\sqrt{(m^2v^2\cos^2\alpha + v^2)\delta\varphi^2}}$$

$$= \frac{mv\cos^2\alpha\delta\varphi dv}{mv\cos\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + 1}\ dv\delta\varphi}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+1}}=c\ (c\ 为常数)$$

证得已知曲线 $v=ce^{mv}$ 与圆锥的直母线的交角为常数。

21. (解)由已知曲面的第一基本微分形式可知曲面的第一基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$$

求得已知曲面上三条曲线 $u=\pm\frac{1}{2}av$，$v=1$相交于下列诸点：

$A(u=0,\ v=0)$, $B\left(u=\frac{a}{2},\ v=1\right)$, $C\left(u=-\frac{a}{2},\ v=1.\right)$

曲面上三条曲线弧的参数方程与其参数微分，弧长微分分别为

曲线：$\widehat{AB}$：方程为，

$$u=\frac{1}{2}av^2,\ du_1=avdv_1.$$

$$ds_1=\frac{a}{2}(v^2+2)dv$$

曲线 $\widehat{BC}$：方程为 $v=1$，$dv_2=0$，$ds_2=du$。

曲线 $\widehat{AC}$：方程为 $u=-\frac{1}{2}av^2$，$du_3=-avdv_3$.

$$ds_3=\frac{1}{2}a(v^2+2)dv$$

1° 首先求曲线三角形 ABC的周长 L。

$$L=\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{AC}$$

$$\widehat{AB}=\widehat{AC}=\int_{v=0}^{v=1}ds=a\int_0^1\left(\frac{1}{2}v^2+1\right)dv=\frac{7}{6}a$$

$$\widehat{BC}=\int_{u=-\frac{a}{2}}^{u=\frac{a}{2}} ds=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} du=a$$

于是曲线三角形 ABC 的周长为

$$L=\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{AC}=2\frac{7}{6}a+a=\frac{10}{3}a$$

2° 求曲线三角形的三个内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$； $\angle A$ 是 AC曲线与AB曲线的交角，由曲线的交角公式

$$\cos\theta=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{ds_1\ ds_2}$$

有 $$\cos A=\frac{Edu_1du_3+Gdv_1dv_3}{ds_1\ ds_3}$$

$$=\frac{(avdv_1)(-avdv_3)+(u^2+a^2)dv_1dv_3}{\left[\frac{a}{2}(v^2+2)dv_1\right]\left[\frac{a}{2}(v^2+2)dv_3\right]}$$

$$=\frac{-a^2v^2+u^2+a^2}{a^2v^2+u^2+a^2}$$

把A点的曲线坐标 $u=0$，$v=0$代入上式有

$$\cos A=1,\ 所以\angle A=0^\circ$$

注意到角 B 是AB曲线与BC曲线的交角，角 C 是AC曲线与 BC 曲线的交角，则类似地可得

$$\cos B=\left.\frac{av}{\sqrt{a^2v^2+u^2+a^2}}\right|_{\substack{u=\frac{1}{2}a\\ v=1}}=\frac{2}{3}$$

$$\angle B=\arccos\frac{2}{3}$$

$$\cos C=\left.\frac{-av}{\sqrt{a^2v^2+u^2+a^2}}\right|_{\substack{u=-\frac{a}{2}\\ v=1}}=-\frac{2}{3}$$

$$\angle C=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$$

3° 求曲线三角形 ABC 的面积。

因 $E=1$, $F=0$, $G=u^2+a^2$,则 $EG-F^2=u^2+a^2$,

把所求结果代入曲面面积计算公式则曲边三角形 ABC 的面积是

$$S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$=2\int_0^1\left(\int_0^{\frac{a}{2}v^2}\sqrt{u^2+a^2}\,du\right)dv$$

22. (证明)首先求两已知曲面的第一基本微分形式，为此先求两已知曲面的第一基本量。

对于旋转曲面

$\boldsymbol{r}=(\cos\theta\operatorname{ch}v)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\operatorname{ch}v)\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{r}_\theta=(-\sin\theta\operatorname{ch}v)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta\operatorname{ch}v)\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{r}_v=(\cos\theta\operatorname{sh}v)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\operatorname{sh}v)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$

第一基本量为

$E=\boldsymbol{r}_\theta^2=\operatorname{ch}^2v$, $F=\boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_v=0$, $G=\boldsymbol{r}_v^2=\operatorname{ch}^2v$

第一基本微分形式为 $\varphi_1=\operatorname{ch}^2v(d\theta^2+dv^2)$.

对于锥面

$\boldsymbol{r}^*=(u\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\varphi)\boldsymbol{e}^2+\varphi\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{r}_\varphi^*=(-u\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(u\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{r}_u^*=(\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$

第一基本量为

$E^*=\boldsymbol{r}_u^{*2}=1$, $F^*=\boldsymbol{r}_u^*\boldsymbol{r}_\varphi^*=0$, $G^*=\boldsymbol{r}_\varphi^*=1+u^2$

第一基本微分形式为

$$\varphi_1^*=du^2+(1+u^2)d^2\varphi$$

令变换为 σ: $\begin{cases}\varphi=\theta\\ u=\operatorname{sh}v\end{cases}$ 且 $\boldsymbol{r}_\theta^*\times\boldsymbol{r}_v^*=\operatorname{ch}^2v\neq0$.

所以变换：$\begin{cases}\varphi=\theta\\ u=\operatorname{sh}v\end{cases}$ 是曲面 $\boldsymbol{r}(\theta, v)$ 到曲面 $\boldsymbol{r}^*(u, \varphi)$ 的一一变换，并且容易计算

$$E=\boldsymbol{r}_\theta^2=\operatorname{ch}^2 v=\boldsymbol{r}_\theta^{*2}=E^*$$

$$F=\boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_v=0=\boldsymbol{r}_\theta^*\boldsymbol{r}_v^*=F^*$$

$$G=\boldsymbol{r}_v^2=\operatorname{ch}^2 v=\boldsymbol{r}_v^{*2}=G^*$$

由曲面等距等价的必要充分条件知两已知曲面等距等价。

23．（解）首先计算螺旋面与旋转曲面的第一基本微分形式：

对于螺旋面计算得第一基本微分形式为

$$\varphi_1=(1+g'^2(u))du^2+2ag'(u)dudv,\quad +(u^2+a^2)dv^2$$

对于旋转曲面计算得第一基本微分形式为

$$\overline{\varphi_1}=(1+f'^2(t))dt^2+t^2d\varphi^2$$

令变换 σ 为 $\begin{cases}t=\sqrt{u^2+a^2}\\ \varphi=v+\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{ag'(u)}{u^2+a^2}du\end{cases}$

容易计算此变换的雅可比行列式不为0，于是变换 σ 是曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 到曲面 $\boldsymbol{r}(t, \varphi)$ 的一一变换，并且由σ的变换式得

$$dt^2=\frac{u^2}{u^2+a^2}\,du^2$$

$$d\varphi^2=dv^2+2\frac{ag'(u)}{u^2+a^2}dudv+\frac{a^2g'^2(u)}{(u^2+a^2)^2}du^2$$

把$dt^2, d\varphi^2$ 代入$\overline{\varphi_1}$中得

$$\overline{\varphi_1}=(1+f'^2(t))\frac{u^2}{u^2+a^2}du^2+(u^2+a^2)\left[dv^2\right.$$

$$\left.+2\frac{ag'(u)}{u^2+a^2}dudv+\frac{a^2g'^2(u)}{(u^2+a^2)^2}du^2\right]$$

$$= \left[(1+f'^2(t)) \frac{u^2}{u^2+a^2} + \frac{a g'^2(u)}{u^2+a^2} \right] du^2$$

$$+ 2ag'(u)dudv + (u^2+a^2)dv^2$$

由已知 $f'^2(t) = g'^2(u) + \frac{a^2}{u^2}$ 得

$$\overline{\varphi_1} = \left[1 + g'^2(u) + \frac{a^2}{u^2} \right] \frac{u^2}{u^2+a^2} du^2 + \frac{a g'^2(u)}{u^2+a^2} du^2$$

$$+ 2ag'(u)dudv + (u^2+a^2)dv^2$$

$$= (1+g'^2(u))du^2 + 2ag'(u)dudv + (u^2+a^2)dv^2$$

$$= \varphi_1$$

于是证得给定的正螺面与旋转曲面等距等价。

24.（解）首先求两已知曲面的第一基本微分形式，为此首先计算第一基本量。

对于螺旋面 $\boldsymbol{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ u+v\}$，

$\boldsymbol{r}_u = \{\cos v,\ \sin v,\ 1\}$

$\boldsymbol{r}_v = \{-u\sin v,\ u\cos v,\ 1\}$

计算得螺旋面的第一基本量为

$$E = 2,\ F = 1,\ G = 1+u^2$$

螺旋面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1 = 2d^2u + 2dudv + (1+u^2)d^2v$$

对于旋转曲面 $\boldsymbol{r}^* = \{\rho\cos\theta, \rho\sin\theta,\ \sqrt{\rho^2-1}\}$，

$$\boldsymbol{r}_\rho^* = \left\{ \cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-1}} \right\}$$

$\boldsymbol{r}_\theta^* = \{-\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\ 0\}$

计算得旋转曲面的第一基本量为

$$E^* = \frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1},\quad F^* = 0,\ G^* = \rho^2$$

旋转曲面的第一基本微分形式为

$$\varphi_1^* = \frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}d\rho^2+\rho^2 d^2\theta$$

若已知两曲面等距等价，则存在参数间的一一变换

$$\sigma:\begin{cases}\rho=\rho(u,\ v)\\ \theta=\theta(uv)\end{cases}\qquad \det\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

且满足下列偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2+\rho^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2=2\\ &\frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}\ \frac{\partial\rho}{\partial u}\ \frac{\partial\rho}{\partial v}+\rho^2\ \frac{\partial\theta}{\partial u}\ \frac{\partial\theta}{\partial v}=1\\ &\frac{\partial\rho^2-1}{\rho^2-1}\ \frac{\partial\rho}{\partial v}+\rho^2\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2=1+u^2\end{aligned}\right\}$$

解此方程组得$\begin{cases}\theta=v+\operatorname{arctg}u\\ \rho^2=u^2+1\end{cases}$

并且

$$\det\ \frac{\partial(\theta,\rho)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

所以两曲面等距等价.

25.（解）计算已知曲面的第一基本量.

对于曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\mathrm{ch}^{-1}\frac{u}{a}\right\}$

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{\cos v,\quad \sin v,\qquad \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v\quad u\cos v,\qquad 0\}$$

第一基本量为

$$E=\frac{u^2}{u^2-a^2},\quad F=0,\quad G=u^2$$

令变换σ 为$\begin{cases}t=\sqrt{u^2-a^2}\\ \theta=v\end{cases}$ 且 $\det\frac{\partial(t\ \theta)}{\partial(uv)}\neq 0$

把变换式 σ: $t=\sqrt{u^2-a^2}$, $\theta=v$代入曲面

$$r^*=\{t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ a\theta\}$$

中得
$$r^*(u,v)=\left\{\sqrt{u^2-a^2}\cos v,\ \sqrt{u^2-a^2}\sin v,\ av\right\}$$

$$r_u^*=\left\{\frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}}\cos v,\ \frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}}\sin v,\ 0\right\}$$

$$r_v^*=\{-\sqrt{u^2-a^2}\sin v,\ \sqrt{u^2-a^2}\cos v,\ a\}$$

计算得

$$E^*=\frac{u^2}{u^2-a^2}=E,\quad F^*=0=F,\quad G^*=u^2=G$$

所以两曲面等距等价.

26.（解）首先计算两已知曲面的第一基本量

$r=\{w\cos v-w_v\sin v,\ w\sin v+w_v\cos v,\ u\}$

$r_u=\{w_u\cos v-w_{uv}\sin v,\ w_u\sin v+w_{uv}\cos v,1\}$

$r_v=\{-w\sin v-w_{vv}\sin v,\ w\cos v+w_{vv}\cos v,0\}$

$E=1+(w_u{}^2+w^2{}_{uv}),\quad F=w_{uv}(w_{vv}+w),\quad G=(w+w_{vv})^2$

$r^*=\{a\cos v,\ a\sin v,\ u\}$

$r^*{}_u=\{0,\quad 0,\quad 1\}$

$r_v^*=\{-a\sin v,\ a\cos v,\ 0\}$

$$E^*=1,\quad F^*=0,\quad G^*=a^2$$

由题设应有

$$\frac{E}{E^*}=\frac{F}{F^*}=\frac{G}{G^*}=\lambda\quad(\lambda\text{为常数})$$

即
$$\left.\begin{aligned}1+w_u^2+w_{uv}^2&=\lambda^2\\ w_{uv}(w_{vv}+w)&=0\\ (w+w_{vv})^2&=\lambda^2a^2\end{aligned}\right\}$$

由上面方程组第二式知 $w_{uv}=0$，或 $w_{vv}+w=0$，若$w_{vv}+w=0$ 由第三式知 $\lambda=0$，而 $\lambda=0$与第一式矛盾，从而知 $w_{uv}=0$，于是 $w=f(u,\ v)$是 u或者是 v的函数，即 $w=f(u)$，或 $w=g(v)$ ，这样从方程 $\boldsymbol{r}=\{w\cos v-w_v\sin v,\ w\sin v+w_v\cos v,\ u\}$知是一旋转曲面。

27.（证明）设旋转曲面的方程为

$\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)\}$

容易计算旋转曲而的第一基本量为

$$E=1+f'^2(u),\quad F=0,\quad G=u^2$$

旋转曲面的第二基本量为

$$L=\frac{uf''(u)}{\sqrt{u^2(1+f'^2(u))}},\quad M=0,N=\frac{u^2f'(u)}{\sqrt{u^2(1+f'^2(u))}}$$

平均曲率为

$$2H=\frac{u^2f''(u)+uf'(u)+uf'^3(u)}{[u^2(1+f'^2(u))]^{\frac{3}{2}}}$$

旋转曲面是极小曲而当且仅当平均曲率 $H=0$，即

$$uf''(u)+f'(u)+f'^3(u)=0$$

上式两端乘 f'并整理得

$$f'^2(1+f'^2)+uf'f''=0$$

令 $\qquad g(u)=f'^2$，则 $g'=2f'f''$，$f''=\frac{1}{2}\ \frac{g'}{f'}$

从面有 $\quad 2g(1+g)+ug'=0$

积分得 $\quad u^2g=C_1^2(1+g)$ （C_1 是积分常数）

由$g=f'^2=\left(\frac{df}{du}\right)^2$ 有

$$\frac{df}{du}=\pm\frac{C_1}{\sqrt{u^2-C_1^2}}$$

积分得 $f(u)+C_2=C_1\ln(u+\sqrt{u^2-C_1^2})$ （C_2 是积分常数）

即 $f(u)=C_1\ln(u+\sqrt{u^2-C_1^2})-C_2$

于是可知方程 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)\}$是悬链面的方程。

28. （证明）把曲面方程 $z=\ln\frac{\cos y}{\cos x}$ 以 x，y为参数写成向量方程，并计算第一、第二基本量及平均曲率。

$\boldsymbol{r}=\left\{x,\ y,\ \frac{\cos y}{\ln\cos x}\right\}$。 计算得

第一基本量为

$$E=\sec^2x,\quad F=-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y,\quad G=\sec^2y$$

第二基本量为

$$L=\frac{\sec^2x}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=0,\quad N=-\frac{(\sec^2y}{\sqrt{EG-F^2}}$$

把计算结果代入平均曲率公式

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$$

得

$$EN-2FM+GL=-\frac{\sec^2x\sec^2y}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\sec^2x\sec^2y}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

即 $H=0$，因此曲面为极小曲面。

29. （解）计算锥面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v)\boldsymbol{e}_1+(u\sin v)\boldsymbol{e}_2+\varphi(v)\boldsymbol{e}_3$ 的第一基本量为

$$E=1,\quad F=0,\quad G=u^2+\varphi^1(v)$$

第二基本量为

$$L=0, M=-\frac{\varphi'(v)}{\sqrt{u^2+\varphi'^2(v)}}, \quad N=\frac{u\varphi''(v)}{\sqrt{u^2+\varphi'^2(v)}}$$

若锥面是极小曲面，则

$$NE-2FM+GL=\frac{u\varphi''(v)}{\sqrt{u^2+\varphi'^2(v)}}=0$$

即 $\varphi''(v)=0, \quad \varphi(v)=C_1v+C_2$ （C_1 C_2 为积分常数）

于是曲面.

$$\boldsymbol{r}=(u\cos v)\boldsymbol{e}_1+(u\sin v)\boldsymbol{e}_2+(C_1v+C_2)\boldsymbol{e}_3$$

是正螺面

30. (解) $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta\sin\varphi, \quad a\sin\theta\sin\varphi, \quad a\cos\varphi\}$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-a\sin\theta\sin\varphi, \quad a\cos\theta\sin\varphi, \quad 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{a\cos\theta\cos\varphi, \quad a\sin\theta\cos\varphi, \quad -a\sin\varphi\}$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=\{-a\cos\theta\sin\varphi, \quad -a\sin\theta\sin\varphi, \quad 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\varphi}=\{-a\sin\theta\cos\varphi, \quad a\cos\theta\cos\varphi, \quad 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}=\{-a\cos\theta\sin\varphi, \quad -a\sin\theta\sin\varphi, \quad -a\cos\varphi\}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi}{|\boldsymbol{r}_\theta|\times|\boldsymbol{r}_\varphi|}=\{-\cos\theta\sin\varphi, \quad -\sin\theta\sin\varphi, \quad -\cos\varphi\}$$

计算球面的第二基本量为

$$L=\boldsymbol{r}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{n}=a\sin^2\varphi, M=\boldsymbol{r}_{\theta\varphi}\cdot\boldsymbol{n}=0, \quad N=\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}\cdot\boldsymbol{n}=a$$

所求球面的第二基本微分形式为

$$\begin{aligned}\varphi_2&=Ld\theta^2+2Md\theta d\varphi+Nd\varphi^2\\&=a\sin^2\varphi d\theta^2+ad\varphi^2\\&=a(\sin^2\varphi d\theta^2+d\varphi^2)\end{aligned}$$

31. （解）

$$x=\sqrt{u^2+a^2}\cos v, y=\sqrt{u^2+a^2}\sin v, z=a\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})$$

$$x_u=\frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}}, \quad y_u=\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}}, \quad z_u=\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

$$x_v = -\sqrt{u^2+a^2}\,\sin v,\quad y_v = \sqrt{u^2+a^2}\,\cos v,\quad z_v = 0$$

$$x_{uu} = \frac{a^2\cos v}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\ y_{uu} = \frac{a^2\sin v}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\ z_{uu} = \frac{-au}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x_{uv} = \frac{-u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}},\ y_{uv} = \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}},\quad z_{uv} = 0$$

$$x_{vv} = -\sqrt{u^2+a^2}\,\cos v,\ y_{vv} = -\sqrt{u^2+a^2}\,\sin v,\quad z_{vv} = 0$$

$$E = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u = \left(\frac{u^2\cos^2 v}{u^2+a^2} + \frac{u^2\sin^2 v}{u^2+a^2} + \frac{a^2}{u^2+a^2}\right)$$

$$= \frac{u^2+a^2}{u^2+a^2} = 1$$

$$F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = \frac{-\sqrt{u^2+a^2}\,u\sin v\cos v}{\sqrt{u^2-a^2}} + \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,u\sin v\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

$$= 0$$

$$G = \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v = (u^2+a^2)\sin^2 v + (u^2+a^2)\cos^2 v = u^2+a^2$$

$$EG - F^2 = u^2+a^2$$

$$L = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uu} = \frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\ \boldsymbol{r}_{uu} = \frac{(\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{r}_{uu})}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2}}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\begin{vmatrix} \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}} & \frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\sqrt{u^2+a^2}\,\sin v & \sqrt{u^2+a^2}\,\cos v & 0 \\ \frac{a^2\cos v}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{a^2\sin v}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-au}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a}{u^2+a^2}$$

类似可得

$$M = nr_{uv} = \frac{(r_v r_u, r_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \begin{vmatrix} \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}} & \frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}} & -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\sqrt{u^2+a^2}\sin v, & \sqrt{u^2+a^2}\cos v, & 0 \\ \frac{-u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}} & \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix} = a$$

$$N = nr_{vv} = \frac{(r_u, \ r_v, \ r_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \begin{vmatrix} \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}} & \frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\sqrt{u^2+a^2}\sin v, & \sqrt{u^2+a^2}\cos v, & 0 \\ -\sqrt{u^2+a^2}\cos v, & -\sqrt{u^2+a^2}\sin v, & 0 \end{vmatrix} = a$$

所求悬链面的第二基本微分形式为

$$\varphi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

$$= -\frac{a}{u^2+a^2}du^2 + adv^2$$

32. (解) 将曲面 $z=f(x, y)$ 以 x, y 为参数写成向量方程，并求曲面的单位法向量及其二阶偏导向量.

$r = \{x, \ y, \ f(x, \ y)\}$

$r_x = \{1, \ 0, \ f'_x\}$

$r_y = \{0, \ 1, \ f'_y\}$

单位法向量

$$n=\frac{r_x\times r_y}{|r_x\times r_y|}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\{-f'_x,\ -f'_y,\ 1\}$$

$$r_{xx}=\{0,\ 0,\ f_{xx}\}$$

$$r_{yy}=\{0,\ 0,\ f_{yy}\}$$

$$r_{xy}=\{0,\ 0,\ f_{xy}\}$$

第二基本量为

$$L=r_{xx}n=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad M=r_{xy}n=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$N=r_{yy}n=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

所求曲面的第二基本微分形式为

$$\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2)$$

33．（解）类似于上题的解法，所 求 曲面的第二基本微分形式为

$$\varphi_2=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}(du^2-dv^2)$$

34．（解）类似于32题的解法，所 求 螺旋面的第二基本微分形式为

$$\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2(1+f'^2)}}=(uf''du^2-2adudv+uf'dv^2)$$

35．（1）（证明）

设 $r=x(u,\ v)e_1+y(u,\ v)e_2+z(u,\ v)e_3$

则 $r_u=x_u(u,\ v)e_1+y_u(u,\ v)e_2+z_u(u,\ v)e_3$

$r_v=x_v(u,\ v)e_1+y_v(u,\ v)e_2+z_v(u,\ v)e_3$

$r_{uu}=x_{uu}(u,\ v)e_1+y_{uu}(u,\ v)e_2+z_{uu}(u,\ v)e_3$

$r_{uv}=x_{uv}(u,\ v)e_1+y_{uv}(u,\ v)e_2+z_{uv}(u,v)e_3$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=x_{vv}(u,\ v)\boldsymbol{e}_1+y_{vv}(u,\ v)\boldsymbol{e}_2+z_{vv}(u,\ v)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_i=\{x_i,\ y_i,\ z_i\},\quad \boldsymbol{r}_{ij}=\{x_{ij},\ y_{ij},\ z_{ij}\}\quad (i,j)=1,2)$$

$$(\boldsymbol{r}_{11},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_{22},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)=\begin{vmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ y_{11} & y_1 & y_2 \\ z_{11} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{22} & x_1 & x_2 \\ y_{22} & y_1 & y_2 \\ z_{22} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{22} & x_1 & x_2 \\ y_{22} & y_1 & y_2 \\ z_{22} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{22} & \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 & E & F \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_{22} & F & G \end{vmatrix}$$

（2）（证明）设 $\boldsymbol{r}_i=\{x_i,\ y_i,\ z_i\}$，$\boldsymbol{r}_{ij}=\{x_{ij},\ y_{ij},\ z_{ij}\}$，$(i,\ j=1,\ 2)$，则

$$(\boldsymbol{r}_{12},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)^2=\begin{vmatrix} x_{12} & x_1 & x_2 \\ y_{12} & y_1 & y_2 \\ z_{12} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{12} & x_1 & x_2 \\ y_{12} & y_1 & y_2 \\ z_{12} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{12} & x_1 & x_2 \\ y_{12} & y_1 & y_2 \\ z_{12} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{12}^2 & \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1 & E & F \\ \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_2 & F & G \end{vmatrix}$$

（3）（证明）由

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_{uu}\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2}}$$

$$=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{|\boldsymbol{r}_u|^2|\boldsymbol{r}_v|^2\sin^2\theta}}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2(1-\cos^2\theta)}}$$

$$=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2\cos^2\theta}}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2}}$$

$$=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

即
$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_{11},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

同理可得 $M=\frac{(\boldsymbol{r}_{12},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)}{\sqrt{EG-F^2}}$, $N=\frac{(\boldsymbol{r}_{22},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)}{\sqrt{EG-F^2}}$

于是 $LN-M^2=\frac{1}{EG-F^2}[(\boldsymbol{r}_{11},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_{22},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)$

$$-(\boldsymbol{r}_{12},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)^2]$$

（4）（证明）因为$E=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u$, $E_u=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uu}=2\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u$

所以 $\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u=\frac{1}{2}E_u$, 即 $\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{2}E_1$

类似得

$$\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{2}E_1,\quad \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{2}E_2$$

$$\boldsymbol{r}_{22}\boldsymbol{r}_2=\frac{1}{2}G_2,\quad \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_2=\frac{1}{2}G_1$$

$$\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_2=F_1-\frac{E_2}{2},\quad \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_1=F_2-\frac{G_1}{2}$$

（5）（证明）设

$$\boldsymbol{n}_u=a\boldsymbol{r}_u+b\boldsymbol{r}_v+c\boldsymbol{n} \qquad (1)$$

上式两边与$\boldsymbol{n}$做数积

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}=a\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}+b\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}+c\boldsymbol{n}\boldsymbol{n},\ \text{得}\ c=0 \qquad (2)$$

（1）式两边与$\boldsymbol{r}_u$做数积

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_u=a\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u+b\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u,\ \text{得}-L=aE+bF \qquad (3)$$

（1）式两边与 $\boldsymbol{r}_v$做数积

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_v=a\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v+b\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v,\ \text{得}\ -M=aF+bG \qquad (4)$$

由（3）、（4）等式解得

$$a=\frac{MF-GL}{EG-F^2},\quad b=\frac{FL-EM}{EG-F^2}$$

，把所求 a, b, c代入（1）式得

$$\boldsymbol{n}_1=\frac{(FM-GL)\boldsymbol{r}_1+(FL-EM)\boldsymbol{r}_2}{EG-F^2}$$

同理可得 $n_2=\dfrac{(FN-GM)r_1+(FM-EN)r_2}{EG-F^2}$

36．（证明）设简单曲面是平面，其方程为$ax+by+cz+d=0$，a，b，c 不全为0，假定$c\neq0$，把平面方程写成向量方程并求其第二基本量。

$$r=\left\{x,\ y,\ \frac{-1}{c}\ (d+ax+by)\right\}$$

$$r_x=\left\{1,\ 0,\ -\frac{a}{c}\right\}$$

$$r_y=\left\{0,\ 1,\ -\frac{b}{c}\right\}$$

$$r_{xx}=r_{xy}=r_{yy}=0$$

从而由公式 $L=r_{xx}\cdot n$，$M=r_{xy}\cdot n$，$N=r_{yy}\cdot n$，知

$$L=M=N=0$$

反之，若 $L=M=N=0$

则 $\varphi_2=-dr\cdot dn=0$

由于曲面是简单曲面，所以 $dr\neq0$，于是 $dn=0$，即n是常向量，以常向量n为法向量的曲面是平面。

37．（证明）设正螺面的方程为

$$r=\{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\}$$

求得正螺面的第一基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+b^2$$

第二基本量为

$$L=N=0,\ M=\frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}$$

所以 $EN-2FM+GL=0$

设悬链面的方程为

$$r=\left\{a\mathrm{ch}\frac{t}{a}\cos\theta,\ a\mathrm{ch}\frac{t}{a}\sin\theta,\ t\right\}$$

求得悬链面的第一基本量为

$$E=\mathrm{ch}^2\frac{t}{a},\ F=0,\ G=a^2\mathrm{ch}^2\frac{t}{a}$$

第二基本量为

$$L=-\frac{1}{a},\ M=0,N=a$$

所以 $\quad EN-2FM+GL=0$

38．（证明）

$$r=\rho(u)+v\tau(u)$$

$$r_u=\rho'(u)+v\tau'(u)$$

$$r_v=\tau(u),\ r_{uv}=\tau(u),\ r_{vv}=0$$

$$M=nr_{uv}=\frac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|}r_{uv}=\frac{(r_{uv},\ r_u,\ r_v)}{|r_u\times r_v|}$$

$$=\frac{(\rho'+v\tau',\ \tau,\ \tau')}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\rho',\ \tau,\tau')}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$=\frac{(\tau',\ \rho',\tau)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$N=0$$

若直纹曲面 $r=\rho(u)+v\tau(u)$ 为可展曲面，则必有 $(\tau',\rho',\tau)=0$，从而 $M=0$. 又因 $N=0$，所以 $LN-M^2=0$.

反之，若 $LN-M^2=0$ 因 $N=0$，所以 $M=0$，于是 $(\tau',\rho',\tau)=0$，给定的直纹曲面是可展曲面.

39．（证明）设旋转曲面Σ的方程为

$$r=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \varphi(u)\}$$

求得曲面Σ的单位法向量为

$$n=\left\{\frac{-\dot{\varphi}\cos v}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}},\ \frac{-\dot{\varphi}\sin v}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}}\right\}$$

其中 $\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{du}$，曲面$\Sigma$的平行曲面$\Sigma'$的方程为

$$r=\left\{\left(u-\frac{c\dot{\varphi}}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}}\right)\cos v,\ \left(u-\frac{c\dot{\varphi}}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}}\right)\sin v,\right.$$

$$\left.\varphi(u)+\frac{c}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}}\right\}$$

这显然是旋转曲面的方程。

40. （证明）

$$\begin{aligned}\varphi_2^*(\theta,\ \varphi)&=-dr^*dn^*\\&=-(r_\theta^*d\theta+r_\varphi^*d\varphi)(n_\theta^*d\theta+n_\varphi^*d\varphi)\\&=-[r_\theta^*(\theta_udu+\theta_vdv)+r_\varphi^*(\varphi_udu+\varphi_vdv)]\cdot\\&\quad[n_\theta^*(\theta_udu+\theta_vdv)+n_\varphi^*(\varphi_udu+\varphi_vdv)]\\&=-[(r_\theta^*\theta_u+r_\varphi^*\varphi_u)du+(r_\theta^*\theta_v+r_\varphi^*\varphi_v)dv]\cdot\\&\quad[(n_\theta^*\theta_u+n_\varphi^*\varphi_u)du+(n_\theta^*\theta_v+n_\varphi^*\varphi_v)dv]\\&=-(r_udu+r_vdv)(n_udu+n_vdv)\\&=-dr\cdot dn=\varphi_2(uv)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L&=-r_un_u=-(r_\theta^*\theta_u+r_\varphi^*\varphi_u)(n_\theta^*\theta_u+n_\varphi^*\varphi_u)\\&=-r_\theta^*n_\theta^*\theta_u^2-(r_\varphi^*\ n_\theta^*+r_\theta^*n_\varphi^*)\theta_u\varphi_u-r_\varphi^*n_\varphi^*\varphi_u^2\\&=L^*\theta_u^2+2M^*\theta_u\varphi_u+N^*\varphi_u^2\end{aligned}$$

类似可证得

$$M=L^*\theta_u\theta_v+M^*(\varphi_u\theta_v+\theta_u\varphi_v)+N^*\varphi_u\varphi_v$$

$$N=N^*\theta_v^2+2M^*\theta_v\varphi_v+N^*\varphi_v^2$$

41. （解）求球面的第一第二基本量，并把所求结果代入法曲率公式

$$r=(R\cos\theta\sin\varphi)e_1+(R\sin\theta\sin\varphi)e_2+(R\cos\varphi)e_3$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = -(R\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = (R\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 - (R\sin\varphi)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta} = -(R\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 - (R\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\varphi} = -(R\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi} = -(R\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 - (R\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 - (R\cos\varphi)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{n} = -(\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 - (\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 - (\cos\varphi)\boldsymbol{e}_3$$

第一基本量为

$$E = R^2\sin^2\varphi, \quad F = 0, \quad G = R^2$$

第二基本量为

$$L = R\sin^2\varphi, \quad M = 0, \quad N = R$$

所求球面的法曲率为

$$\kappa_n = \frac{Ld\theta^2 + 2Md\theta d\varphi + Nd\varphi^2}{Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\varphi + Gd\varphi^2}$$

$$= \frac{R\sin^2\varphi d\theta^2 + Rd\varphi^2}{R^2\sin^2\varphi d\theta^2 + R^2d\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{R}$$

由结果可知对于半径为 R 的球面上的任一点，沿任意方向的法曲率是常数，它等于该点的法截线的曲率，法截线是过该点的半径为 R 的最大圆.

42. （解）求曲面的第一、二基本量：

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}^2 + (u^2 - v^2)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{e}_1 + 2u\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{e}_2 - 2v\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{uu} = 2\boldsymbol{e}_3; \quad \boldsymbol{r}_{uv} = 0, \quad \boldsymbol{r}_{vv} = -2\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{-2u\boldsymbol{e}_1 + 2v\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

计算得曲面的第一、二基本量为

$$E=1+4u^2,\quad F=-4uv,\quad G=1+4v^2,$$

$$L=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\quad M=0,\quad N=\frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

当 $u=0$，$v=0$ 时第一、二基本量为

$$E=1,\quad F=0,\quad G=1$$

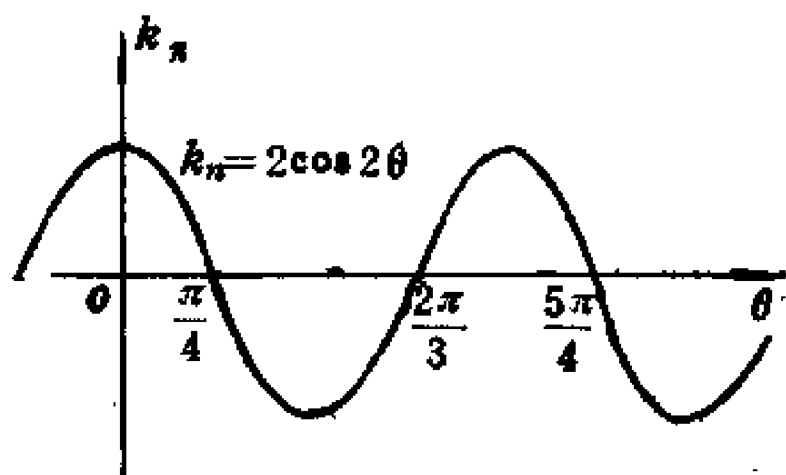
$$L=2,\quad M=0,\quad N=-2$$

把所求结果代入法曲率公式得

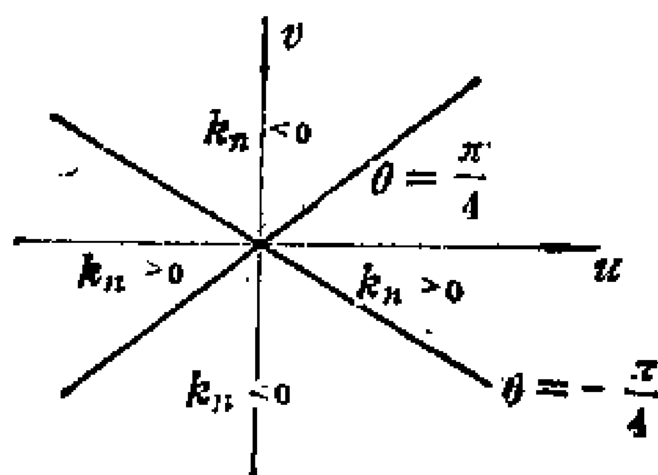
$$k_n=\frac{2(du^2-dv^2)}{du^2+dv^2}$$

设 $du^2+dv^2=1$，$du=\cos\theta$，$dv=\sin\theta$

则 $\kappa_n=2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\cos2\theta$，从而 κ_n在 $u=0$，$v=0$的邻域 $du^2+dv^2=1$的变化曲线为 $\kappa_n=2\cos2\theta$。



42题解答（1）



42题解答（2）

43. （解）求曲面的第一第二基本量代入主曲率方程

$x=\cos v-(u+v)\sin v,\ y=\sin v+(u+v)\cos v,\ z=u+2v$

$x_u=-\sin v,\ y_u=\cos v,\ z_u=1$

$x_v=-2\sin v-(u+v)\cos v,\ y_v=2\cos v-(u+v)\sin v,$

$z_v=2,\ x_{uu}=y_{uu}=z_{uu}=0,$

$x_{uv}=-\cos v,\ y_{uv}=-\sin v,\ z_{uv}=0,$

$x_{vv}=-3\cos v+(u+v)\sin v、y_{vv}=-3\sin v-(u+v)\cos v$

$z_{vv}=0$

求得曲面的第一、二基本量为

$$E=2,\ F=4,\ G=8+(u+v)^2$$

$$L=M=0,\qquad N=\frac{2}{\sqrt{2}}(u+v)$$

把所求结果代入主曲率方程

$$\kappa^2(EG-F^2)+\kappa(EN-2FM+GL)+(LN-M^2)=0$$

得 $$2(u+v)^2\kappa^2+\frac{2}{\sqrt{2}}(u+v)\kappa=0$$

解此方程得主曲率为

$$\kappa_1=0,\qquad \kappa_2=-\frac{1}{\sqrt{2}(u+v)}$$

44. 解由曲面方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)$ 求得曲面的第一、二基本量为

$$E=1+v\kappa^2,\ F=G=1$$

$$L=\pm\kappa\chi v,\ M=N=0$$

平均曲率 $$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}=\pm\frac{\chi}{2v\kappa}$$

高斯曲率 $$\kappa=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0$$

由公式 $\kappa_1+\kappa_2=2H$

$\kappa_1\kappa_2=K$

得
$$\left.\begin{aligned}\kappa_1+\kappa_2&=\pm\frac{\chi}{vK}\\ \kappa_1\kappa_2&=0\end{aligned}\right\}$$

解此方程组得曲面的主曲率为

$$\kappa_1=0,\qquad \kappa_2=\pm\frac{\chi}{vK}$$

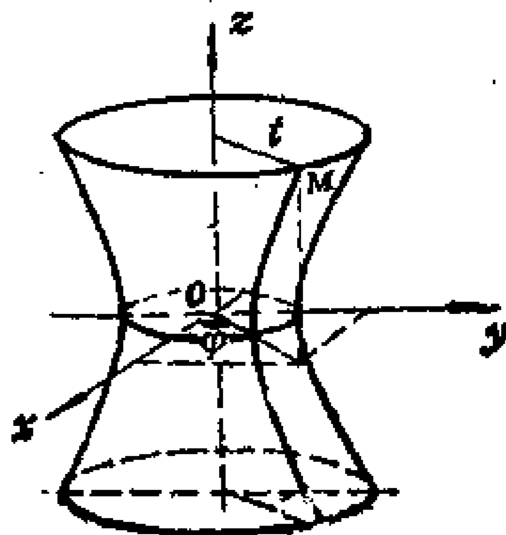
45. （解）以 x,z 为参数把曲面 $y=x\mathrm{tg}\dfrac{z}{a}$ 写成向量方程 $\boldsymbol{r}=\left\{x,\ x\mathrm{tg}\dfrac{z}{a},\ z\right\}$，然后求曲面的第一、二基本量，代入主曲率方程中求得曲面的主曲率为

$$\kappa_1=\frac{a}{x^2+y^2+a^2},\quad \kappa_2=-\frac{a}{x^2+y^2+a^2}$$

46. 证明：设旋转曲面的方程为

$z^2=4p(x-p)$

则其旋转轴为 oz 轴，设 M 是此抛线上任一点，用 t 表示点 M 至 oz 轴的距离，则得所求曲面的方程为



46题解答

$$\boldsymbol{r}=\{t\cos\varphi,\ \ t\sin\varphi,\ \ \sqrt{4p(t-p)}\ \}$$

$$\boldsymbol{r}_t=\{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \ 2p[4p(t-p)]^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-t\sin\varphi,\ \ t\cos\varphi,\ \ 0\}$$

$$r_{tt}=\{0,\ 0,\ -4p^2[4p(t-p)]^{-\frac{3}{2}}\}$$

$$r_{t\varphi}=\{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\}$$

$$r_{\varphi\varphi}=\{-t\cos\varphi,\ -t\sin\varphi,\ 0\}$$

求得第一基本量为

$$E=\frac{t}{t-p},\ F=0, G=t^2$$

所以 $$EG-F^2=\frac{t^3}{t-p}$$

第二基本量为

$$L=\frac{(r_t,\ r_\varphi,\ r_{tt})}{\sqrt{EG-F^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{t-p}}{\sqrt{t^3}}\begin{vmatrix}\cos\varphi, \sin\varphi, 2p[4p(t-p)]^{-\frac{1}{2}}, \\ -t\sin\varphi, t\cos\varphi, & 0, \\ 0, \ 0, \ -4p^2[4p(t-p)]^{-\frac{3}{2}},\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t}\ (t-p)}$$

$$M=\frac{(r_t,\ r_\varphi,\ r_{t\varphi})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{t-p}}{\sqrt{t^3}}\begin{vmatrix}\cos\varphi, \sin\varphi, 2p[4p(t-p)]^{-\frac{1}{2}}, \\ -t\sin\varphi, t\cos\varphi & 0, \\ -\sin\varphi, \cos\varphi, & 0,\end{vmatrix}=0$$

$$N=\frac{(r_t,\ r_\varphi,\ r_{\varphi\varphi})}{\sqrt{EG-F^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{t-p}}{t\sqrt{t}}\begin{vmatrix}\cos\varphi, \sin\varphi, 2p[4p(t-p)]^{-\frac{1}{2}}, \\ -t\sin\varphi, t\cos\varphi, \quad 0, \\ -t\cos\varphi, -t\sin\varphi, \quad 0,\end{vmatrix}=\sqrt{pt}$$

把所求结果代入主曲率方程

$$(EG-F^2)\kappa^2-(EN-2FM+GL)\kappa+(LN-M^2)=0$$

得
$$\kappa^2-\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t^3}}\kappa-\frac{p}{2t^3}=0$$

解此方程得

$$\kappa_1=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t^3}}, \qquad R_1=\frac{\sqrt{t^3}}{\sqrt{p}}$$

$$\kappa_2=-\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t^3}}, \quad R_2=-\frac{2\sqrt{t^3}}{\sqrt{p}}$$

于是
$$\frac{R_2}{R_1}=-\frac{2\sqrt{t^3}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t^3}}=-2$$

主曲率半径之比为常数。

47. （解）把已知曲面写成向量方程求其基本量：

$$\boldsymbol{r}=\left\{x, y, \frac{5}{2}x^2+2xy+y^2\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_x=\{1, 0, 5x+2y\}$$

$$\boldsymbol{r}_y=\{0, 1, 2(x+y)\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=\{0, 0, 5\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xy}=\{0, 0, 2\}$$

$$\boldsymbol{r}_{yy}=\{0, 0, 2\}$$

求得曲面在坐标原点的第一、二基本量为

$$E=1, \ F=0, \ G=1$$

$$L=5, \ M=2, \ N=2$$

由
$$\begin{cases}\kappa_1\cdot\kappa_2=K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=6\\ \kappa_1+\kappa_2=2H=\dfrac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=7\end{cases}$$

得曲面在坐标原点的主曲率为 $\kappa_1=1$，$\kappa_2=6$。

48．（解求得曲面的第一、第二基本量分别为

$$E=1+4u^2,\ F=4uv,\ G=1+4v^2$$

$$L=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}},M=0,N=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

由曲线的方程得

$$\frac{du}{dt}=2t,\qquad \frac{dv}{dt}=1$$

在点 $t=1$，曲面的第一第二基本量为

$$E=5,\ F=4,\ G=5$$

$$L=\frac{2}{3},\ M=0,\ N=\frac{2}{3}$$

$$\frac{du}{dt}=2,\qquad \frac{dv}{dt}=1$$

把所求结果代入法曲率公式

$$\kappa_n=\frac{L\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+2M\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt}+N\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}{E\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+2F\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt}+G\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}$$

得 $\kappa_n=\dfrac{10}{123}$

所求曲面的法曲率向量

$$\boldsymbol{\kappa}_n=\kappa_n\boldsymbol{n}=-\frac{10}{369}(2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)$$

49. (证明)

设两相交曲面的单位法向量分别为$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$，则由公式$\kappa_n = \boldsymbol{r}''\boldsymbol{n}$得

$$\kappa_1 \boldsymbol{n}_2 = (\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_2 = \kappa(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_2$$

$$\kappa_2 \boldsymbol{n}_1 = (\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1 = \kappa(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1$$

其中κ_1，κ_2分别为交线在$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$方向上的法曲率，做

$$\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1 = \kappa[(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_2 - (\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1]$$
$$= \kappa[(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) \times \boldsymbol{\nu}]$$

于是

$$(\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1)(\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1) = \kappa^2[(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) \times \boldsymbol{\nu}][(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) \times \boldsymbol{\nu}]$$

由向量恒等式$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$得

$$(\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1)(\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1) = \kappa^2[(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) - ((\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{\nu})^2]$$

由于$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$平行于两曲面的交线$c$在对应点的切向量$\boldsymbol{\tau}$，从而$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \perp \boldsymbol{\nu}$，所以$(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{\nu} = 0$。 于是有

$$(\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1)(\kappa_1\boldsymbol{n}_2 - \kappa_2\boldsymbol{n}_1) = \kappa^2(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)$$
$$= \kappa^2|\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2|^2$$

把上面等式左端展开得

$$\kappa_1^2(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_1) - 2\kappa_1\kappa_2(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \kappa_2^2(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_2) = \kappa^2|\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2|^2$$

即 $\kappa_1^2 - 2\kappa_1\kappa_2\cos\alpha + \kappa_2^2 = \kappa^2\sin^2\alpha$

50. (证明) 因为$\boldsymbol{n}$是曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$的单位法向量，所以，

$$\boldsymbol{n}_u \perp \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}_v \perp \boldsymbol{n}$$

即$\boldsymbol{n}_u$和$\boldsymbol{n}_v$都平行于曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$在其对应点的切平面，从而有

$$\boldsymbol{n}_u = a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v, \quad \boldsymbol{n}_v = c\boldsymbol{r}_u + d\boldsymbol{r}_v$$

这里a，b，c，d是待定系数，由上两式得

$$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v = (a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v)(c\boldsymbol{r}_u + d\boldsymbol{r}_v)$$
$$= (ad - bc)(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)$$

现在只需证明

$$ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \kappa \text{ 即可}$$

$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{r}_u(a\ \boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v) = a\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$$
$$= aE + bF = -L$$

类似的可得

$$\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u = aF + bG = -M$$
$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v = cE + dF = -M$$
$$\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v = cF + dG = -N$$

把上面 4 个等式写成矩阵乘积的形式为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}$$

从而有

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}$$

由于 $\quad \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 \neq 0$

因此

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{\det\begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \kappa$$

于是证得 $\quad n_u\times n_v=\kappa(r_u\times r_v)$

51．（证明）假设 κ_0是曲面 $r(u,\ v)$上点 p对应于主方向 $du_0:dv_0$ 的主曲率，根据主曲率的定义，κ_0 是曲面$r(u,\ v)$ 的法曲率 κ_n关于变量 $du:dv$的极值.

$$\kappa_n=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

由微积分的极值定理有

$$\left.\frac{\partial\kappa_n}{\partial du}\right|_{(du_0,dv_0)}=0,\ \left.\frac{\partial\kappa_n}{\partial dv}\right|_{(du_0,dv_0)}=0$$

即

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{\varphi_1\varphi'_{2du}-\varphi_2\varphi'_{1du}}{\varphi_1^2}\right|_{(du_0,dv_0)}=0\\ \left.\dfrac{\varphi_1\varphi'_{2dv}-\varphi_2\varphi'_{1dv}}{\varphi_1^2}\right|_{(du_0,dv_0)}=0\end{array}\right\}$$

整理得

$$\left.\varphi'_{2du}-\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\varphi'_{1du}\right|_{(du_0,dv_0)}=0,\ \left.\varphi'_{2dv}-\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\varphi'_{1dv}\right|_{(du_0,dv_0)}=0$$

但 $$\left.\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right|_{(du_0,dv_0)}=\kappa_n\Big|_{(du_0,dv_0)}=\kappa_0$$

因此

$$\left.\begin{array}{l}(\varphi'_{2du}-\kappa_0\varphi'_{1du})\big|_{(du_0,dv_0)}=0\\ (\varphi'_{2dv}-\kappa_0\varphi'_{1dv})\big|_{(du_0,dv_0)}=0\end{array}\right\},\text{其中 }\varphi'_{1dv}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial(dv)},$$

$$\varphi'_{2du}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial(du)}.$$

由于 $$\varphi'_{2du}=2Ldu+2Mdv,\ \ \varphi'_{1du}=2Edu+2Fdv$$
$$\varphi'_{2dv}=2Mdu+2Mdv,\ \ \varphi'_{1dv}=2Fdu+2Gdv$$

所以上面方程组为

$$\left.\begin{array}{l}(Ldu_0+Mdv_0)-k_0(Edu_0+Fdv_0)=0\\ (Mdu_0+Ndv_0)-\kappa_0(Fdu_0+Gdv_0)=0\end{array}\right\}$$

整理得

$$\left.\begin{aligned}(L-\kappa_0 E)du_0+(M-\kappa_0 F)dv_0=0\\(M-\kappa_0 F)du_0+(N-\kappa_0 G)dv_0=0\end{aligned}\right\}$$

下面证明条件的充分性.

由题设假定 κ_0, du_0, dv_0满足方程组

$$\left.\begin{aligned}(L-\kappa_0 E)du_0+(M-\kappa_0 F)dv_0=0\\(M-\kappa_0 F)du_0+(N-\kappa_0 G)dv_0=0\end{aligned}\right\}.$$

由于 $du_0^2+dv_0^2\neq 0$

因此，$$\det\begin{pmatrix}L-\kappa_0 E & M-\kappa_0 F\\ M-\kappa_0 F & N-\kappa_0 G\end{pmatrix}=0$$

展开上面行列式得

$$(EG-F^2)\kappa_0^2-(EN+GL-2FM)\kappa_0+(LN-M^2)=0.$$

从而 κ_0是曲面 $\boldsymbol{r}(u,\ v)$上点p的主曲率.

52. （证明）假定 $du:dv$是曲面$\boldsymbol{r}(u,\ v)$在点p的主方向，κ是曲面 $\boldsymbol{r}(u,\ v)$在点 p对应于主方向 $du:dv$的主曲率，由上题结果知 κ, du, dv必满足方程组

$$\left.\begin{aligned}(L-\kappa E)du+(M-\kappa F)dv=0\\(M-\kappa F)du+(N-\kappa G)dv=0\end{aligned}\right\}.$$

因为 $E=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u$, $F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$, $G=\boldsymbol{r}_{vv}$

$$L=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v.\quad M=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v+\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u),\quad N=-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v$$

所以上面方程组为

$$\left.\begin{aligned}(-\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_u-\kappa\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u)du+(-\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{r}_u-\kappa\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)dv=0\\(-\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_v-\kappa\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)du+(-\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{r}_v-\kappa\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v)dv=0\end{aligned}\right\}$$

或改写为

$$\left.\begin{aligned}[(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv)+\kappa(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)]\boldsymbol{r}_u=0\\ [(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv)+\kappa(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)]\boldsymbol{r}_v=0\end{aligned}\right\}$$

由于　　$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$，$d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv$

所以上面方程组为

$$\left.\begin{array}{l}(d\boldsymbol{n}+\kappa d\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}_u=0\\(d\boldsymbol{n}+\kappa d\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}_v=0\end{array}\right\}$$

从上式可知$d\boldsymbol{n}$和$d\boldsymbol{r}$都平行于曲面$\boldsymbol{r}(u,\ v)$在对应点p的切平面，因此 $d\boldsymbol{n}+\kappa d\boldsymbol{r}$也平行于 $\boldsymbol{r}(u,\ v)$在对应点 p 的切平面，并且$\boldsymbol{r}_u$与$\boldsymbol{r}_v$是线性无关的，所以必有 $d\boldsymbol{n}+\kappa d\boldsymbol{r}=0$.

即　　$d\boldsymbol{n}=-\kappa d\boldsymbol{r}$

把上面必要性的证明逆过来，不难证明条件也是充分的.

公式 $d\boldsymbol{n}=-\kappa d\boldsymbol{r}$称为罗德里克公式.

53. （解）首先求曲面的第一、第二基本量：

$$\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{e}_1+2u\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{e}_2+2v\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{r}_{uv}=0,\quad \boldsymbol{r}_{vv}=2\boldsymbol{e}_3$$

曲面的第一基本量与第二基本量为

$$E=1+4u^2,\quad F=4uv,\quad G=1+4v^2$$

$$L=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\quad M=0,\quad N=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

曲面的第一、二基本量在 $u=1$，$v=1$点的值为

$$E=5,\quad F=4,\quad G=5$$

$$L=\frac{2}{3},\ M=0,\quad N=\frac{2}{3}$$

把所求结果代入主方向的方程

$$(EM-LF)du^2+(EN-LG)dudv+(FN-MG)\ dv^2=0$$

得　　$$-\frac{8}{3}\ du^2+\frac{8}{3}dv^2=0$$

即　　$$(du+dv)(du-dv)=0$$

于是所求曲面在点 $u=1$，$v=1$的主方向为

$$du_1:dv_1=1:-1, \qquad du_2:dv_2=1:1$$

下面验证罗德里克公式。

求得曲面的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u\boldsymbol{e}_1-2v\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$$

$$\boldsymbol{n}_u=\frac{1}{\sqrt{(4u^2+4v^2+1)^3}}(-(8v^2+2)\boldsymbol{e}_1+8uv\boldsymbol{e}_2-4u\boldsymbol{e}_3)$$

$$\boldsymbol{n}_v=\frac{1}{\sqrt{(4u^2+4v^2+1)^3}}(8uv\boldsymbol{e}_1-(8v^2+2)\boldsymbol{e}_2-4v\boldsymbol{e}_3)$$

在 $u=1$，$v=1$ 点：

$$\boldsymbol{n}_u=\frac{1}{27}(-10\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3)$$

$$\boldsymbol{n}_v=\frac{1}{27}(8\boldsymbol{e}_1-10\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3)$$

$$d\boldsymbol{n}_u=\boldsymbol{n}_u du_1+\boldsymbol{n}_v dv_1=\frac{1}{27}(-18\boldsymbol{e}_1+18\boldsymbol{e}_2)$$

$$=-\frac{18}{27}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$$

$$d\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_u du_1+\boldsymbol{r}_v dv_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$$

于是

$$d\boldsymbol{n}_u=-\frac{18}{27}d\boldsymbol{r}_u$$

同理可得 $d\boldsymbol{n}_v=-\dfrac{2}{27}d\boldsymbol{r}_v$

不难计算$\dfrac{18}{27}$，$\dfrac{2}{27}$是曲面 $\boldsymbol{r}(uv)$ 在点$u=1$，$v=1$ 对应于主

方向$du_1:dv_1=1:-1$ $du_2:dv_2=1:1$ 的主曲率。事实上把所求曲面 $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$的第一、第二基本量在点 $u=1$, $v=1$的值代入主曲率方程

$$(EG-F^2)\kappa^2-(EN+GL-2FM)\kappa+(LN-M^2)=0$$

得 $$\kappa^2-\frac{20}{27}\kappa+\frac{4}{81}=0$$

解此方程得

$$\kappa_1=\frac{18}{27},\qquad \kappa_2=\frac{2}{27}$$

54. （证明）设$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$分别是曲面M_1, M_2的单位法向量，则由题设 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\cos\varphi$（$\varphi$是定角）

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{n}_2)=\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds}\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_1\frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}$$

若曲线（两曲面的交线）是 M_1 的曲率线，由罗德里克公式有 $\dfrac{d\boldsymbol{n}_1}{ds}=\kappa_1\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$

因此 $-\kappa_1\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_1\dfrac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}=0$

但是$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是正交于 $\boldsymbol{n}_2$，即$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ $\boldsymbol{n}_2=0$，于是 $\boldsymbol{n}_1\dfrac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}=0$，

即 $\dfrac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}$正交于$\boldsymbol{n}_1$。又由于$\dfrac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}$正交于 $\boldsymbol{n}_2$（$\boldsymbol{n}_2$是单位向量），

从而$\dfrac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}$平行于$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$，有如下关系式

$$\frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}=-\kappa_2\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

由罗德里克公式可知交线也是M_2的曲率线。

55. （证明）设 p点是曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$的非脐点（否则 p点的任一方向都是主方向）并设 $du_1:dv_1$, $du_2:dv_2$是曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$在点 p的主方向，则引入参数变换

$$\left.\begin{aligned} u &= \theta du_1 + \varphi du_2 \\ v &= \theta dv_1 + \varphi dv_2 \end{aligned}\right\}$$

由于主方向$du_1:dv_1$与 $du_2:dv_2$是曲面在点 p 的不同方向，从而

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} du_1 & du_2 \\ dv_1 & dv_2 \end{pmatrix}_p \neq 0$$

于是由反函数定理有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^*(\theta, \varphi) = \boldsymbol{r}[u(\theta, \varphi), v(\theta, \varphi)]$$

并且

$$\boldsymbol{r}_\theta = \boldsymbol{r}_u \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \boldsymbol{r}_v \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \boldsymbol{r}_u du_1 + \boldsymbol{r}_v dv_1$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \boldsymbol{r}_u \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \boldsymbol{r}_v \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) = \boldsymbol{r}_u du_2 + \boldsymbol{r}_v dv_2$$

于是由上式可知曲面 $\boldsymbol{r}^*(\theta, \varphi)$ 的坐标曲线的切线方向是主方向，坐标曲线是曲率线。本题说明对于任意曲面只要满足题设条件，总可将坐标网变为曲率线网。

56. （证明）不失一般性不妨设曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$的参数曲线是曲率线，并设 p是曲面上任一点，则由罗德里克公式得

$$\boldsymbol{n}_u = -\kappa \boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{n}_v = -\kappa_2 \boldsymbol{r}_v$$

κ_1与 κ_2是曲面 $\boldsymbol{r}(uv)$在点 p沿坐标曲线（曲率线）的曲率（主曲率）。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv &= -\kappa_1 \boldsymbol{r}_u du - \kappa_2 \boldsymbol{r}_v dv \\ &= -\kappa_1 \boldsymbol{r}_u du - \kappa_1 \boldsymbol{r}_v dv + \kappa_1 \boldsymbol{r}_v dv - \kappa_2 \boldsymbol{r}_v dv \\ &= -\kappa_1 d\boldsymbol{r} + (\kappa_1 - \kappa_2) \boldsymbol{r}_v dv \qquad (1) \end{aligned}$$

并且 $d\boldsymbol{n} = -\kappa_1 \boldsymbol{r}_u du + \kappa_2 \boldsymbol{r}_u du - \kappa_2 \boldsymbol{r}_u du - \kappa_2 \boldsymbol{r}_v dv$

$$= -\kappa_2 d\boldsymbol{r} + (\kappa_2 - \kappa_1)\boldsymbol{r}_u du \qquad (2)$$

由（1）和（2）式得

$$(d\boldsymbol{n} + \kappa_1 d\boldsymbol{r})(d\boldsymbol{n} + \kappa_2 d\boldsymbol{r})$$

$$= (\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_1) du dv \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v$$

又由于坐标曲线是曲率线 $F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = 0$

所以 $(d\boldsymbol{n} + \kappa_1 d\boldsymbol{r})(d\boldsymbol{n} + \kappa_2 d\boldsymbol{r}) = 0$

展开上式得

$$d\boldsymbol{n} d\boldsymbol{n} + (\kappa_1 + \kappa_2) d\boldsymbol{n} d\boldsymbol{r} + \kappa_1 \kappa_2 d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r} = 0$$

即 $\varphi_3 - 2H\varphi_2 + K\varphi_1 = 0$

57. （解）根据曲面渐近曲线的定义可知，沿曲面的渐近曲线的密切平面与切平面重合。

设β是渐近曲线的付法线向量，$\boldsymbol{n}$ 是切平面的法向量，则

$$\boldsymbol{\beta} = \pm \boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \mp \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\chi \boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \chi^2 (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) = \chi^2$$

而对于曲面的渐近曲线 $\varphi_2 = 0$，

$$\varphi_3 = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \chi^2$$

$$\varphi_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = 1$$

把求得的 φ_1，φ_2，φ_3代入公式

$$\varphi_3 - 2H\varphi_2 + K\varphi_1 = 0$$

得 $\chi^2 + K = 0$

即 $\chi^2 = -K$

58. 证明设 $d\boldsymbol{r} = dx_1 \boldsymbol{e}_1 + dx_2 \boldsymbol{e}_2 + dx_3 \boldsymbol{e}_3$ 是曲面 $f(x_1, x_2, x_3)$

$=C$ 上任一条曲线的切向量，则由曲面 $f(x_1, x_2, x_3)=C$ 得

$$f_{x1}dx_1+f_{x2}dx_2+f_{x3}dx_3=0 \quad (1)$$

于是 $\mathbf{G}=f_{x1}\boldsymbol{e}_1+f_{x2}\boldsymbol{e}_2+f_{x3}\boldsymbol{e}_3$ 是曲面的法向量，其单位法向量为$\boldsymbol{n}=\dfrac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|}$

$$d\boldsymbol{n}=\frac{d\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|}-\frac{(\mathbf{G}d\mathbf{G})\cdot\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|^3}$$

这里 $d\mathbf{G}=df_{x1}\boldsymbol{e}_1+df_{x2}\boldsymbol{e}_2+df_{x3}\boldsymbol{e}_3$

若 $d\boldsymbol{r}=dx_1\boldsymbol{e}_1+dx_2\boldsymbol{e}_2+dx_3\boldsymbol{e}_3$是曲面 $f(x_1, x_2, x_3)=C$ 的主方向，则由罗德里克公式知 $d\boldsymbol{r}$平行 $d\boldsymbol{n}$，因此向量 $d\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{n}$，$d\boldsymbol{n}$线性相关．所以

$$0=(d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, d\boldsymbol{n})=\left[d\boldsymbol{r}, \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|}, \left(\frac{d\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|}-\frac{(\mathbf{G}d\mathbf{G})\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|^3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{G}|^2}\left[(d\boldsymbol{r}, \mathbf{G}, d\mathbf{G})-\frac{\mathbf{G}d\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|^4}(d\boldsymbol{r}, \mathbf{G}, \mathbf{G})\right]$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{G}|^2}(d\boldsymbol{r}, \mathbf{G}, d\mathbf{G})$$

由于$\dfrac{1}{|\mathbf{G}|^2}\neq 0$，所以

$$(d\boldsymbol{r}, \mathbf{G}, d\mathbf{G})=0$$

展开上式得

$$\det\begin{pmatrix} dx_1 & f_{x_1} & df_{x_1} \\ dx_2 & f_{x_2} & df_{x_2} \\ dx_3 & f_{x_3} & df_{x_3} \end{pmatrix}=0 \quad (2)$$

于是证得，若 $d\boldsymbol{r}=dx_1\boldsymbol{e}_1+dx_2\boldsymbol{e}_2+dx_3\boldsymbol{e}_3$是曲面 $f(x_1, x_2, x_3)=C$

的主方向，则必满足于微分方程组

$$\left.\begin{aligned} &f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+f_{x_3}dx_3=0\\ &\det\begin{pmatrix} dx_1 & f_{x1} & df_{x1}\\ dx_2 & f_{x2} & df_{x2}\\ dx_3 & f_{x3} & df_{x3}\end{pmatrix}=0\end{aligned}\right\}$$

59. (解) 把曲面的方程写成向量形式，并求其第一、第二基本量，

$$\boldsymbol{r}=\left\{\frac{a}{2}(u-v),\ \frac{b}{2}(u-v),\ \frac{uv}{2}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{v}{2}\right\},\ \boldsymbol{r}_v=\left\{-\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{u}{2}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,\ 0,\ 0\},\ \boldsymbol{r}_{uv}=\left\{0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\boldsymbol{r}_{vv}=\{0,0,\ 0\}$$

求得曲面的第一、第二基本量为

$$E=\frac{1}{4}(a^2+b^2+v^2),\ \ F=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+uv)$$

$$G=\frac{1}{4}(a^2+b^2+u^2),\ \ L=N=0.$$

$$M=ab/\sqrt{b^2(u-v)^2+a^2(u+v)^2+4a^2b^2}$$

把结果代入曲率线的微分方程

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0$$

得
$$\frac{a^2+b^2+v^2}{\sqrt{b^2(u-v)^2+a^2(u+v)^2+4a^2b^2}}\ du^2$$

$$-\frac{a^2+b^2+u^2}{\sqrt{b^2(u-v)^2+a^2(u+v)^2+4a^2b^2}}\ dv^2=0$$

为所求曲率线的微分方程。

60. (解) 把曲面方程写成向量形式，并求其第一、第二基本量代入曲率线的微分方程。

$$\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$$

$$r_u=\{\cos v,\ \sin v,\ 0\},\ r_v=\{-u\sin v,\ u\cos v,\ a\}$$

$$r_{uu}=\{0,\ 0,\ 0\},\ r_{uv}=\{-\sin v,\ \cos v,\ 0\}$$

$$r_{vv}=\{-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0\}$$

求得曲面的第一第二基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$$

$$L=N=0\quad M=\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

由曲率线的微分方程得

$$du^2-(u^2+a^2)dv^2=0$$

或者 $$dv=\pm\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}du$$

积分得曲率线的参数关系式为

$$v\pm\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})=C$$

61. （证明）设曲线L的切平面的单位法向量为$\boldsymbol{n}$，其对应点的密切平面的法向量（副法线方向）为$\boldsymbol{\beta}$，则有

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\beta}=\cos\theta=C\quad(C\text{为常数})$$

微分上式得 $-\boldsymbol{n}\chi\nu ds+\boldsymbol{\beta}d\boldsymbol{n}=0$

又因为 $d\boldsymbol{n}=-\kappa d\boldsymbol{r}=-\kappa\boldsymbol{\tau}ds$（$\kappa$为曲率线的主曲率）

从而有 $-\boldsymbol{n}\chi\nu ds+\kappa\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\tau}ds=0$

由于 $\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\tau}$所以 $-\boldsymbol{n}\chi\nu ds=0$

因为 $\boldsymbol{n}\nu\neq0$，所以 $\chi=0$。知曲率线为平面曲线。

62. （解）首先求得曲面 $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$ 的第一、第二基本量为

$$E=1+4u^2,\ F=4uv,\ G=1+4v^2$$

$$L=N=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\quad M=0$$

由曲率线的微分方程

$$(EM-LF)du^2+(EN-LG)dudv+(FN-MG)dv^2=0$$

得 $$uvdu^2+(v^2-u^2)dudv-uvdv^2=0$$

或 $$(udu+vdv)(vdu-udv)=0$$

即 $$udu+vdv=0$$

$$vdu-udv=0$$

积分得 $u^2+v^2=C^2$

令 $u=bv$ （其中 b，c是常数）

是曲率线的参数关系式，把 $v=\pm\sqrt{c^2-u^2}$，$u=bv$分别代入曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(uv)$中，得曲率线的方程为

$$\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1\pm\sqrt{c^2-u^2}\,\boldsymbol{e}_2+(u^2\pm\sqrt{c^2-u^2})\boldsymbol{e}_3$$

与 $$\boldsymbol{r}=bv\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(b^2v^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$$

在点$u=0$，$v=0$，得曲面的第一、第二基本量为

$$E=1,\quad F=0,\quad G=1$$

$$L=2,\quad M=0,\quad N=2$$

$\dfrac{E}{L}=\dfrac{F}{M}=\dfrac{G}{N}=\dfrac{1}{2}$，知点$u=0$，$v=0$ 是曲面的脐点.

63. （解）由上题知曲面$\boldsymbol{r}(u,v)=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$的曲率线是 uv平面上的同心圆族 $u^2+v^2=C^2$与直线族 $u=bv$在曲面上的象.

引入参数变换 $u=C\cos\theta$，$v=C\sin\theta$

则曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$在此变换下为

$$\boldsymbol{r}(C,\theta)=(C\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(C\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+C^2\boldsymbol{e}_3$$

求得曲面$\boldsymbol{r}(C,\theta)$的第一第二基本量为

$$E=C^2,\quad F=0,G=1+4C^2$$

$$L=-2C^2(1+4C^2)^{-\frac{1}{2}},\quad M=0,N=-2(1+4C^2)^{-\frac{1}{2}}$$

由 $F=M=0$ 知曲面$\boldsymbol{r}(C,\theta)$的坐标曲线为曲率线，其主曲率为

$$\kappa_1=\frac{L}{E}=-2\ (1+4C^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\kappa_2=\frac{N}{G}=-2(1+4C^2)^{-\frac{3}{2}}$$

64. （解）首先求曲面 $\boldsymbol{r}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$ 的第一、第二基本量

$$E=u^2,\quad F=0,\quad G=2$$

$$L=M=0,\quad N=\frac{\sqrt{2}}{2}u$$

把第一、第二基本量代入曲率线的微分方程，并积分得

$$\ln(u+\sqrt{u^2+1})-v=C$$

$$\ln(u+\sqrt{u^2+1})+v=C$$

所求曲率线是上面两条曲线在曲面 $\boldsymbol{r}(u,\ \theta)$上的象。

65. （解）求得双曲抛物面的第、第二基本量为

$$E=a^2+b^2+v^2,\quad F=a^2-b^2+uv,\quad G=a^2+b^2+u^2$$

$$L=N=0\ ,\quad M=\frac{-2ab}{\sqrt{EG-F^2}}$$

把上面结果代入高斯曲率与平均曲率公式得

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-4a^2b^2}{(EG-F^2)^2}$$

$$=\frac{-4a^2b^2}{[4a^2b^2+a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2]^2}$$

$$H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}$$

$$=\frac{4ab(a^2-b^2\ \ +uv)}{[4a^2b^2-a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2]^2}$$

66. （解）由旋转曲面的方程可求得其第一与第二基本量为

$$E = g'^2 + f'^2, \quad F = 0, \quad G = g^2$$

$$L = \frac{g'f'' - g''f'}{\sqrt{g'^2 + f'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{gf'}{\sqrt{g'^2 + f'^2}}$$

代入高斯曲率与平均曲率公式得

$$K = \frac{f'(g'f'' - g''f')}{g(g'^2 + f'^2)^2}$$

$$H = \frac{f'(g'^2 + f'^2) + g(g'f'' - g''f')}{2g(g'^2 + f'^2)^{(3/2)}}$$

67. （解）设正螺面的方程为 $\boldsymbol{r} = \{t\cos\varphi, \ t\sin\varphi, \ b\varphi\}$ 可求得

$$E = t^2 + b^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

$$L = N = 0, \quad M = \frac{b}{\sqrt{t^2 + b^2}}$$

高斯曲率 $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{-b^2}{(t^2 + b^2)^2}$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = 0$$

由公式 $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H = 0$

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{-b^2}{(t^2 + b^2)^2}$$

可得正螺面的主曲率为 $\kappa_1 = -\kappa_2 = \dfrac{b}{t^2 + b^2}$.

68. （解）曲面 $z = f(x, y)$ 的平均曲率与高斯曲率为

$$H=\frac{(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f^2_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

69. （解）把曲面方程写成向量方程求得平均曲率与高斯曲率为

$$H=-\frac{1+u^2}{(1+2u^2)^{\frac{3}{2}}},\quad K=-\frac{1}{(2u^2+1)^2}$$

70. （解）首先求得环面的第一与第二基本量为

$$E=(b+a\sin\varphi)^2,\quad F=0,\quad G=a^2$$

$$L=(b+a\sin\varphi)\sin\varphi,\quad M=0,\quad N=a$$

把第一与第二基本量代入主曲率方程

得
$$(EG-F^2)\kappa^2-(EN+GL-2FM)\kappa+(LN-M^2)=0$$

$$a^2(b+a\sin\varphi)^2\kappa^2-[a(b+a\sin\varphi)^2$$
$$+a^2(b+a\sin\varphi)\sin\varphi]\kappa+a(b+a\sin\varphi)\sin\varphi=0$$

求得环面的主曲率为

$$\kappa_1=\frac{(b+2a\sin\varphi)+b}{2a(b+a\sin\varphi)}=\frac{1}{a}$$

$$\kappa_2=\frac{(b+2a\sin\varphi)-b}{2a(b+a\sin\varphi)}=\frac{\sin\varphi}{b+a\sin\varphi}$$

环面的高斯曲率 $K=\kappa_1\kappa_2=\dfrac{\sin\varphi}{a(b+a\sin\varphi)}$

平均曲率为 $H=\dfrac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)=\dfrac{b+2a\sin\varphi}{2a(b+a\sin\varphi)}$

71. （解）设直纹曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$$

则 $\quad \boldsymbol{r}_s=\rho'(s)+v\boldsymbol{b}'(s),\ \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}(s)$

$$\boldsymbol{r}_{ss}=\rho''(s)+v\boldsymbol{b}''(s),\ \boldsymbol{r}_{sv}=\boldsymbol{b}'(s),\ \boldsymbol{r}_{vv}=0$$

直纹曲面的第二基本量为

$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_s,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{ss})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\rho''+v\boldsymbol{b}'',\ \rho'+v\boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M=\frac{(\boldsymbol{r}_{sv},\boldsymbol{r}_s,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\boldsymbol{b},\rho'+v\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\boldsymbol{b}',\rho',\boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$N=\frac{(\boldsymbol{r}_s,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

直纹曲面的高斯曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-(\boldsymbol{b}',\rho',\boldsymbol{b})^2}{EG-F^2}\leqslant 0$$

72. （解）把已知曲面写成向量方程并求其第一、第二基本量

$$\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(v)\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v,\ \sin v,\ 0\},\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v,\ u\cos v, f'(v)\}$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=0、\ \boldsymbol{r}_{uv}=\{-\sin v,\ \cos v,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\{-u\cos v,\ -u\sin v, f''(v)\}$$

求得锥面的第一、第二基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+f'^2(v)$$

$$L=0,\ M=\frac{-f'(v)}{\sqrt{EG-F^2}},\ N=\frac{uf''(v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

锥面的高斯曲率为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{f'^2(v)}{[u^2+f'^2(v)]^2}<0$$

由公式 $K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}$ 知 R_1与 R_2的符号相反，即锥面的主

曲率半径符号相反。

73. （解）设悬链面的方程为

$$r=\{\sqrt{u^2+a^2}\cos v,\ \sqrt{u^2+a^2}\sin v,\ a\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})\}$$

求得悬链面的第一、第二基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$$

$$L=\frac{-a}{u^2+a^2},\ M=0,\ N=a$$

把第一第二基本量代入主曲率方程得

$$(u^2+a^2)\ \kappa^2-\frac{a^2}{u^2+a^2}=0$$

即 $$\kappa^2=\left(\frac{a}{u^2+a^2}\right)^2$$

于是悬链面的主曲率为$\kappa_1=\dfrac{a}{u^2+a^2}$，$\kappa_2=-\dfrac{a}{u^2+a^2}$。所以其平均曲率

$$H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)=0$$

74. （证明）若曲面是平面或球面则 $\kappa_1=\kappa_2$。于是

$$H^2=\left[\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)\right]^2=\kappa_1^2=\kappa_2^2=\kappa_1\kappa_2=K$$

反之，若 $H=K$，则

$$\left[\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)\right]^2=\kappa_1\kappa_2$$

展开上式得

$$(\kappa_1-\kappa_2)^2=0$$

从而 $\kappa_1=\kappa_2$。曲面为平面或球面。

75. （证明）容易计算得曲面 $r(u,\ \theta)$的第一基本量与高斯曲率为

$$E=1+\frac{1}{u^2},\ F=0,\ G=u^2,\ K=\frac{-1}{1+u^2}$$

曲面 $r^*(u^*,\ \theta^*)$的第一基本量与高斯曲率为

$$E^*=1,\ F^*=0,\ G^*=1+u^{*2},\ K^*=\frac{-1}{1+u^{*2}}$$

因此两曲面在对应点 $u=u^*$, $\theta=\theta^*$有相等的高斯曲率。

假定曲面 $r(u,\ \theta)$与曲面 $r^*(u^*\ \theta^*)$等距等价，则存在曲面 $r(u,\ \theta)$与 $r^*(u^*,\ \theta^*)$之间的一一变换 $\sigma: u^*=u^*(u,\theta)$, $\theta^*=\theta^*(u,\ \theta)$使其在对应点有

$$E=E^*,\ F=F^*,\ G=G^*$$

且 $$\det\frac{\partial(u^*,\ \theta^*)}{\partial(u,\ \theta)}=\begin{vmatrix}u^*_u & u^*_\theta\\ \theta^*_u & \theta^*_\theta\end{vmatrix}\neq 0$$

由 $K=K^*$得 $1+u^{2*}=1+u^2$,即 $u^*=\pm u$,从而 $u^*_\theta\equiv 0$，于是若 $\det\frac{\partial(u^*,\ \theta^*)}{\partial(u,\ \theta)}\neq 0$当且仅当 $\theta_\theta^*\neq 0$.

另一方面，由第一基本量间的参数变换关系式（参看本章第2题）得

$$1+(1+u^2)\theta_u^{*2}=1+\frac{1}{u^2}$$

$$\theta_u^*\theta_\theta^*=0$$

$$(1+u)\theta_\theta^{*2}=u^2$$

由前两式得 $\theta_\theta^*=0$,这与参数变换σ: $\begin{cases}u^*=u^*(u,\theta)\\ \theta^*=\theta^*(u,\ \theta)\end{cases}$

是一一变换矛盾，于是证得尽管两曲面在其对应点的高斯曲率相等，但两曲面不等距等价。

76. （解）把已知曲面 $xyz=1$以 x, y为参数写成向量方程，并求其第一与第二基本量

$$\boldsymbol{r}=\left\{x,\ y,\ \frac{1}{xy}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_x=\left\{1,\ 0,\ -\frac{1}{x^2y}\right\},\ \boldsymbol{r}_y=\left\{0,\ 1,\ -\frac{1}{xy^2}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=\left\{0,\ 0,\ \frac{2}{x^3y}\right\},\ \boldsymbol{r}_{yy}=\left\{0,\ 0,\ \frac{2}{xy^3}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xy}=\left\{0\quad 0\ \frac{1}{x^2y^2}\right\}$$

求得第一、第二基本量为

$$E=1+\frac{1}{x^4y^2},\ F=\frac{1}{x^3y^3},\ G=1+\frac{1}{x^2y^4}$$

$$L=\frac{2}{x^3y\sqrt{EG-F^2}},M=\frac{1}{x^2y^2\sqrt{EG-F^2}},N=\frac{2}{xy^3\sqrt{EG-F^2}}$$

由曲面脐点的定义得 $\dfrac{2}{x^4y^2+1}=1=\dfrac{2}{x^2y^4+1}$

即 $x^4y^2=x^2y^4=1$

解得 $x=\pm y$，$x=\pm 1$，于是所求脐点的曲线坐标为$a(1,\ 1)$，$b(-1,\ -1)$ $c(-1,\ 1)$，$d(1,\ -1)$。

在曲面 $xyz=1$ 上如下的点是脐点：

$A(1,1,1)$，$B(1,-1,-1)$，$C(-1,1,-1)$，$D(-1,-1,1)$.

77. （证明）设曲线 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(s)$的切线曲面为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(s)+v\boldsymbol{\tau}(s)$$

则

$$\boldsymbol{r}_s=\boldsymbol{\rho}'+v\boldsymbol{\tau}'=\boldsymbol{\tau}+v\kappa\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{r}_{ss}=\boldsymbol{\tau}'+v\kappa'\boldsymbol{v}+v\kappa\boldsymbol{v}'=-v\kappa^2\boldsymbol{\tau}+(v\kappa'+\kappa)\boldsymbol{v}+v\kappa\chi\boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{r}_{sv}=\boldsymbol{\tau}'=\kappa\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{r}_{vv}=0$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{-v\kappa}{|v\kappa|}\boldsymbol{\beta}$$

切线曲面的第二基本量为

$$L=-|v\kappa|\chi,\quad M=0,\quad N=0$$

因　$LN-M^2=0$，所以曲线 $\boldsymbol{\rho}(s)$ 的切线曲面上的点全是抛物点.

78. (解)

$$\boldsymbol{r}=\{u,\ v,\ u^2+v^3\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,\ 0,\ 2u\},\quad \boldsymbol{r}_v=\{0,\ 1,\ 3v^2\}$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,\ 0,\ 2\},\quad \boldsymbol{r}_{uv}=\{0,\ 0,\ 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\{0,\ 0,\ 6v\}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}\{-2u,\ -3v^2,\ 1\}$$

求得已知曲面的第二基本量为

$$L=\frac{2}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}},\quad M=0,\quad N=\frac{6v}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}$$

$$LN-M^2=\frac{12v}{4u^2+9v^4+1}$$

由于对任意的u、v，$4u^2+9v^4+1>0$，所以高斯曲率$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$与 v的符号相同，于是有

当 $v>0$时　$LN-M^2>0$　是椭圆点

当 $v<0$时　$LN-M^2<0$　是双曲点

当 $v=0$时　$LN-M^2=0$　是抛物点

79. (证明)

$$\boldsymbol{r}=\{a\sin u\cos v,\ b\sin u\sin v,\ c\cos u\}$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ -c\sin u\}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-a\sin u\sin v,\ b\sin u\cos v,\ 0\}$$

$$n=\frac{\sin u}{\sqrt{EG-F^2}}\{bc\sin u\cos v, ac\sin u\sin v, ab\cos u\}$$

$$r_{uu}=\{-a\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ -c\cos u\}$$

$$r_{uv}=\{-a\cos u\sin v,\ b\cos u\cos v,\ 0\}$$

$$r_{vv}=\{-a\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ 0)$$

求得椭圆面的第二基本量为

$$L=r_{uu}n=\frac{abc\sin u}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=r_{uv}n=0$$

$$N=r_{vv}n=\frac{abc\sin^3 u}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$LN-M^2=\frac{a^2b^2c^2\sin^4 u}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$=\frac{a^2b^2c^2\sin^2 u}{b^2c^2\sin^2 u\cos^2 v+a^2c^2\sin^2 u\sin^2 v+a^2b^2\cos^2 u}$$

由上式可知当 $\sin u\neq 0$时，高斯曲率$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}>0$ 即

$\sin u\neq 0$ 的点是椭圆面的椭圆点，面 $\sin u=0$的点恰是椭圆面与 oz轴的交点，于是由于坐标系的选取使得在 $\sin u=0$ 的点椭圆面的高斯曲率 $K=0$。实际上椭圆面上的所有点都是椭圆点。

80. （解）把已知曲面的方程化成向量方程，并求其第二基本量：

$$r=\{v^3,\ u^2,\ u+v\}$$

$$r_u=\{0,\ 2u,\ 1\},\ r_v=\{3v^2,\ 0,\ 1\}$$

$$r_{uu}=\{0,\ 2,\ 0\},\ r_{uv}=0,\ r_{vv}=\{6v,\ 0,\ 0\}$$

求得已知曲面的第二基本量为

$$L=\frac{6v^2}{\sqrt{EG-F^2}},\ M=0,\ N=\frac{12uv}{\sqrt{EG-F^2}}$$

若点 $p(u,\ v)$是曲面的抛物点，则

$$LN-M^2=\frac{72uv^3}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

即 $u=0$ 或$v=0$，于是所求曲面的抛物点为

$$\boldsymbol{r}_1=\{v^3,\ 0,\ v\},\ \boldsymbol{r}_2=\{0,\ u^2,\ u\}$$

分别为 oxz平面与 oyz平面的立方抛物线与抛物线。

81. (解) 设点 $p(u_0,\ v_0)$ 是曲面$\boldsymbol{r}(u,\ v)$的平点，点Q $(u_0+du,\ v_0+dv)$是 p点邻域的任一点，则：

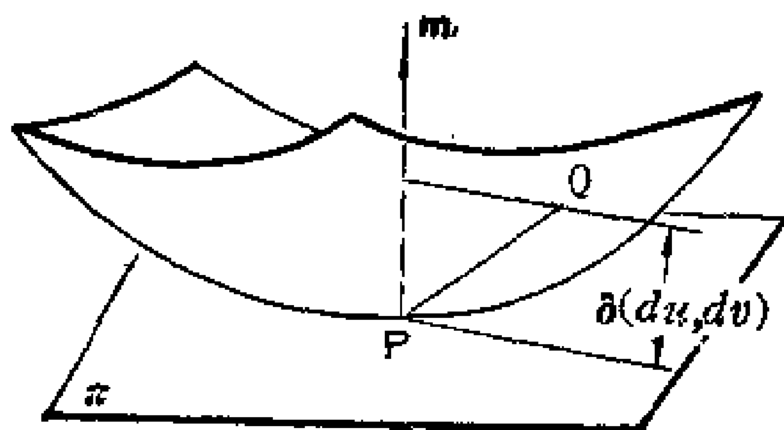
$$\boldsymbol{r}(u_0+du,\ v_0+dv)=\boldsymbol{r}(u_0,\ v_0)+d\boldsymbol{r}+\frac{1}{2!}d\boldsymbol{r}^2$$

$$+\frac{1}{3!}d\boldsymbol{r}^3+0[(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}]$$

略去三阶以上高阶无穷小，得

$$\boldsymbol{r}(u_0+du,\ v_0+dv)-\boldsymbol{r}(u_0v_0)=d\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ d\boldsymbol{r}^2+\frac{1}{6}d\boldsymbol{r}^3$$

设 δ $(du,\ dv)$ 为点 Q 至点 p的切平面 π 的距离，则$\delta(du,\ dv)=[\boldsymbol{r}(u_0+du,\ v_0+dv)\ -\boldsymbol{r}(u_0v_0)]\cdot\boldsymbol{n}$



81题解答(1)

$$= d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} + \frac{1}{2}d\boldsymbol{r}^2\cdot\boldsymbol{n} + \frac{1}{6}d\boldsymbol{r}^3\cdot\boldsymbol{n}$$

因 $d\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$，点 p是曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$的平点 $(L=M=N=0)$ 所以 $\varphi_2=0$，即 $d\boldsymbol{r}^2\cdot\boldsymbol{n}=0$。

于是

$$\delta(du, dv) = \frac{1}{6}d\boldsymbol{r}^3\cdot\boldsymbol{n}$$

$$= \frac{1}{6}[\boldsymbol{r}_{uuu}\boldsymbol{n}du^3 + 3\boldsymbol{r}_{uuv}\boldsymbol{n}du^2dv + 3\boldsymbol{r}_{uvv}dudv^2\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{vvv}dv^3]$$

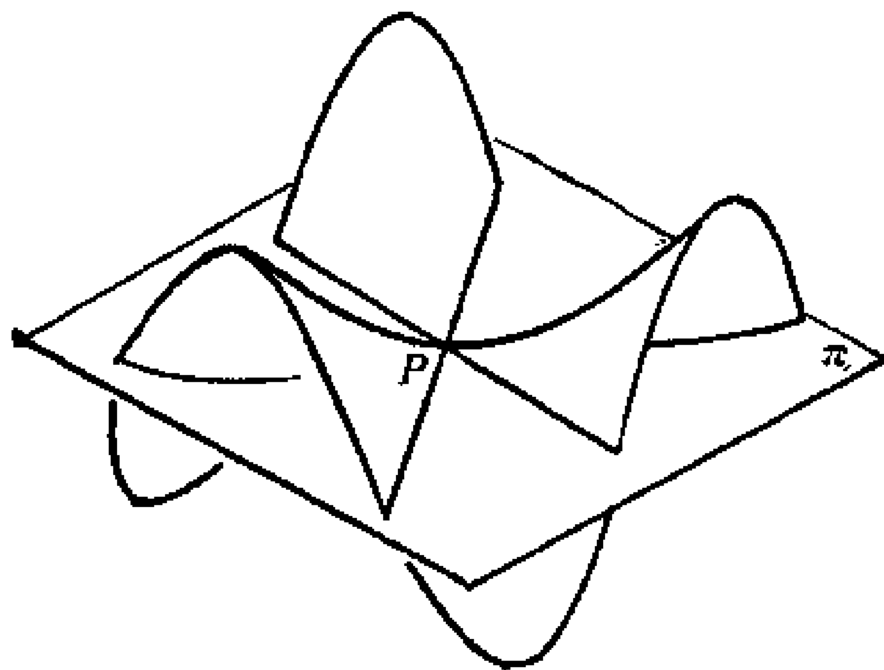
$$= \frac{1}{6}[Adu^3 + Bdu^2dv + Cdudv^2 + Ddv^3]$$

其中 $A=\boldsymbol{r}_{uuu}\boldsymbol{n}$, $B=3\boldsymbol{r}_{uuv}\boldsymbol{n}$, $C=3\boldsymbol{r}_{uvv}\boldsymbol{n}$, $D=\boldsymbol{r}_{vvv}\boldsymbol{n}$

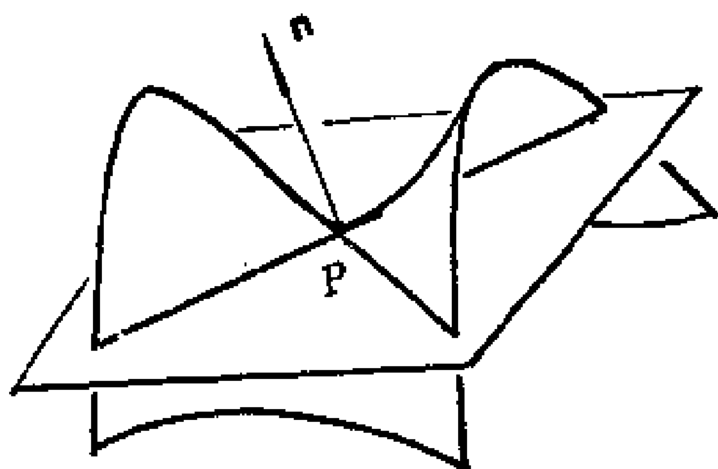
从而 $\delta(du, dv)$ 是关于 $\frac{du}{dv}$的三次方程

$$A\left(\frac{du}{dv}\right)^3 + B\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + C\frac{du}{dv} + D = 0$$

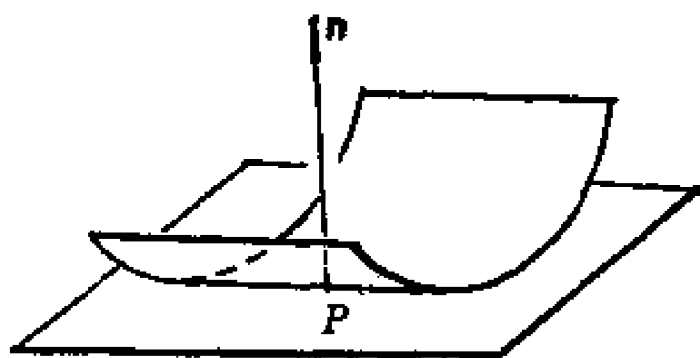
由代数基本定理知此方程至少有一个实根。



81题解答(2)



81题解答(3)



81题解答(4)

假若此三次方程有三个不同的实根，曲面 $r(u, v)$在平点 p沿着这三个方向与平面π 相切，且这三个方向把曲面在点 p分成六个区域，依次在这六个区域内 $\delta(du, dv)$的值正负相间。

若此三次方程有两个，或一个实根，则曲面 $r(u, v)$在平点 p沿着两个，或一个方向与平面 π相切，于是可知曲面$r(u, v)$在其平点邻域的状态由三次方程 $\delta(du, dv)$决定。

82. （解） （参考上题）

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + (u^3 + v^3 + u^4)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{e}_1 + (3u^2 + 4u^3)\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{e}_2 + 3v^2\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{uu} = (6u + 12u^2)\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{r}_{uv} = 0, \quad \boldsymbol{r}_{vv} = 6v\boldsymbol{e}_3$$

$$n=\frac{-(3u^2+4u^3)e_1-3v^2e_2+e_3}{\sqrt{(3u^2+4u^3)^2+9v^4+1}}$$

当$u=0$, $v=0$ 时 $r_{uu}=r_{uv}=r_{vv}=0$,即 $L=M=N=0$ 所以点 $u=0$, $v=0$是已知曲面的平点。

$$r_{uuu}=(6+24u)e_3,\ \ r_{uuv}=0,\ \ r_{uvv}=0,\ \ r_{vvv}=6e_1$$

$$\delta(du,dv)=\frac{1}{6}[r_{uuu}du^3+3r_{uuv}du^2dv+3r_{uvv}dudv^2+r_{vvv}dv^3]\cdot n$$

$$=\frac{1}{6}[6(e_3\cdot e_3)du^3+6(e_3\cdot e_3)dv^3]$$

$$=du^3+dv^3$$

$$=(du+dv)(du^2-dudv+dv^2)$$

因为对任意的 $du:dv$, 二次齐次式 $du^2-dudv+dv^2$是正定的，所以由 $\delta(du,dv)=0$ 知存在且只存在一个方向 $du+dv=0$,即 $du:dv=1:-1$,沿此方向已知曲面在点 $u=0,v=0$与曲面在此点的切平面相切

83. （解）由曲面的方程 $r=(f(t)\cos\theta)e_1+f(t)\sin\theta e_2+te_3$ 求得曲面的第二基本量为

$$L=\frac{-f}{(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}},\ \ M=0,N=\frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

由于 $f(t)>0$,，且已知曲面的每一点都是抛物点，所以

$$LN-M^2=\frac{-ff''}{1+f'^2}=0$$

即 $f''(t)=0$, $f(t)=a$或 $f(t)=c_1t+c_2$ ($a,c_2\ c_1$,为常数)，当 $f(t)=a$ 时曲面 $r=(f(t)\cos\theta)e_1+(f(t)\sin\theta)e_2+te_3$ 为柱面 当 $f(t)=c_1t+c_2$ 时，已知曲面为锥面。

84. （解）以x, y 为 参数把曲面$z=a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$写成

向量方程并求其第一与第二基本量。

$$\boldsymbol{r}=\left\{x,\ y,\ a\ \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_x=\left\{1,\ 0,\ a\ \left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_y=\left\{0,\ 1,\ a\ \left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=\left\{0,\ 0,\ \frac{2ay}{x^3}\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xy}=\left\{0,\ 0,\ a\ \left(-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_{yy}=\left\{0,\ 0,\ 2a\frac{x}{y^3}\right\}$$

求得已知曲面的第一与第二基本量为

$$E=1+a^2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y}\right)^2,\quad F=\frac{-a^2(x^2-y^2)^2}{x^3y^3}$$

$$G=1+a^2\left(\frac{y^2-x^2}{xy^2}\right)^2,\quad EG-F^2=1$$

$$+\frac{a^2(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^4y^4}$$

$$L=2a\quad(\sqrt{EG-F^2}\ )^{-1}\frac{y}{x^3},$$

$$M=a(\sqrt{EG-F^2}\ )^{-1}\ \left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$N=2\ a(\sqrt{EG-F^2}\ )^{-1}\ \frac{x}{y^3}$$

由曲面渐近曲线的微分方程

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

得 $$(\sqrt{EG-F^2})^{-1}\left(\frac{1}{x^3}dx-\frac{1}{y^3}dy\right)(ydx-xdy)=0$$

解得 $\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}=c$，与 $\frac{y}{x}=c$

为所求曲面 $r=\left\{x,\ y,\ a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right\}$ 的渐近曲线的参数关系式。

85. （解）以 x、y 为参数将曲面 $z=xy^2$ 写成向量方程 $r=\{x,\ y,\ xy^2\}$，并求其第一与第二基本量为

$$E=1+y^4,\ F=2xy^3,\ G=1+4x^2y^2$$

$$L=0,\ M=2(\sqrt{EG-F^2})^{-1}y,\ N=2(\sqrt{EG-F^2})^{-1}x$$

$$EG-F^2=1+4x^2y^2+y^4$$

于是 $$Ldx^2+2Mdxdy+Ndy^2=4(\sqrt{EG-F^2})^{-1}\left(ydxdy+\frac{1}{2}xdy^2\right)$$

$$=(\sqrt{EG-F^2})^{-1}dy(4ydx+2xdy)=0$$

即 $dy=0$，或 $\frac{2}{x}dx+\frac{1}{y}dy=0$。积分得 $y=c$，或 $x^2y=c$

参数平面的曲线 $y=c$ 或 $x^2y=c$ 在曲面 $r=\{x,\ y,xy^2\}$ 上的象为所求的渐近曲线。

86. （解）以 x、y 为参数将曲面 $z=x^3+y^2$ 写成向量方程并求其第一与第二基本量：

$$r=\{x,\ y,\ x^3+y^2\}$$

$$r_x=\{1,\ 0,\ 3x^2\},\ r_y=\{0,\ 1,\ 2y\}$$

$$r_{xx}=\{0,\ 0,\ 6x\},\ r_{xy}=0,\ r_{yy}=\{0,\ 0,\ 2\}$$

已知曲面的第一与第二基本量为

$$E=1+9x^4,\ F=6x^2y,\ G=1+4y^2$$

$$EG-F^2=1+9x^4+4y^2,\ L=\frac{6x}{\sqrt{1+9x^4+4y^2}}$$

$$M=0\ ,\ N=\frac{2}{\sqrt{1+9x^4+4y^2}}$$

由 $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0$，求得该曲面抛物点的轨迹为 $x=0$。

由渐近线的微分方程 $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$，得

$$\frac{6x}{\sqrt{1+4y^2+9x^2}}dx^2+\frac{2}{\sqrt{1+4y^2+9x^4}}dy^2=0$$

即 $3xdx^2+dy^2=0$

积分得渐近曲线族为

$$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3x^3}+c$$

从而可知渐近曲线的尖点在曲面的抛物点的轨迹 $x=0$ 上

87. （解）求得已知直纹曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{\frac{a}{2}(u+v),\ \frac{b}{2}(u-v),\ \frac{1}{2}uv\right\}$的第一与第二基本量为

$$E=\frac{1}{4}(a^2+b^2+v^2),\ F=\frac{1}{4}(a^2+b^2+uv)$$

$$G=\frac{1}{4}(a^2+b^2+u)$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{b^2(u+v)^2+a^2(-u+v)^2+4a^2b^2}}$$

$$\{b(u+v),\ a(-u+v),\ -2ab\}$$

$$M=\frac{-ab}{\sqrt{b^2(u+v)^2+a^2(-u+v)^2+4a^2b^2}},\quad L=N=0$$

由曲面渐近曲线的微分方程得

$$\frac{-ab}{\sqrt{b^2(u+v)^2+a^2(-u+v)^2+4a^2b^2}}dudv=0$$

从面得　$du=0$，或 $dv=0$

对上两式积分知 u曲线或 v曲线是曲面的渐近曲线，故曲面的渐近曲线是坐标曲线.

88．（证明）假定曲面 $r(u, v)$的坐标曲线是渐近曲线，则u曲线是渐近曲线，由于对于 u曲线 $du\neq 0$，$dv=0$于是由渐近曲线的定义

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=Ldu^2=0$$

得　　$L=0$

v 曲线是曲面 $r(u, v)$的渐近曲线．由于对于 v曲线 $du=0$，$dv\neq 0$，于是

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=Ndv^2=0$$

得　　$N=0$

反之，若对于曲面 $r(u, v)$ 的第二基本量有$L=N=0$，则由曲面的渐近曲线的微分方程

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

得　　$2Mdudv=0$

因 $M\neq 0$，（否则曲面只限于平面）所以得

$$du=0,\text{或 } dv=0$$

对上式积分可知曲面 $r(u, v)$的坐标曲线为渐近曲线。

89．（证明）若简单曲面 $r(u, v)$的所有方向都是渐近方向，则对任意的 $du:dv$：

$$\varphi_2=-drdn=0$$

因 $r(u, v)$是简单曲面片，所以 $dr\neq 0$．于是，

$$dn=0\quad(n\text{是常向量})$$

由 $\quad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{n}=0$

对 u 积分得 $\quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}=f(v)$

再由 $\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}=0$，关于参变数 v 微分 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}=f(v)$，$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_v=f'(v)$ 因 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}_v$ 得

$$f'(v)=0$$

即 $\quad f(v)=c \quad$ （c是积分常数）

于是 $\quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}=c$

这是平面的向量方程。于是简单曲面 $\boldsymbol{r}(u,\ v)$是平面。

90．（解）以 x、y 为参数将曲面 $z=y\sin x$ 写成向量方程，并求其第一与第二基本量：

$$\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ y\sin x\}$$

$$\boldsymbol{r}_x=\{1,\ 0,\ y\cos x\},\ \boldsymbol{r}_y=\{0,\ 1,\ \sin x\}$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=\{0,\ 0,\ -y\sin x\},\ \boldsymbol{r}_{xy}=\{0,0,\cos x\},\ \boldsymbol{r}_{yy}=0$$

求得已知曲面的第一与第二基本量为

$$E=1+y^2\cos^2x,\ F=y\cos x\sin x,\ G=1+\sin^2x$$

$$EG-F^2=1+y^2\cos^2x+\sin^2x,$$

$$L=\frac{-y\sin x}{\sqrt{1+y^2\cos^2x+\sin^2x}}$$

$$M=\frac{\cos x}{\sqrt{1+y^2\cos^2x+\sin^2x}},\ N=0$$

所求渐近曲线的微分方程为

$$(-y\sin x)dx^2+2\cos x\,dx\,dy=0$$

解得 $\quad dx=0$ 或 $\operatorname{tg}x\,dx-\frac{2}{y}dy=0$

积分得曲面 $z=y\sin x$上两族渐近曲线为

$$x=\theta \text{ 与 } y^2\cos x=c \text{（其中}\theta\text{为可变常数，}c\text{是积分常数）}$$

91．（解）由旋转曲面的方程 $\boldsymbol{r}=\{t\cos\varphi,\ t\sin\varphi,\ \ln t\}$

求得第一与第二基本量为

$$E=t^2,\ F=0,\ G=\frac{1+t^2}{t^2}$$

$$L=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}},\ M=0,\ N=\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$$

由渐近曲线的微分方程 $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$

得 $$\left(-td\varphi^2-\frac{1}{t}dt^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=0$$

即 $$d\varphi+\frac{1}{t}dt=0,\ d\varphi\ -\frac{1}{t}dt=0$$

积分得 $t=c_1e^{\varphi}$ 与 $t=c_2e^{-\varphi}$

为旋转曲面的渐近曲线族。

92. （解）因为u 曲线为

$$r=\{f_1(u),\ c,\ f_2(u)+c\}$$

v曲线为 $r=\{c,\ \varphi_1(c),\ \varphi_2+c\}$

显然 u曲线与 v曲线是平面曲线。

由 $r_{uv}=0$ 得 $M=0$

所以坐标曲线构成共轭网。

93. （解）以 x、y为参数将曲面 $z=Ax^2+By^2$ 写成向量方程，并求其第二基本量：

$$r=\{x,\ y,\ Ax^2+By^2\}$$

$$r_x=\{1,\ 0,\ 2Ax\},\ r_y=\{0,\ 1,\ 2By\}$$

$$r_{xy}=0$$

由 $r_{xy}=0$ 得$M=\frac{(r_{xy},\ r_x,\ r_y)}{\sqrt{EG-F^2}}=0$

所以抛物面 $z=Ax^2+By^2$ 的坐标曲线构成共轭网。

94. （解）曲面$r=(\cos u)e_1+(\sin u+\sin v)e_2+(\cos v)e_3$

的 u曲线为

$$r(u,\ v_0)=(\cos u)e_1+(\sin u+\sin v_0)e_2+(\cos v_0)e_3$$

v曲线为

$$r(u_0,\ v)=(\cos u_0)e_1+(\sin u_0+\sin v)e_2+(\cos v)e_3$$

显然坐标曲线为圆周曲线

又因 $r_u=(-\sin u)e_1+(\cos u)e_2$

$$r_{uv}=0$$

所以 $\qquad M=0$

即已知曲面的坐标曲线构成共轭网。

95. (解) 设曲面 $r(u,\ v)$ 在任意一点 p 的一对共轭方向为

$$p(u,\ v)du_1+Q(u,\ v)dv_1=0$$

与 $\qquad (LQ-MP)du_2+(MQ-NP)dv_2=0$

设 R_1与R_2是这对共轭方向的法曲率半径，则由题意

$$R_1+R_2=\frac{1}{K_{n_1}}+\frac{1}{K_{n_2}}$$

$$=\frac{Edu_1^2+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}{Ldu_1^2+2Mdu_1dv_1+Ndv_1^2}+\frac{Edu_2^2+2Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}{Ldu_2^2+2Mdu_2dv_2+Ndv_2^2}$$

$$=\frac{EQ^2-2FPQ+GP^2}{LQ^2-2MPQ+NP^2}+\frac{E(MQ-NP)^2-2F(MQ-NP)}{L(MQ-NP)^2-2M(MQ-NP)}$$

$$\frac{(LQ-MP)+G(LQ-MP)^2}{(LQ-MP)+N(LQ-MP)^2}$$

$$=\frac{(NE-2MF+LG)(LQ^2-2MPQ+NP)}{(LN-L^2)(LQ^2-2MPQ+NP^2)}$$

$$=\frac{EN-2FM+LG}{LN-M^2}$$

$$=\frac{2H}{K}$$

96. （解）设曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$的渐近曲线的微分方程为

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

得渐近方向为

$$du=\frac{-L\pm\sqrt{M^2-LN}}{L}dv=\lambda dv$$

由题设，把此渐近方向代入正交条件方程

$$Edu\delta u+F(du\delta v+\delta udv)+Gdv\delta v=0$$

得 $$\delta u=-\frac{\lambda F+G}{\lambda E+F}\delta v$$

则 $$K_n=\frac{L\delta u^2+2M\delta u\delta v+N\delta v^2}{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}$$

$$=\frac{L(\lambda F+G)^2-2M(\lambda F+G)(\lambda E+F)+N(\lambda E+F)^2}{E(\lambda F+G)^2-2F(\lambda F+G)(\lambda E+F)+G(\lambda E+F)^2}$$

$$=\frac{(-2FM+EN+GL)(\lambda^2E+2\lambda F+G)}{(EG-F^2)(\lambda^2E+2\lambda F+G)}$$

$$=\frac{EN-2FM+GL}{(EG-F^2)}$$

$$=2H$$

97. （解）由曲面 $\boldsymbol{r}=\{t\cos\varphi,\ t\sin\varphi, e^t\}$求其第一与第二基本量并代入共轭条件方程：

$$\boldsymbol{r}_t=\{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ e^t\}$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-t\sin\varphi,\ t\cos\varphi,\ 0\},\ \boldsymbol{r}_{tt}=\{0,\ 0,\ e^t\}$$

$$\boldsymbol{r}_{t\varphi}=\{-\sin\varphi,\cos\varphi,0\},\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}=\{-t\cos\varphi,\ -t\sin\varphi,0\}$$

求得 $$E=1+e^{2t},\ F=0,\ G=t^2$$

$$L=\frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}},\ M=0,N=\frac{te^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

由已知的曲线族 $t-\varphi=c$ 得 $\frac{\delta t}{\delta\varphi}=1$

由共轭条件方程

$$Ldt\delta t+M(dt\delta\varphi+d\varphi\delta t)+Nd\varphi\delta\varphi=0$$

得 $$d\varphi=-\frac{1}{t}dt$$

积分得 $$t=ce^{-\varphi}$$

于是求得已知曲面上与曲线族 $t-\varphi=c$ 共轭的曲线族为 $t=ce^{-\varphi}$

98.（解）由已知曲线族的微分方程 $Adu+Bdv=0$ 得 $du:dv=-B:A$，代入曲线的共轭条件方程

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta v)+Ndv\delta v=0$$

得 $$(LB-MA)\delta u+(MB-NA)\delta v=0$$

为曲面上与已知曲线族共轭的曲线族的微分方程。

99.（解）首先求曲面 $\boldsymbol{r}=(t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(\ln t)\boldsymbol{e}_3$ 的第一与第二基本量：

$$\boldsymbol{r}_t=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+t^{-1}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-t\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(t\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{r}_{tt}=-t^{-2}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{t\theta}=(-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=(-t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(-t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

求得已知曲面的第一与第二基本量为

$$E=1+t^{-2},\quad F=0,\quad G=t^2$$

$$L=\frac{-1}{t\sqrt{1+t^2}},\quad M=0,\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

由渐近曲线的微分方程

$$Ldt^2+2Mdtd\theta+Nd\theta^2=0$$

得 $$d\theta=\pm t^{-1}dt$$

$$-t d\theta^2 + t^{-1} dt^2 = 0$$

对上面两式积分得

$$\left.\begin{aligned} \ln t &= \theta + u \\ -\ln t &= \theta + v \end{aligned}\right\}$$

u，v 为积分常数，就 u、v 解上面方程组得

$$\theta = -\frac{u+v}{2}, \quad t = e^{\frac{u-v}{2}}$$

令参数变换为

$$\sigma: \begin{cases} \theta = -\dfrac{u+v}{2} \\ t = e^{\frac{u-v}{2}} \end{cases} \text{且} \ \det\frac{\partial(\theta, t)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

则以 u、v为参数的曲面方程为

$$\boldsymbol{r} = e^{\frac{u-v}{2}}\left(\cos\frac{u+v}{2}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(e^{\frac{u-v}{2}}\sin\frac{u+v}{2}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

计算得 $L = N = 0$，于是坐标曲线是渐近线.

100. （证明）对于任意的简单曲面总可以引入参数变换，使曲面的渐近曲线为坐标曲线。从而不失一般性，设曲面$\boldsymbol{r}(u, v)$的坐标曲线为渐近曲线，面坐标曲线为渐近曲线的充分必要条件为 $L = N = 0$。于是曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的高斯曲率与平均曲率为

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{-FM}{EG - F^2}$$

$$-\frac{K}{H^2} = \frac{M^2}{EG - F^2} \cdot \frac{(EG - F^2)^2}{F^2 M^2} = \frac{EG - F^2}{F^2}$$

$$= \frac{EG}{F^2} - 1$$

曲面的渐近曲线（坐标曲线）的交角为

$$\cos\varphi=\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

从而

$$-\frac{K}{H^2}=\frac{EG}{F^2}-1=\frac{1}{\cos^2\varphi}-1=\operatorname{tg}^2\varphi$$

又因为

$$\frac{-K}{H^2}=\frac{-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]^2}$$

所以 $$\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\right)^2=\frac{-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]^2}$$

即 $$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{R_2}{R_1}$$

若 φ为定角，则 $R_2:R_1$必为定值.

101．（证明）设曲面 $r(u,v)$在点 p对任意的方向$du:dv$，都有唯一的一个共轭方向 $\delta u:\delta v$，则由共轭方向的定义有

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+\delta udv)+Ndv\delta v=0$$

即 $$(Ldu+Mdv)\delta u+(Mdu+Ndv)+\delta v=0$$

上面方程关于 $\delta u:\delta v$有唯一的（且 $\delta u^2+\delta v^2\neq0$）解的必要充分条件是其系数不全为0，即

$$(Ldu+Mdv)^2+(Mdu+Ndv)^2\neq0$$

或 $$(L^2+M^2)du^2+2(LM+MN)dudv+(M^2+N^2)d^2v\neq0$$

而此方程关于任意的 $du:dv$ （$d^2u+d^2v\neq0$）不等于0的必要充分条件是其判别式

$$(L^2+M^2)(M^2+N^2)-(LM+MN)^2>0$$

展开上式得 $(LN-M^2)^2>0$

即 $\qquad LN-M^2\neq 0$

于是点 p是曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$的椭圆点或双曲点。

上面充分性的证明逆过来不难证明条件的必要性。

102.（证明）设 $d\boldsymbol{r}=dx_1\boldsymbol{e}_1+dx_2\boldsymbol{e}_2+dx_3\boldsymbol{e}_3$是曲面 $f(x_1, x_2, x_3)=c$ 的任意切向量，则由已知曲面方程得

$$f_{x1}dx_1+f_{x2}dx_2+f_{x3}dx_3=0$$

从而向量 $\boldsymbol{G}=f_{x1}\boldsymbol{e}_1+f_{x2}\boldsymbol{e}_2+f_{x3}\boldsymbol{e}_3$ 是已知曲面的法向量，其单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{G}}{|\boldsymbol{G}|}$$

$$d\boldsymbol{n}=\frac{d\boldsymbol{G}}{|\boldsymbol{G}|}-\frac{(\boldsymbol{G}d\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{G}}{|\boldsymbol{G}|^3}$$

若曲面的切线方向 $d\boldsymbol{r}=dx_1\boldsymbol{e}_1+dx_2\boldsymbol{e}_2+dx_3\boldsymbol{e}_3$是已知曲面的渐近方向，则

$$\varphi_2=-d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{n}=-\frac{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{G}}{|\boldsymbol{G}|}+\frac{(\boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{G})(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{G})}{|\boldsymbol{G}|^3}=0$$

由 $\qquad f_{x1}dx_1+f_{x2}dx_2+f_{x3}dx_3=0$ 知 $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{G}=0$，于是

得 $\qquad d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{G}=0$

即 $\qquad dx_1df_{x1}+dx_2df_{x2}+dx_3df_{x3}=0$

已知曲面的渐近方向 $d\boldsymbol{r}$是上面微分方程的解。

由曲面方程

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_3-x_1\sin x_2=0$$

得 $\qquad f_{x1}=-\sin x_2,\ f_{x2}=-x_1\cos x_2,\ f_{x3}=1$

$$df_{x1}=-\cos x_2dx_2,\ df_{x2}=-\cos x_2dx_1+x_1\sin x_2dx_2,$$

$$df_{x3}=0$$

由微分方程 $df_{x1}dx_1+df_{x2}dx_2+df_{x3}dx_3=0$ 得

$$dx_2(-2\cos x_2 dx_1 + x_1 \sin x_2 dx_2) = 0$$

即 $\quad dx_2 = 0$

或 $\quad -2\cos x_2 dx_1 + (x_1 \sin x_2) dx_2 = 0$

求得两族渐近线为
$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = c \\ x_3 = t\sin c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = k\sqrt{\sec u} \\ x_2 = u \\ x_3 = k\sqrt{\sec u}\,\sin u. \end{cases}$$

103. (解)

(1) $a_k x^k x^3$; (2) $A^{2j} B_j$;

(3) $A_k{}^j B^k$; (4) $g^{2a} g_{a1}$;

(5) $B_{pr}^{p2r}\quad {}_{n=2}$; (6) $x^k x^k$;

(7) $d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^j} dx^j$; (8) $\dfrac{\partial \bar{x}^k}{dt} = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\,\dfrac{dx^m}{dt}$;

(9) $ds^2 = g_{kk} dx^k dx^k$; (10) $g_{pq} dx^p dx^q$.

104. (解)

(1) $a_{jk}x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x^k = a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \cdots + a_{jn}x^n$;

(2) $A_{pq}A^{qr} = \sum\limits_{q=1}^{n} A_{pq}A^{qr} = A_{p1}A^{1r} + A_{p2}A^{2r} + \cdots + A_{pn}A^{nr}$;

(3) $\bar{g}_{rs} = g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} = \sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{3} g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}$

$$= g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}$$

$$+ g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}$$

$$+ g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s};$$

(4) $$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k) = \frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}A^2)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}A^3);$$

(5) $$A^{ik}B_k{}^pC_i = A^{11}B_1{}^pC_1 + A^{21}B_1{}^pC_2 + A^{12}B_2{}^pC_1 + A^{22}B_2{}^pC_2;$$

(6) $$\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^m} + \cdots + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m};$$

(7) $$\left.\begin{array}{l} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + \cdots + a_{1n}x^n = b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + \cdots + a_{2n}x^n = b_2 \\ a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 + \cdots + a_{3n}x^n = b_3 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x^1 + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + \cdots + a_{nn}x^n = b_n \end{array}\right\}$$

105. (解)

(1) 因为 $\Gamma_{ijk} = \boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_k$

把高斯公式 $\boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma^\alpha{}_{ij}\boldsymbol{r}_\alpha + H_{ij}\boldsymbol{n}$ 代入上式得

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{r}_k = (\Gamma^\alpha{}_{ij}\boldsymbol{r}_\alpha + H_{ij}\boldsymbol{n})\boldsymbol{r}_k \\ &= \Gamma_{ij}{}^\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_k) \\ &= \Gamma^\alpha{}_{ij}g_{\alpha k} \\ &= g_{\alpha k}\Gamma^\alpha{}_{ij} \qquad (g_{\alpha k} = \boldsymbol{r}_\alpha\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_\alpha = g_{k\alpha}) \end{aligned}$$

(2) 由 $g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta^j{}_i$ 并由（1）的结果得

$$\begin{aligned} g^{\beta k}\Gamma_{ijk} &= \Gamma^\alpha{}_{ij}g_{\alpha k}g^{\beta k} = \Gamma^\alpha{}_{ij}\delta^\beta_\alpha \\ &= \Gamma^\beta{}_{ij} \end{aligned}$$

以指标 α代β得 $\Gamma^k{}_{ij} = g^{k\alpha}\Gamma_{ij\alpha}$.

(3) 由 $g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j$ 对参数 u^k 微分得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\boldsymbol{r}_{ik}\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_{jk}$$

$$=\boldsymbol{r}_{ik}\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{r}_{jk}\boldsymbol{r}_i$$

$$=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}$$

(4) 由 (3) 知

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}=\Gamma_{jik}+\Gamma_{kij}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}=\Gamma_{kji}+\Gamma_{ijk}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}$$

由于 $\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jik}$ 于是

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=2\Gamma_{ijk}$$

即 $$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

(5) $$\Gamma^k_{ij}=g^{k\alpha}\Gamma_{ij\alpha}=\frac{1}{2}g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right).$$

106. (解)

(1) $$g_{1\alpha}g^{\alpha1}=g_{11}g^{11}+g_{12}g^{21}=g_{11}\frac{g^{22}}{g}-g_{12}\frac{g_{12}}{g}=\frac{g}{g}=1$$

$$g_{1\alpha}g^{\alpha2}=g_{11}g^{12}+g_{12}g^{22}=-g_{11}\frac{g_{12}}{g}+g_{12}\frac{g_{11}}{g}=0$$

$$g_{2\alpha}g^{\alpha1}=g_{21}g^{11}+g_{22}g^{21}=g_{21}\frac{g_{22}}{g}-g_{22}\frac{g_{12}}{g}=0$$

$$g_{2\alpha}g^{\alpha 2} = g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = -g_{21}\frac{g_{21}}{g} + g_{22}\frac{g_{11}}{g} = 1$$

因此

$$g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases} = \delta_i{}^j$$

$$(2)\ \frac{\partial g}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}\left[\det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^i}[g_{11}g_{22} - (g_{12})^2]$$

$$= \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i}g_{22} + g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^i} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^i}$$

$$= g\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} + g^{22}\frac{\partial g^{22}}{\partial u^i} + 2g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^i}\right]$$

$$= g g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i} = g g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha i\beta} + \Gamma_{\beta i\alpha})$$

$$= g(\Gamma^\alpha_{\alpha i} + \Gamma^\beta_{\beta i})$$

$$= 2g\Gamma^\alpha_{\alpha i}.$$

(3) 因 $g = \det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ $G(i, j)$是 g_{ij} 的代数余子式，所以由行列式的拉普拉斯(Laplace)展开式得

$$g = g_{jk}G(j,k) \quad (这里\ k\ 是总和指标)$$

由于 $G(j, k)$ 是g_{jk}的代数余子式，从而$G(j,k)$不含g_{jk}项。于是

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j,r)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\cdot\frac{\partial g_{jr}}{\partial u^m} = G(j,r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial u^m}$$

$$= g g^{ir} \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^m} = g g^{ir} (\Gamma_{imr} + \Gamma_{rmi})$$

$$= g (\Gamma^i{}_{im} + \Gamma^i{}_{im})$$

$$= 2 g \Gamma^i{}_{im}$$

从而

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^m} = \Gamma^i{}_{im}, \quad \Gamma^i{}_{im} = \frac{\partial}{\partial u^m} \quad (\ln\sqrt{g})$$

107.（解）

（1）由 $\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq}$

得

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k} g_{pq}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq} \qquad (1)$$

对上式指标 j，k，m，与 p，q，r 循环轮换得

$$\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{qr}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} g_{qr} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{rp}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} g_{rp} \qquad (3)$$

经运算 $\frac{1}{2}$〔（2）+（3）〕－（1） 得

$$\bar{\Gamma}_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \Gamma_{pqr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq}$$

（2）由 $\delta^r_t g^{st}\Gamma_{pqr} = g^{st}\Gamma_{pqt} = \Gamma^s_{pq}$

$$\delta^q_t g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta^s_p$$

并用等式 $g^{nm} = \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}$ 乘（1）式

$$\overline{\Gamma}_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\Gamma_{pqr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq}$$

得 $$g^{nm}\overline{\Gamma}_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}\Gamma_{pqr}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\Gamma^s_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

即 $$\overline{\Gamma}^n_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\Gamma^s_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

（3）由（2）式知

$$\overline{\Gamma}^n_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\Gamma^s_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

以$\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}$乘上式得

$$\overline{\Gamma}^n_{jk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta_s^m\,\Gamma^s_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\delta_p^m$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^m_{pq} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

移项得 $$\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \overline{\Gamma}^n_{jk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^m_{pq}$$

108.（解）

由公式 $$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ia}(g_{aj\cdot k} + g_{ak\cdot j} - g_{jk\cdot a})$$

得 $$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}g^{11}(g_{11\cdot1}+g_{11\cdot1}-g_{11\cdot1})+\frac{1}{2}g^{12}(g_{21\cdot1}+g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})$$

$$=\frac{1}{2}g^{11}g_{11\cdot1}+\frac{1}{2}g^{12}(2g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{g_{22}}{g}\quad g_{11\cdot1}-\frac{1}{2}\frac{g_{12}}{g}\quad(2g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})$$

$$=\frac{1}{2g}[g_{22}g_{11\cdot1}-g_{12}(2g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})]$$

$$=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{2}g^{21}(g_{11\cdot1}+g_{11\cdot1}-g_{11\cdot1})+\frac{1}{2}g^{22}(g_{21\cdot1}+g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})$$

$$=\frac{1}{2}g^{21}g_{11\cdot1}+\frac{1}{2}g^{22}(2g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{g_{12}}{g}g_{11\cdot1}+\frac{1}{2}\frac{g_{11}}{g}(2g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})$$

$$=\frac{1}{2g}[-g_{12}g_{11\cdot1}+g_{11}(2g_{21\cdot1}-g_{11\cdot2})]$$

$$=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}$$

类似可得 $\Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}$，$\Gamma^1_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}$$

高斯公式为

$$r_{uu}=\Gamma^1_{11}r_u+\Gamma^2_{11}r_v+Ln$$

$$=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}r_u+\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}r_v+Ln$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{EG_v-FG_u}{2(EG-F^2)}\boldsymbol{r}_u+\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v+N\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}\boldsymbol{r}_u+\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}\boldsymbol{r}_v+N\boldsymbol{n}$$

109．（解）

由公式　$H^i{}_{.k}=g^{ij}H_{jk}$　得

$$H^1{}_{.1}=g^{1j}H_{j1}=g^{11}H_{11}+g^{12}H_{21}$$

$$=\frac{g_{22}}{g}\ H_{11}-\frac{g_{12}}{g}H_{21}$$

$$=\frac{GL-MF}{EG-F^2}$$

$$H^2{}_{.1}=g^{2j}H_{j1}=g^{21}H_{11}+g^{22}H_{21}$$

$$=-\frac{g_{12}}{g}\ H_{11}+\frac{g_{11}}{g}H_{21}$$

$$=\frac{EM-FL}{EG-F^2}$$

$$H^1{}_{.2}=\frac{GM-FN}{EG-F^2}$$

$$H^2{}_{.2}=g^{2j}H_{j2}=g^{21}H_{12}+g^{22}H_{22}$$

$$=-\frac{g_{12}}{g}\ H_{12}+\frac{g_{11}}{g}\ H_{22}=\frac{EN-FM}{EG-F^2}$$

把所求结果代入万加滕公式

$$\boldsymbol{n}_k=-H^i{}_{.k}\boldsymbol{r}_i=-g^{ij}H_{jk}\boldsymbol{r}_i$$

得

$$\boldsymbol{n}_u = -H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_1 - H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_2 = \frac{MF-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v$$

$$\boldsymbol{n}_v = -H^1{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_1 - H^2{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_2 = \frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v$$

110.（解）首先求旋转曲面的第一与第二基本量：

$$\boldsymbol{r} = (u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + g(u)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_u = (\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + (g')\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = (-u\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (u\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{-\sqrt{1+g'^2}}(g'\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + g'\sin\theta\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)$$

$\boldsymbol{r}_{uu} = g''\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{r}_{u\theta} = (-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\cos\theta)\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}_{\theta\theta} = -u\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - u\sin\theta\boldsymbol{e}_2$

求得旋转曲面的第一与第二基本量为

$$E = 1 + g'^2,\quad F = 0,\quad G = u^2$$

$$L = \frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}},\ M = 0,\ N = \frac{ug'}{\sqrt{1+g'^2}}$$

计算得克利斯多夫符号为

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{g'g''}{1+g'^2}, \Gamma^1{}_{22} = -\frac{u}{1+g'^2},\quad \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{u}$$

$$\Gamma^2{}_{11} = \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^2{}_{22} = 0,\quad H^2{}_{\cdot 1} = H^1{}_{\cdot 2} = 0,$$

$$H^1{}_{\cdot 1} = \frac{g''}{(1+g'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad H^2{}_{\cdot 2} = \frac{g'}{u\sqrt{1+g'^2}}$$

于是旋转曲面的高斯方程与万加滕方程为

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \Gamma^1{}_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2{}_{11}\boldsymbol{r}_\theta + L\boldsymbol{n}$$

$$= \frac{g'g''}{1+g'^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}}\boldsymbol{n}$$

$$= g''\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{u\theta}=\Gamma^1{}_{12}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2{}_{12}\boldsymbol{r}_\theta+M\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{1}{u}\boldsymbol{r}_\theta=(-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=\Gamma^1{}_{22}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2{}_{22}\boldsymbol{r}_\theta+N\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{-u}{1+g'^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{ug'}{\sqrt{1+g'^2}}\boldsymbol{n}$$

$$=(-u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{n}_u=-H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_u-H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_\theta$$

$$=\frac{-g''}{(1+g')^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{r}_u=-\frac{g''}{(1+g'^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2+g'\boldsymbol{e}_3)$$

$$\boldsymbol{n}_\theta=-H^1{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_u-H^2{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_\theta=\frac{-g'}{u\sqrt{1+g'^2}}\boldsymbol{r}_\theta$$

$$=\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}(\sin\theta\boldsymbol{e}_1-\cos\boldsymbol{e}_2)$$

111.（解）首先求曲面$\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f\ (u,\ v)\boldsymbol{e}_3$的第一与第二基本量：

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{e}_1+f'{}_u\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1+p\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{e}_2+f'{}_v\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2+q\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=f''{}_{uv}\boldsymbol{e}_3=s\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{r}_{uu}=f''{}_{uu}\boldsymbol{e}_3=r\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{r}_{vv}=t\boldsymbol{e}_3$$

$$E=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u=1+p^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=pq,\quad G=\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v=1+q^2$$

$$EG-F^2=1+p^2+q^2=g,\quad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

$$=\frac{-(p\boldsymbol{e}_1+q\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)}{\sqrt{g}}$$

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}=\frac{r}{\sqrt{g}},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n}=\frac{s}{\sqrt{g}},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}=\frac{t}{\sqrt{g}}$$

于是 $E_u=2pr,E_v=2ps,\quad F_u=ps+qr,\quad F_v=pt+qs$

$$G_u=2qs,G_v=2qt$$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}=\frac{pr}{g},$$

$$\Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}=\frac{ps}{g}.$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}=\frac{pt}{g}.$$ 类似计算可得

$$\Gamma^2_{11}=\frac{qr}{g},\quad \Gamma^2_{12}=\frac{qs}{g},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{qt}{g}$$

$$H^1{}_{\cdot 1}=\frac{-(spq-rq^2-r)}{\sqrt{g^3}},\quad H^1{}_{\cdot 2}=\frac{-(tpq-sq^2-s)}{\sqrt{g^3}}$$

$$H^2{}_{\cdot 1}=\frac{(rpq-sp^2-s)}{\sqrt{g^3}},\quad H^2{}_{\cdot 2}=\frac{-(spq-tp^2-t)}{\sqrt{g^3}}$$

把以上计算结果代入高斯与万加滕方程得

$$g\boldsymbol{r}_{uu}=pr\boldsymbol{r}_u+qr\boldsymbol{r}_v+rg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{n}$$

$$g\boldsymbol{r}_{uv}=ps\boldsymbol{r}_u+qs\boldsymbol{r}_v+sg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{n}$$

$$g\boldsymbol{r}_{vv}=pt\boldsymbol{r}_u+qt\boldsymbol{r}_v+tg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{n}$$

$$g^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{n}_u=(spq-rq^2-r)\boldsymbol{r}_u+(rpq-sp^2-s)\boldsymbol{r}_v$$

$$g^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{n}_v=(tpq-sq^2-s)\boldsymbol{r}_u+(spq-tp^2-t)\boldsymbol{r}_v.$$

112.（证明）由万加滕公式

$$\boldsymbol{n}_k=-H^i{}_{\cdot k}\boldsymbol{r}_i$$

得
$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=(-H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_u-H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_v)(-H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_u-H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_v)$$

$$=\frac{(MF-LG)^2E}{(EG-F^2)^2}+\frac{2(MF-LG)(LF-ME)E}{(EG-F^2)^2}$$

$$+\frac{(LF-ME)^2G}{(EG-F^2)^2}$$

$$= \frac{(-2LMF + L^2G + EM^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2}$$

$$= \frac{(EN - 2MF + LG)L - (LN - M^2)E}{EG - F^2}$$

$$= 2HL - KE$$

类似可得

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v = (-H^1{}_{,1}\boldsymbol{r}_u - H^2{}_{,1}\boldsymbol{r}_v)(-H^1{}_{,2}\boldsymbol{r}_u - H^2{}_{,2}\boldsymbol{r}_v)$$

$$= \frac{(EN - 2MF + LG)M - (LN - M^2)F}{EG - F^2}$$

$$= 2HM - KF$$

$$\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_v = (-H^1{}_{,2}\boldsymbol{r}_u - H^2{}_{,2}\boldsymbol{r}_v)(-H^1{}_{,2}\boldsymbol{r}_u - H^2{}_{,2}\boldsymbol{r}_v)$$

$$= \frac{(EN - 2MF + LG)N - (LN - M^2)G}{EG - F^2}$$

$$= 2HN - KG$$

于是

$$\begin{aligned}
\varphi_3 = d\boldsymbol{n}d\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv)(\boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv) \\
&= \boldsymbol{n}^2{}_u du^2 + 2\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v du dv + \boldsymbol{n}^2{}_v dv^2 \\
&= (2HL - KE)du^2 + 2(2HM - KF)du dv \\
&+ (2HN - KG)dv^2 \\
&= 2H(Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2) - K(Edu^2 \\
&+ 2Fdu dv + Gdv^2) \\
&= 2H\varphi_2 - K\varphi_1
\end{aligned}$$

即 $$\varphi_3 - 2H\varphi_2 + K\varphi_1 = 0$$

113. （证明）

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{uu}\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

$$M = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{uu}\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

$$N = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{vv}\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) = (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2$$

$$LN - M^2 = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2}{EG - F^2}$$

于是证得

$$K(EG - F^2) = (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2$$

114.（证明）由上题可知

$$K(EG - F^2) = (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}^u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2$$

$$= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv} \\ \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uv} \\ \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} & F_v - \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_{uv} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_{uv})(EG - F^2) +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} 0 & F_v - \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}$$

$$= \left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right)(EG - F^2) +$$

$$+\det\begin{pmatrix} 0 & F_v - \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}$$

115. （证明）

（1） $R_{mijk} = g_{\alpha m}R^{\alpha}{}_{ijk}$

由已知 $R^{\alpha}{}_{ijk} = g^{\alpha\beta}R_{\beta ijk}$

得 $g_{\alpha m}R^{\alpha}{}_{ijk} = g_{\alpha m}R^{\alpha\beta}g_{\beta ijk} = \delta^{\beta}{}_{m}R_{\beta ijk}$

$= R_{mijk}$

即 $R_{mijk} = g_{\alpha m}R^{\alpha}{}_{ijk}$.

（2） $R^{p}{}_{ijk} = H_{ik}H^{p}{}_{\cdot j} - H_{ij}H^{p}{}_{\cdot k}$

由已知 $R_{mijk} = H_{ik}H_{jm} - H_{ij}H_{km}$

$RR^{p}{}_{ijk} = g^{\alpha p}R_{\alpha ijk}$

得 $R^{p}{}_{ijk} = g^{\alpha p}R_{\alpha ijk} = g^{\alpha p}(H_{ik}H_{j\alpha} - H_{ij}H_{k\alpha})$

$= H_{ik}H^{p}{}_{\cdot j} - H_{ij}H^{p}{}_{\cdot k}$.

（3） $R_{imjk} = -R_{mijk}$ $R_{mikj} = -R_{mijk}$

$R_{imjk} = H_{mk}H_{ij} - H_{mj}H_{ki}$

$= -(H_{mj}H_{ki} - H_{mk}H_{ij})$

$= -(H_{ki}H_{mj} - H_{ij}H_{mk})$

$= -(H_{ik}H_{jm} - H_{ij}H_{km})$

$= -R_{mijk}$

类似可得

$R_{mikj} = H_{ij}H_{km} - H_{ik}H_{jm}$

$= -(H_{ik}H_{jm} - H_{ij}H_{km})$

$$= -R_{mijk}$$

（4） $R_{mmjk} = R_{ijkk} = 0$

$$R_{mmjk} = H_{mk}H_{jm} - H_{mj}H_{km}$$

$$= H_{mk}H_{jm} - H_{km}H_{mj}$$

$$= H_{mk}H_{jm} - H_{mk}H_{jm}$$

$$= 0$$

类似可得

$$R_{ijkk} = H_{ik}H_{kj} - H_{jk}H_{ki} = 0$$

从本题结果可以看出，黎曼曲率第一符号 R_{mijk} 的前两个指标，或后两个指标相同，则

$$R_{mmjk} = R_{ijkk} = 0$$

于是不为 0 的黎曼曲率第一符号为

R_{1212} R_{2121} R_{2112} R_{1221}（指标只取值 1， 2） 并且容易计算

$$R_{1212} = R_{2121} = H_{22}H_{11} - H_{12}H_{21} = LN - M^2$$

$$R_{2112} = R_{1221} = H_{21}H_{21} - H_{22}H_{11} = -(LN - M^2)$$

（5） Gauss曲率 $K = \dfrac{1}{g}R_{1212} = \dfrac{1}{g}R_{2121}\,(g = EG - F^2)$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{H_{22}H_{11} - H_{21}H_{21}}{EG - F^2} = \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{12}}{EG - F^2}$$

$$= \frac{R_{1212}}{g} = \frac{R_{2121}}{g}.$$

116．（证明） 由

$R^{p}{}_{ijk} = g^{ap}R_{aijk}$ （参考115题）

得 $R^{1}{}_{112} = g^{21}R_{2112}$

$$= g^{11}R_{1112} + g^{21}R_{2112}$$

$$= g^{21}R_{2112}$$

$$= g^{21}(H_{12}H_{12} - H_{11}H_{22})$$

$$= -\frac{g_{12}}{g}(H_{12}\ H_{12} - H_{11}H_{22})$$

$$= -F\frac{M^2 - LN}{EG - F^2} = F\,\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = FK$$

类似可得

$$R^1{}_{121} = -FK,\ \ R^2{}_{221} = FK, R^2{}_{212} = -FK$$

$$R^1{}_{212} = GK,\ \ R^1{}_{221} = -GK,\ \ R^2{}_{121} = EK$$

$$R^2{}_{112} = -EK$$

于是证得

$$R^1{}_{112} = R^2{}_{221} = -R^1{}_{121} = -R^2{}_{212} = FK$$

$$R^1{}_{212} = -R^1{}_{221} = GK,\ \ R^2{}_{121} = -R^2{}_{121} = EK.$$

117. （证明）因为曲面 $\boldsymbol{r}(u^i)$ 对其参数三阶连续可微，所以 $\boldsymbol{r}_{ijk} = \boldsymbol{r}_{ikj}$，即$\boldsymbol{r}_{ijk} - \boldsymbol{r}_{ikj} = 0$。于是由高斯公式与万加滕公式

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}^{\alpha}{}_{ij}\boldsymbol{r}_{\alpha} + H_{ij}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}_k = -H^i{}_{\cdot k}\boldsymbol{r}_i$$

得

$$\boldsymbol{r}_{ijk} = (\boldsymbol{r}_{ij})_k = [\Gamma^{\alpha}{}_{ij}\boldsymbol{r}_{\alpha} + H_{ij}\boldsymbol{n}]_k$$

$$= (\Gamma^{\alpha}{}_{ij})_k\boldsymbol{r}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{ij}\boldsymbol{r}_{\alpha k} + (H_{ij})_k\boldsymbol{n} + H_{ij}\boldsymbol{n}_k$$

$$= (\Gamma^{\alpha}{}_{ij})_k\boldsymbol{r}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{ij}(\Gamma^{\beta}_{\alpha k}\boldsymbol{r}_{\beta} + H_{\alpha k}\boldsymbol{n}) + (H_{ij})_k\boldsymbol{n}$$

$$+ H_{ij}(-H^{\alpha}{}_{\cdot k}\boldsymbol{r}_{\alpha})$$

$$= [(\Gamma^{\alpha}{}_{ij})_k + \Gamma^{\beta}{}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k} - H_{ij}H^{\alpha}{}_{\cdot k}]\boldsymbol{r}_{\alpha} + [\Gamma^{\alpha}{}_{ij}H_{\alpha k}$$

$$+ (H_{ik})_j]\boldsymbol{n}$$

类似得

$$\boldsymbol{r}_{ikj} = [(\Gamma^{\alpha}{}_{ik})_j + \Gamma^{\beta}{}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j} - H_{ik}H^{\alpha}{}_{\cdot j}]\boldsymbol{r}_{\alpha} + [\Gamma^{\alpha}{}_{ik}H_{\alpha j}$$

$$+ (H_{ij})_k]\boldsymbol{n}$$

于是

$$\boldsymbol{r}_{ijk}-\boldsymbol{r}_{ikj}=[(\Gamma^{\alpha}_{ij})_k-(\Gamma^{\alpha}_{ik})_j+\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}-\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$$
$$-H_{ij}H^{\alpha}{}_{\cdot k}+H_{ik}H^{\alpha}{}_{\cdot j}]\boldsymbol{r}_{\alpha}+[\Gamma^{\alpha}_{ij}H_{\alpha k}$$
$$+(H_{ij})_k-\Gamma^{\alpha}_{ik}H_{\alpha j}-(H_{ik})_j]\boldsymbol{n}=0$$

由于 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{n}$ 是线性无关向量，所以上式成立当且仅当

$$(\Gamma^{\alpha}_{ij})_k-(\Gamma^{\alpha}_{ik})_j+\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}-\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}-H_{ij}H^{\alpha}{}_{\cdot k}$$
$$+H_{ik}H^{\alpha}{}_{\cdot j}=0 \qquad \text{(a)}$$
$$\Gamma^{\alpha}_{ij}H_{\alpha k}+(H_{ij})_k-\Gamma^{\alpha}_{ik}H_{\alpha j}-(H_{ik})_j=0 \qquad \text{(b)}$$

由于等式 (b)交换自由指标 j和 k 时只改变符号，所以等式(b)的所有指标取遍1，2时只等价于下面两个等式

$$\Gamma^{\alpha}_{11}H_{\alpha 2}+(H_{11})_2-\Gamma^{\alpha}_{12}H_{\alpha 1}-(H_{12})_1=0$$
$$\Gamma^{\alpha}_{21}H_{\alpha 2}+(H_{21})_2-\Gamma^{\alpha}_{22}H_{\alpha 1}-(H_{22})_1=0$$

即

$$(H_{11})_2-(H_{12})_1=\Gamma^{\alpha}_{12}H_{\alpha 1}-\Gamma^{\alpha}_{11}H_{\alpha 2}$$
$$(H_{21})_2-(H_{22})_1=\Gamma^{\alpha}_{22}H_{\alpha 1}-\Gamma^{\alpha}_{21}H_{\alpha 2}$$

展开得 Codazzi 方程为

$$L_v-M_u=L\Gamma^1_{12}+M(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})-N\Gamma^2_{11}$$
$$M_v-N_u=L\Gamma^1_{22}+M(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-N\Gamma^2_{12}$$

由等式 $R^{p}{}_{ijk}=H_{ik}H^{p}{}_{\cdot j}-H_{ij}H^{p}{}_{\cdot k}$得 (a)式为

$$R^{\alpha}{}_{ijk}=(\Gamma^{\alpha}_{ik})_j-(\Gamma^{\alpha}_{ij})_k+\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}-\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}$$

由黎曼曲率第一与第二符号的关系式（参考115题）

$$R_{pijk}=g_{\alpha p}R^{\alpha}{}_{ijk}$$

得
$$R_{pijk}=g_{\alpha p}R^{\alpha}{}_{ijk}$$
$$=g_{\alpha p}(\Gamma^{\alpha}_{ik})_j-g_{\alpha p}(\Gamma^{\alpha}_{ij})_k+g_{\alpha p}\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$$
$$-g_{\alpha p}\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}$$

由 R_{pijk}指标的对称性与反对称性即：

$$R_{pijk}=R_{jpki},\quad R_{pijk}=-R_{ipjk}$$

知上式当所有自由指标取遍1，2时，只等价于下面一个方程

$$R_{1212}=g_{\alpha 1}(\Gamma^{\alpha}{}_{22})_1-g_{\alpha 1}(\Gamma^{\alpha}{}_{21})_2+g_{\alpha 1}\Gamma^{\beta}{}_{22}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1}-g_{\alpha 1}\Gamma^{\beta}{}_{21}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 2}$$

展开得

$$\begin{aligned}R_{1212}=&g_{11}[(\Gamma^1{}_{22})_1-(\Gamma^1{}_{21})_2+\Gamma^1{}_{22}\Gamma^1{}_{11}+\Gamma^2{}_{22}\Gamma^1{}_{21}\\&-\Gamma^1{}_{21}\Gamma^1{}_{12}-\Gamma^2{}_{21}\Gamma^1{}_{22}]+g_{21}[(\Gamma^2{}_{22})_1-(\Gamma^2{}_{21})_2\\&+\Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{11}-\Gamma^1{}_{21}\Gamma^2{}_{12}]\end{aligned}$$

即得 Gauss 方程为

$$\begin{aligned}LN-M^2=&E[(\Gamma^1{}_{22})_u-(\Gamma^1{}_{12})_v+\Gamma^1{}_{22}\Gamma^1{}_{11}+\Gamma^2{}_{22}\Gamma^1{}_{12}\\&-\Gamma^1{}_{12}\Gamma^1{}_{12}-\Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22}]+F[(\Gamma^2{}_{22})_u-(\Gamma^2{}_{12})_v\\&+\Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{11}-\Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{12}].\end{aligned}$$

118. (解) 首先计算高斯与万加滕公式系数：

$$\Gamma^1{}_{11}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}=0,\quad \Gamma^1{}_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}=0$$

$$\Gamma^1{}_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}=0,$$

$$\Gamma^2{}_{11}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}=0$$

$$\Gamma^2{}_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}=0,\quad \Gamma^2{}_{22}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}=0$$

$$H^1{}_{\cdot 1}=g^{11}H_{11}+g^{12}H_{21}=\frac{GL-FM}{EG-F^2}=-1$$

$$H^2{}_{\cdot 2}=g^{21}H_{12}+g^{22}H_{22}=\frac{EG-FM}{EG-F^2}=1$$

$$H^2{}_{\cdot 1}=g^{21}H_{11}+g^{22}H_{21}=\frac{EM-FL}{EG-F^2}=0$$

$$H^1{}_{\cdot 2}=g^{11}H_{12}+g^{12}H_{22}=\frac{GM-FN}{EG-F^2}=0$$

容易验证曲面 $\boldsymbol{r}$ (u, v) 的第一与第二基本量满足高斯与柯达

奇方程，于是所求曲面存在，并且其高斯与万加滕公式为

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v+L\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{n}=0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u+\Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v+N\boldsymbol{n}=0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}_u=-H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_u-H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_u \tag{4}$$

$$\boldsymbol{n}_v=-H^1{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_u-H^2{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_v=-\boldsymbol{r}_v \tag{5}$$

由方程（1）与（4）得

$$\boldsymbol{r}_{uuu}+\boldsymbol{r}_u=0$$

积分得 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_1(v)\sin u+\boldsymbol{e}_2(v)\cos u+\boldsymbol{e}_3(v)$

于是 $\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{e}_1(v)\cos u-\boldsymbol{e}_2(v)\sin u$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{e}'_1(v)\cos u-\boldsymbol{e}'_2(v)\sin u$$

根据上式与方程（2）知

$$\boldsymbol{e}'_1(v)\cos u-\boldsymbol{e}'_2(v)\sin u=0$$

即 $\boldsymbol{e}'_1(v)=\boldsymbol{e}'_2(v)\operatorname{tg}u$

由于 $\boldsymbol{e}_1(v)$ 与 $\boldsymbol{e}_2(v)$ 只是独立参数 v 的向量函数，所以上式成立当且仅当 $\boldsymbol{e}'_1(v)$ 与 $\boldsymbol{e}'_2(v)$ 是 0，从而

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_1\sin u+\boldsymbol{e}_2\cos u+\boldsymbol{e}_3(v)$$

由此得 $\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{e}'_3(v)$，$\boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{e}''_3(v)$

由 $\boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{e}''_3(v)$ 与方程（4）知

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{e}''_3(v)=0$$

于是 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}v$ （其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为常向量）

求得以 $E=G=1$，$F=0$，$L=-1, M=N=0$ 为第一与第二基本量的曲面方程为

$$\boldsymbol{r}(uv)=\boldsymbol{e}_1\sin u+\boldsymbol{e}_2\cos u+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}v).$$

119.（解）根据曲面论基本定理，首先验证所给曲面的第一与第二基本量是否满足高斯与柯达奇方方程，为此首先计算克利斯多夫符号为

$$\Gamma^1_{11} = {}^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0, \Gamma_{12}{}^2 = \mathrm{ctg}u, \Gamma^1_{22} = -\sin u\cos u,$$

$$H^1{}_{\cdot 1} = 1,\quad H^2{}_{\cdot 1} = H^{\cdot}{}_{\cdot 2} = 0,\quad H^2{}_{\cdot 2} = 1$$

容易验证已知曲面的第一与第二基本量满足高斯与柯达奇方程

$$LN - M_2 = E[(\Gamma^1_{22})_u - (\Gamma^1_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}] + F[(\Gamma^2_{22})_u - (\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}]$$

$$L_v - M_u = L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11}$$

$$M_v - N_u = L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{12}$$

于是所求曲面存在．并且高斯与万加滕公式为

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n} = (\mathrm{ctg}u)\boldsymbol{r}_v \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{n} = -\sin u\cos u\boldsymbol{r}_u + \sin^2 u\boldsymbol{n} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}_u = -H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_u - H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{r}_u \tag{4}$$

$$\boldsymbol{n}_v = -H^1{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_u - H^2{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_v \tag{5}$$

由方程（1）与（4）得

$$\boldsymbol{r}_{uuu} = -\boldsymbol{r}_u$$

积分得　$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(v)\sin u + \boldsymbol{b})v(\cos u + \boldsymbol{c}(v)$（其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是关于独立参数 v 的向量函数）由此求得

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{a}(v)\cos u - \boldsymbol{b}(v)\sin u$$

$$\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a}'(v)\sin u + \boldsymbol{b}'(v)\cos u + \boldsymbol{c}'(v)$$

$$\boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{a}'(v)\cos u - \boldsymbol{b}'(v)\sin u$$

由所求结果与方程（2）得

$$\boldsymbol{r}^{uv} = (\mathrm{ctg}u)\boldsymbol{r}_v$$

即　　$\boldsymbol{b}'(v) = -\boldsymbol{c}'(v)\cos u$

由于 $\boldsymbol{b}(v)$、$\boldsymbol{c}(v)$ 只是参数 v 的函数，所以上式成立只有$\boldsymbol{b}'(v) = \boldsymbol{c}'(v) = 0$

于是 $\boldsymbol{b}(v)$ 与 $\boldsymbol{c}(v)$ 是常向量，所以

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(v)\sin u+\boldsymbol{b}\cos u+\boldsymbol{c}$$

这时 $\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}(v)\sin u+\boldsymbol{b}\cos u$

$$\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{a}'(v)\sin u$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=-\boldsymbol{a}(v)\sin u-\boldsymbol{b}\cos u$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{a}''(v)\sin u$$

由方程（1）与（3）得

$$\boldsymbol{a}''(v)=-\boldsymbol{a}(v)$$

积分得 $\boldsymbol{a}(v)=\boldsymbol{d}\cos v+\boldsymbol{e}\sin v$ （$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$是常向量）于是所求曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u\ v)=\boldsymbol{d}\cos v\sin u+\boldsymbol{e}\sin v\sin u+\boldsymbol{b}\cos u+\boldsymbol{c}.$$

120.（解）

由万加滕公式： $\boldsymbol{n}_k=-H^i{}_{\cdot k}\boldsymbol{r}_i$ 得

$$\boldsymbol{n}_1=-H^i{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_i=-H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_1-H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{n}_2=-H^i{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_i=-H^1{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_1-H^2{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_2$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2&=(-H^1{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_1-H^2{}_{\cdot 1}\boldsymbol{r}_2)\times(-H^1{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_1-H^2{}_{\cdot 2}\boldsymbol{r}_2)\\&=H^2{}_{\cdot 1}H^1{}_{\cdot 2}(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1)+H^1{}_{\cdot 1}H^2{}_{\cdot 2}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\\&=(H^1{}_{\cdot 1}H^2{}_{\cdot 2}-H^2{}_{\cdot 1}H^1{}_{\cdot 2})(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\end{aligned}$$

由等式 $H^i{}_{\cdot k}=g^{ij}H_{jk}$

得 $H^1{}_{\cdot 1}=g^{1j}H_{j1}=g^{11}H_{11}+g^{12}H_{21}$

$$H^2{}_{\cdot 2}=g^{2j}H_{j2}=g^{21}H_{12}+g^{22}H_{22}$$

$$H^2{}_{\cdot 1}=g^{1j}H_{j1}=g^{21}H_{11}+g^{22}H_{21}$$

$$H^1{}_{\cdot 2}=g^{1j}H_{j2}=g^{11}H_{12}+g^{12}H_{22}$$

于是

$$\begin{aligned}H^1{}_{\cdot 1}H^2{}_{\cdot 2}&=(g^{11}H_{11}+g^{12}H^{21})(g^{21}H_{12}+g^{22}H_{22})\\&=g^{11}g^{21}H_{11}H_{12}+g^{12}g^{21}H_{21}H_{12}+g^{11}g^{22}H_{11}H_{22}+g^{12}g^{22}H_{21}H_{22}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{g^2}[g_{12}g_{21}H_{12}H_{21} - g_{12}g_{22}H_{11}H_{12} + g_{11}g_{22}H_{11}H_{22}$$

$$- g_{11}g_{12}H_{21}H_{22}]$$

$$= \frac{1}{g^2}(F^2M^2 - FGLM + EGLN - EFMN)$$

类似可得

$$H^2{}_{\cdot 1}H^1{}_{\cdot 2} = \frac{1}{g^2}(EGM^2 - FGLM + F^2LN - EFMN)$$

于是

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (H^1{}_{\cdot 1}H^2{}_{\cdot 2} - H^2{}_{\cdot 1}H^1{}_{\cdot 2})(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \frac{1}{g^2}(F^2M^2 - F^2LN + EGLN - EGM^2)(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \frac{1}{g^2}[M^2(F^2 - EG) + LN(EG - F^2)](\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \frac{EG - F^2}{g^2}(LN - M^2)(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = K(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \sqrt{EG - F^2}\,K\frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{EG - F^2}} = \sqrt{EG - F^2}\,K\boldsymbol{n}$$

121. (解) 首先由圆锥面的方程

$$\boldsymbol{r} = (u\sin\alpha\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_1 + (u\sin\alpha\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_2 + (u\cos\alpha)\boldsymbol{e}_3$$

求得 $E = 1$，$F = 0$，$G = u^2\sin^2\alpha$

$$\Gamma^1{}_{11} = \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^2{}_{11} = \Gamma^2{}_{22} = 0, \Gamma^1{}_{22} = -u\sin^2\alpha, \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{u}$$

由测地线的微分方程

$$\frac{du^2}{ds^2}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\ \frac{d\theta}{ds}+\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)=0$$

$$\frac{d\theta^2}{ds^2}+\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\ \frac{d\theta}{ds}+\Gamma^2_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)=0$$

得 $$\frac{d\theta^2}{ds^2}=-\frac{2}{u}\ \frac{du}{ds}\ \frac{d\theta}{ds}$$

设 $\varphi=\frac{d\theta}{ds}$，则上式为$\frac{d\varphi}{\varphi}=-2\ \frac{du}{u}$

积分得 $\ln|\varphi|=-2\ln u+c_1$

或 $$\varphi=\frac{d\theta}{ds}=\frac{c}{u^2\sin^2\alpha}\quad 这里\quad c=e^{C_1}\sin^2\alpha$$

若求得锥面的测地线以曲线弧长为参数，则

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2=\left|\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_\theta\frac{d\theta}{ds}\right|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 2F+\frac{du}{ds}\ \frac{d\theta}{ds}$$
$$+G\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1$$

即 $$\left(\frac{du}{ds}\right)^2+u^2\sin^2\alpha\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1$$

将 $$\frac{d\theta}{ds}=\frac{c}{u^2\sin^2\alpha}$$ 代入上式得

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{u\sin\alpha}\sqrt{u^2\sin^2\alpha-c^2}$$

于是 $$\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\theta}=\frac{1}{c}u\sin\alpha\sqrt{u^2\sin^2\alpha-c^2}$$

积分得

$$u=a\sec[\theta\sin\alpha+b]\quad (a,\ b\ 为常数)$$

此参数平面（u-θ 平面）上的曲线在已知圆锥 $\boldsymbol{r}(u,\ \theta)$上的象为所求测地线。

122.（证明）由已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的第一基本量 $E=E(u)$，$F=0$，$G=G(u)$ 求得

$$\Gamma^2_{11}=0,\quad \Gamma^2_{12}=\frac{G_u}{2G},\quad \Gamma^2_{22}=0$$

由测地线的微分方程

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\ \frac{dv}{ds}+\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\ \frac{dv}{ds}+\Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

的第二个方程得

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{G_u}{G}\ \frac{du}{ds}\ \frac{dv}{ds}=0$$

即 $$\frac{d}{ds}\left(G\frac{dv}{ds}\right)=G\frac{dv^2}{ds^2}+G_u\frac{du}{ds}\ \frac{ds}{ds}=0$$

从而 $$G\frac{dv}{ds}=c \qquad (c\text{为常数}) \tag{1}$$

又由于 $F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0$

所以 $$G\frac{dv}{ds}=(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v)\frac{dv}{ds}=\left(\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}\right)\boldsymbol{r}_v$$

$$=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{r}_v=|\boldsymbol{\tau}||\boldsymbol{r}_v|\cos\theta=|\boldsymbol{r}_v|\cos\theta$$

$$=\sqrt{G}\cos\theta \tag{2}$$

由（1）与（2）两式可得

$$\sqrt{G}\cos\theta=c \qquad (c\text{为常数})$$

123.（证明）

（1）而为对 u 曲线 $\frac{dv}{ds}=0$，于是由测地曲率公式

$$k_g = \left[\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}\right.$$

$$+ (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3$$

$$\left. + \frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{du^2}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right]\sqrt{EG - F^2}$$

得

$$K_g = \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3\sqrt{EG - F^2}$$

由 $\tau = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds} + \boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds} = \boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}$ 得 $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}$

因为 $F = 0$，所以 $\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = -\frac{E_v}{2G}$

又因为 $E = E(u)$，即 E 与参数 v 无关，所以

$E_v = 0$

于是对于曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的 u 曲线，测地曲率 $K_g = 0$，所以 u 曲线是测地线。

（2）若 v 曲线是测地线，由 $\frac{du}{ds} = 0$ 得 $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}$ 。

于是测地曲率

$$k_g = -\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3\sqrt{EG - F^2} = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}$$

计算得 $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{E}$，又因 $F = 0$，所以

$$K_g = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

v 曲线是测地线，当且仅当对于 v 曲线 $K_g = 0$

即 $\qquad G_u=0$.

（3）由122题可知：曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本量为 $E=E(u)$，$F=0$，$G=G(u)$。则$G\dfrac{dv}{ds}=c$（c为常数）。

由 $G\dfrac{dv}{ds}=c$ 得 $\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{c}{G}$

因为测地线以曲线弧长为参数，且已知 $F=0$，所以

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2=\left|\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}\right|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=1$$

即 $$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\frac{C^2}{G}=1$$

于是 $$\frac{du}{ds}=\pm\frac{\sqrt{G-C^2}}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$$

而 $$\frac{dv}{du}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{du}=\pm\frac{C}{G}\cdot\frac{\sqrt{E}\sqrt{G}}{\sqrt{G-C^2}}$$

$$=\pm\frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}$$

所以 $$v=\pm\int\frac{C\sqrt{E}\,du}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}$$

124.（证明）由已知，曲面的第一基本量 $E=G=f(u)+g(v)$，$F=0$ 得

$$\Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\frac{f'}{2(f+g)}$$

$$\Gamma^1_{12}=-\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=\frac{g'}{2(f+g)}$$

由测地曲率公式

$$k_g=\sqrt{EG-F^2}\left[\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3+(2\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right.$$

$$\frac{dv}{ds}+(\Gamma^2_{22}-2\Gamma^1_{12})\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2-\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3$$

$$+\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\Bigg]$$

得 $\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]\left(f'\frac{dv}{ds}-g'\frac{du}{ds}\right)+2(f+g)$

$$\left(\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right)=0$$

即 $$\frac{d}{ds}\left(\frac{f\left(\frac{dv}{ds}\right)^2-g\left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\right)=0$$

因此 $$\frac{f\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+g\left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}=c \qquad (c\text{为常数}) \qquad (1)$$

由 $F=0$ 得

$$\cos\theta=\frac{\tau\cdot r_u}{|\tau||r_u|}=\frac{\left(r_u\frac{du}{ds}+r_v\frac{dv}{ds}\right)r_u}{|r_u|}=|r_u|\frac{du}{ds}$$

$$\sin\theta=\frac{\tau r_v}{|\tau||r_v|}=\frac{\left(r_u\frac{du}{ds}+r_v\frac{dv}{ds}\right)r_v}{|r_v|}=|r_v|\frac{dv}{ds}$$

因测地线以曲线弧长为参数，且 $F=0$，所以

$$\left|\frac{dr}{ds}\right|^2=\left|r_u\frac{du}{ds}+r_v\frac{dv}{ds}\right|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$=(f+g)\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]=1$$

由上式及 $E=G=f+g$ 得

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=\frac{1}{|\boldsymbol{r}_u|^2}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}_v|^2}$$

于是
$$\cos^2\theta=|\boldsymbol{r}_u|^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2=\frac{\left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\qquad(2)$$

$$\sin^2\theta=|\boldsymbol{r}_v|^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=\frac{\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\qquad(3)$$

把（2）式与（3）式代入（1）式得

$$f(u)\sin^2\theta+g(v)\cos^2\theta=c$$

125.（证明）对于曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的 u 曲线

$$\frac{dv}{ds}=0,\ \frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}$$

v 曲线 $\quad \dfrac{du}{ds}=0,\ \dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}.$

由测地曲率公式求得

$$K_{gu}=\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=-\Gamma^2_{11}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}$$

$$K_{gv}=-\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}$$

若 u，v 曲线正交则 $F=0$，于是

$$K_{gu}=\Gamma^2_{11}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}=\frac{2EF_u-EE_v+FE_u}{2(EG-F^2)}\ \frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}$$

$$=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}$$

$$K_{gv} = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}} = \frac{-(2GF_v - GG_u - FG_v)}{2(EG-F^2)}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}$$

$$= \frac{G^u}{2G\sqrt{E}}$$

126. (解)

$$\boldsymbol{r} = (t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + t^2\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_t = (\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + 2t\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = -t\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + t\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - 2t\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$$

求得抛物面的第一基本量为

$$E = 1+4t^2,\quad F=0,\quad G=t^2$$

设已知抛物面的任一条 θ 曲线为 $t=t_0 \quad (t_0>0)$ ， $\boldsymbol{r}(\theta) = t_0\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + t_0\sin\boldsymbol{e}_2 + t_0^2\boldsymbol{e}_3$, 则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta} = -t_0\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + t_0\cos\theta\boldsymbol{e}_2,\quad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right| = t_0$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right|} = -\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta} = -\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right|} = t_0^{-1}(-\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4t_0^2}}[(-2t_0\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 - (2t_0\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3]$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+4t_0^2}}[(-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 - (\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 - (2t_0)\boldsymbol{e}_3]$$

$$K_{g\theta} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{t_0\sqrt{1+4t_0^2}}$$

由公式 $K_{g\theta} = \frac{G_t}{2G\sqrt{E}}$ 直接验证得

$$K_{g\theta} = \frac{G_t}{2G\sqrt{E}}\bigg|_{t=t_0} = \frac{2t_0}{2t_0^2\sqrt{1+4t_0^2}} = \frac{1}{t_0\sqrt{1+4t_0^2}}$$

127. (解) 已知半径为R的球面的法曲率 $\kappa_n = \frac{1}{R}$ 球面上半径为 a 的圆周曲线的曲率 $\kappa = \frac{1}{a}$

由公式 $\kappa^2_g = \kappa^2 - \kappa^2_n$

得 $$\kappa_g = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2}}$$

$$= \frac{1}{aR}\sqrt{R^2 - a^2}$$

所以半径为 R 的球面上，半径为 a 的圆周曲线的测地曲率 $\kappa_g = \frac{1}{aR}\sqrt{R^2 - a^2}$。

128. (解) 因曲线 $y=f(x)$ 是 oxy 平面的光滑曲线，由反函数定理设 $x=g(y)$，于是曲线 $y=f(x)$ 绕 ox 轴旋转的曲面方程为

$$\boldsymbol{r} = \{g(y),\ y\cos\varphi,\ y\sin\varphi\}$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \{0,\ -y\sin\varphi,\ y\cos\varphi\}$$

$$\boldsymbol{r}_y = \left\{\frac{1}{y'},\ \cos\varphi,\ \sin\varphi\right\}$$

$$r_{\varphi\varphi}=\{0,\ -y\cos\varphi,\ -y\sin\varphi\}$$

$$r_{\varphi y}=\{0,\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi\}$$

$$r_{yy}=\left\{-\frac{y''}{(y')^2},\quad 0,\ 0\right\}$$

旋转曲面的第一基本量为

$$E=y^2,\ F=0,\ G=1+\frac{1}{(y')^2}$$

求得
$$\kappa_n^2=\frac{1}{y^2(1+y'^2)},\ \kappa=\frac{1}{y}$$

$$\kappa_g=\sqrt{\kappa^2-\kappa_n^2}=\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2(1+y'^2)}}$$

$$=\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

129.（解）设球面方程为

$$r=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\ \varphi\}$$

求得第一基本量为

$$E=a^2,\ F=0,\ G=a^2\cos^2\theta$$

$$\sqrt{EG}=a^2\cos\varphi,\ E_\varphi=0,G_\theta=-2R\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{E_\varphi}{2\sqrt{EG}}=0,\quad \frac{G_\theta}{2\sqrt{EG}}=-\sin\theta$$

由于球面坐标曲线是正交曲线，所以得球面曲线的测地曲率为

$$k_g=\left|\frac{d\varphi}{ds}+\frac{\sin\theta d\varphi}{ds}\right|$$

$$=\frac{|d\theta+\sin\theta d\varphi|}{R\sqrt{d^2\theta+\cos^2\theta d^2\varphi}}$$

130.（证明）设旋转曲面的方程为

$$r=\{t\cos\varphi,\ t\sin\varphi,\ f(t)\}\ (t>0)$$

显然参数 t曲线是子午线，于是求得

$$\boldsymbol{r}_t=\{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ f'(t)\}$$

$$E=1+f'^2(\varphi),\ E_\varphi=0$$

$$K_g=\frac{-E_\varphi}{2E\sqrt{G}}=0$$

所以旋转曲面的子午线是测地线。

131.（解）由螺旋面的方程 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$ 求得其第一基本量为

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$$

由 $F=0$ 知螺旋面的坐标曲线正交，并由测地线微分方程得

$$\frac{dv}{du}=\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{du}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\operatorname{tg}\varphi$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{d\ln(u^2+a^2)}{du}\operatorname{tg}\varphi \tag{2}$$

由（2）得 $\operatorname{ctg}\varphi d\varphi=-\frac{1}{2}d\ln(u^2+a^2)$

积分得 $\ln\sin\varphi=-\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+\ln c$

于是 $\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{u^2+a^2}}$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{u^2+a^2-c^2}}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

由上面结果并根据（1）式得

$$dv=\frac{c\,du}{\sqrt{u^2+a^2-c^2}\sqrt{u^2+a^2}}$$

积分 $$v = c\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2-c^2)(u^2+a^2)}}$$

为所求螺旋面的测地线的曲线坐标关系式。

132.（解）由已知曲面的第一基本微分形式 $ds^2 = v(du^2 + dv^2)$ 得曲面的第一基本量为 $E = G = v$，$F = 0$，于是

$$E_v = G_v = 1, \quad E_u = G_u = 0$$

由 $F = 0$ 知曲面的坐标网为正交网，由测地线的微分方程得

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{v}}\cos\varphi$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{v}}\sin\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\varphi - \frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{v}\,v}\cos\varphi = \frac{1}{2v}\frac{du}{ds}$$

由前两个方程得

$$\sin\varphi du = \cos\varphi dv, \quad 即\frac{du}{dv} = \text{ctg}\varphi$$

$$由后一个方程得 \ d\varphi = \frac{1}{2v}du$$

由等式 $\sin\varphi d\varphi - \sin\varphi d\varphi = 0$ 得

$$\sin\varphi d\varphi - \sin\varphi\frac{1}{2v}du = \sin\varphi d\varphi - \sin\varphi\frac{1}{2v}\text{ctg}\varphi dv$$

$$= \sin\varphi d\varphi - \frac{1}{2v}\cos\varphi dv = 0$$

即 $$\text{tg}\varphi d\varphi = \frac{dv}{2v}$$

积分得 $\sqrt{v}\cos\varphi = c$, $\cos\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{v}}$ （c为积分常数）

于是 $$\frac{du}{dv} = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2}} = \frac{c}{\sqrt{v-c^2}}$$

所以 $$du = \frac{c\,dv}{\sqrt{v-c^2}}$$

积分得 $u = 2c\sqrt{v-c^2}$

即 $u^2 = 4c^2(v-c^2)$

所求的渐近线在u，v平面上是抛物线。

133. （证明）若坐标曲线是曲率线 则 $F = M = 0$，于是 Codazzi，方程

$$L_v - M_u = L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11}$$
$$M_v - N_u = L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{12}$$

为

$$L_v = L\Gamma^1_{12} - N\Gamma^2_{11}$$
$$N_u = -L\Gamma^1_{22} + N\Gamma^2_{12}$$

即 $$L_v = \frac{LGE_v}{2EG} + \frac{NEE_v}{2EG} = \frac{1}{2}E_v\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) = E_v H$$

$$N_u = \frac{LGG_u}{2EG} + \frac{NEG_u}{2EG} = \frac{1}{2}G_u\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) = G_u H$$

或 $$\left(\frac{L}{E}\right)_v = \frac{E_v}{2E}\left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E}\right)$$

$$\left(\frac{N}{G}\right)_u = \frac{G_u}{2G}\left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G}\right)$$

坐标网是曲率线网则主曲率为 $\kappa_1 = \dfrac{L}{E}$，$\kappa_2 = \dfrac{N}{G}$。

从而得 $\dfrac{\partial\kappa_1}{\partial v}=\dfrac{1}{2}\dfrac{E_v}{E}(\kappa_2-\kappa_1)$

$$\frac{\partial\kappa_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\kappa_1-\kappa_2)$$

134. (证明) 设旋转曲面的参数方程为

$$x=t\cos\theta,\ y=t\sin\theta,\ z=f(t)\quad(t>0)$$

则求得其第一基本微分形式为

$$\varphi_1^*=[1+f'^2(t)]dt^2+t^2d^2\theta$$

设曲面 $r(u,v)$ 的测地平行圆族为 v 曲线族，测地平行圆族的正交轨线为u 曲线族，则曲面 $r(u,v)$的坐标网是半测地坐标网．于是其第一基本微分形式为

$$\varphi_1=du^2+Gdv^2$$

由于 v曲线的测地曲率为常数，从而v曲线的测地曲率只是u 的函数，即

$$K_g=K(u)$$

由坐标曲线的测地曲率公式得

$$K_{gv}=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}=\frac{G_u}{2G}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\ln G\right)$$

于是 $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{2}\ln G\right)=K(u)$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\ln G)=2K(u)$$

$$G=G(u)=e^{2\int K(u)du}$$

令参数变换σ $\begin{cases}v=\lambda\theta\\ t=\lambda G(u)\end{cases}$ (λ为不等0 的常数)

则 $\varphi_1=[1+f'^2(t)]du^2+t^2d^2\theta$

于是旋转曲面的子午线$z=f(t)$可由下式确定

$$du^2=[1+f'^2(t)]dt^2$$

因 $dz=f'(t)dt$ 所以

$$du^2=[1+f'^2(t)]dt^2=dt^2+dz^2$$

$$=\lambda^2[G'(u)]^2du^2+dz^2$$

于是

$$\frac{dz}{du}=1-\lambda^2[G'(u)]^2$$

$$z=\int\sqrt{1-\lambda^2[G'(u)]^2}\,du$$

证得已知曲面 $r(u,v)$ 与旋转曲面

$$r^*=\left\{t\cos\theta,\ t\sin\theta,\int\sqrt{1-\lambda^2[G'(u)]^2}\,du\right\}$$

等距等价。

135. (解)由曲面的第一基本微分形式 $\varphi_1=\lambda^2(du^2+dv^2)$ 得其第一基本量为 $E=G=\lambda^2$，$F=0$

由高斯曲率公式

$$K=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]$$

得 $$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(\lambda^2)_u}{\lambda^2}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\lambda^2)_v}{\lambda^2}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\lambda_u}{\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\lambda_v}{\lambda}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\ln\lambda)_u+\frac{\partial}{\partial v}(\ln\lambda)_v\right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\ln\lambda)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\ln\lambda)\right]$$

136.（解）由曲面的第一基本微分形式$ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2}{(x^2+y^2+c)^2}$

得其第一基本量为

$$F=0,\quad E=G=\frac{1}{(x^2+y^2+c)^2}$$

由高斯曲率公式得

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+c)^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{x^2+y^2+c}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2y}{x^2+y^2+c}\right)\right]$$

$$=2(x^2+y^2+c)^2\left[\frac{(x^2+y^2+c)-2x^2+(x^2+y^2+c)-2y^2}{(x^2+y^2+c)^2}\right]$$

$$=4c$$

其高斯曲率为常数 $4c$。

137.（解）由曲面的第一基本微分形式$ds^2=du^2+2e^{2u}dv^2$得其第一基本量为 $E=1$，$F=0,G=2e^{2u}$。所以曲面的坐标网是半测地坐标网。

于是 $$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\sqrt{G})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2e^{2u}}}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\sqrt{2e^{2u}})$$

$$=-1$$

138，（解）由已知曲面的第一基本微分形式

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta du dv + dv^2$$

得其第一基本量为 $E = G = 1$, $F = \cos\theta$

于是 $E_u = E_v = G_u = G_v = 0$

$$F_u = (-\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}, \quad g = EG - F^2 = \sin^2\theta$$

由 Gauss 曲率公式

$$K = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]$$

得曲面的高斯曲率

$$K = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}$$

139.（解）由已知曲面的第一基本微分形式

$$ds^2 = a(\cos^2\theta d^2u + \sin^2\theta d^2v)$$

得 $E = a^2\cos^2\theta$, $F = 0$, $G = a^2\sin^2\theta$

$$E_u = (-2a^2\cos\theta\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}, \quad E_v = (-2a^2\cos\theta\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$G_u = (2a^2\sin\theta\cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}, \quad G_v = (2a^2\sin\theta\cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$g = EG - F^2 = a^4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

由 Gauss 曲率公式得

$$K = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E\sqrt{g}}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2a^2\sin\theta\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{2a^2\sin\theta\cos\theta}{a^2\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2a^2\sin\theta\cos\theta}{a^2\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right)$$

140. (解) 由旋转抛物面的方程$\boldsymbol{r} = (t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + t^2\boldsymbol{e}_3$ 求得其第一基本量为

$$E = 1 + 4t^2,\quad F = 0,\quad G = t^2$$

由 $F = 0$知旋转抛物面的坐标曲线正交。又因为

$$K_{gt} = \frac{-E_\theta}{2E\sqrt{G}} = 0$$

所以 t 曲线是测地线。于是引入参数变换：

$$t^* = \int_2^t \sqrt{E}\,dp = \int_2^t \sqrt{1+4p^2}\,dp$$

则旋转抛物曲面 $\boldsymbol{r}(t^*\theta) = \boldsymbol{r}(t(t^*)$

是以曲线弧长为参数的半测地坐标系，并且求得$\boldsymbol{r}^*(t^*\theta)$ 的第一基本量

为 $$E^* = \boldsymbol{r}^*_t\cdot\boldsymbol{r}^*_t = \boldsymbol{r}_t\cdot\boldsymbol{r}_t\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 = \frac{\boldsymbol{r}_t\cdot\boldsymbol{r}_t}{\left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2} = 1$$

$$F^* = \boldsymbol{r}^*_t\cdot\boldsymbol{r}_\theta^* = \boldsymbol{r}_t\cdot\boldsymbol{r}_\theta\cdot\frac{dt}{dt^*} = 0$$

$$G^* = \boldsymbol{r}_\theta^*\boldsymbol{r}_\theta^* = \boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_\theta = t^2$$

$$ds^* = dt^{2*} + t^2 d\theta^2$$

于是$(t^*,\ \theta)$ 是测地坐标，并求得高斯曲率为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G^*}}\frac{\partial^2\sqrt{G^*}}{\partial t^*} = \frac{4}{1+4t^2}$$

附录I　向量分析

本书对微分几何知识的讲述中，把向量分析做为工具。因而，本附录介绍向量分析的一般知识。

§1　向量函数

在向量代数中，我们曾讲过模和方向都保持不变的向量，即常向量（零向量可视为特殊的常向量）。然而，在许多问题的讨论中，却常常遇到模和方向至少之一会改变的向量，即所谓变向量。特别是在向量分析中还要讨论向量函数的概念及其（与纯量函数相应的）性质，为此，先给出向量函数的概念。

【定义】设有变量 t（纯量）和变向量 $\boldsymbol{r}$，如果对于 t 在某个区间 $[\alpha,\beta]$ 上的每个值，$\boldsymbol{r}$ 都有一个确定的向量与其对应，则称 $\boldsymbol{r}$ 为变量 t 的向量函数，亦称做关于 t 的变向量。记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

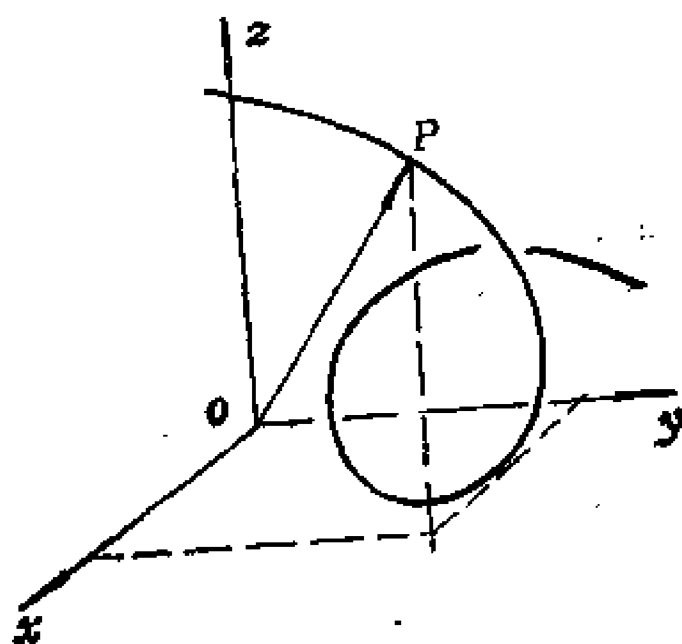
它在空间直角坐标系中的坐标函数由方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 确定。于是，向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示式又可写作：

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿三个坐标轴正向的单位向量。

为了叙述上方便，今后常把变向量简称做向量，而且都是

指向径而言的，即始点在坐标原点的变向量．若把 $\boldsymbol{r}(t)$ 看成空间一点P 的向径，$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$，当 t在区间 (t_1, t_2)里变动时，则 p点的轨迹一般为一条空间曲线Γ（附图 1），方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t_1\leqslant t\leqslant t_2$，称为曲线$\Gamma$的向量方程．



附图 1

容易看出，曲线Γ的参数方程刚好是向量 $\boldsymbol{r}$在直角坐标系中的坐标函数．因此曲线的向量方程和参数方程互换是容易作到的．例如，圆柱螺线的参数方程为

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ \ (ab\neq 0,\ -\infty<t<\infty)$$

则其向量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$$

这里还须注意，与解析几何中结论一样，由于曲线的参数选取任意性，所以方程不是唯一的．

类似地，还可定义两个变数的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$．一般，常把 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 看作空间一点M的向径，则M点的轨迹为一空间曲面．

§2 向量函数的极限和连续

向量函数的极限和连续问题，一般都可以和纯量函数的相应问题进行类似地讨论．下面首先研究向量函数的极限问题．

【定义】向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在点 t_0 邻近有值，但在 t_0 也可能无值，设$\boldsymbol{r}_0$为一常向量．如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得 $0<|t-t_0|<\delta$时，必有 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon$，那么就说，当 $t\longrightarrow t_0$时，常向量 $\boldsymbol{r}_0$为 $\boldsymbol{r}(t)$的极限向量．记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

如果一个变向量 $\boldsymbol{\alpha}$的极限为零向量，则称这个向量为无穷小向量．记做

$$\boldsymbol{\alpha}\longrightarrow 0$$

显然，无穷小向量也就是模趋向于零的变向量．

向量函数极限定义，形式上和纯量函数极限定义一样，由这个定义出发，按一般数学分析对于纯量函数所用方法，当 $\lambda(t)$，$\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$在 $t\longrightarrow t_0$ 有极限，不难证明下列公式成立：

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}_1(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t) \qquad (1)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t) \qquad (2)$$

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t) \qquad (3)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t) \qquad (4)$$

这里 $\lambda(t)$为纯量函数，$\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$为向量函数．

我们只证明（4）式，其余各式的证明留给读者．

因为向量函数 $\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$ 在$t\to t_0$ 时有极限，所以设

$\boldsymbol{r}_1(t) = (\boldsymbol{r}_1)_0 + \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{r}_2(t) = (\boldsymbol{r}_2)_0 + \boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$与 $\boldsymbol{\alpha}_2$皆为无穷小向量，即有$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t) &= [(\boldsymbol{r}_1)_0+\boldsymbol{\alpha}_1]\times[(\boldsymbol{r}_2)_0+\boldsymbol{\alpha}_2]\\ &= (\boldsymbol{r}_1)_0\times(\boldsymbol{r}_2)_0+(\boldsymbol{r}_1)_0\times\boldsymbol{\alpha}_2\\ &\quad+(\boldsymbol{r}_2)_0\times\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2\end{aligned}$$

两边取极限得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)] &= \lim_{t\to t_0}[(\boldsymbol{r}_1)_0\times(\boldsymbol{r}_2)_0]+\lim_{t\to t_0}[(\boldsymbol{r}_1)_0\times\boldsymbol{\alpha}_2]\\ &\quad+\lim_{t\to t_0}[(\boldsymbol{r}_2)_0\times\boldsymbol{\alpha}_1]+\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2)\end{aligned}$$

由极限定义及向量积定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}|(\boldsymbol{r}_1)_0\times\boldsymbol{\alpha}_2| &= \lim_{t\to t_0}|(\boldsymbol{r}_2)_0\times\boldsymbol{\alpha}_1|\\ &= \lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2|\\ &= 0\end{aligned}$$

又由向量函数极限定义，有

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)] = (\boldsymbol{r}_1)_0\times(\boldsymbol{r}_2)_0 = \lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)\quad 1$$

【定理 1】设 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$, $\boldsymbol{r}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$, 则，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$ （$\boldsymbol{r}_0$不必为 $\boldsymbol{r}(t)$在 $t=t_0$ 点的值）的充要条件是：

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0$$

（证明）必要性：若$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$, 即是

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|=0$$

即

$$\lim_{t\to t_0}\sqrt{[x(t)-x_0]^2+[y(t)-y_0]^2+[z(t)-z_0]^2}=0$$

由此得

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x_0, \lim_{t\to t_0} y(t)=y_0, \lim_{t\to t_0} z(t)=z_0$$

充分性：若

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0} y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0} z(t)=z_0$$

将上边式子两端分别乘以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，再作和，得

$$\lim_{t\to t_0} x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0} y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0} z(t)\boldsymbol{k}=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$$

即是

$$\lim_{t\to t_0}[x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}]=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$$

所以得

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

有了极限概念，我们就可以引进连续性概念了。

【定义】设区间$[t_1, t_2]$上的向量函数$\boldsymbol{r}(t)$，对$t_0\in(t_1,t_2)$，若 $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$，则称 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0点连续。

【定理 2】若纯量函数$\lambda(t)$和向量函数 $\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$，都在t_0点连续，则$\lambda(t)\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)$，$\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)$，$\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)$也都在 t_0点连续。

同极限定理相类似地还有：

【命题】向量函数$\boldsymbol{r}(t)$在t_0点连续的充分必要条件是它的分量 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，都在 t_0点连续。

由于它们的证明方法与极限定理的证明方法一样，这里不做证明了。

【定义】若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在一个区间里每一点都连续，则称该向量函数在区间上连续。由连续函数确定的曲线叫连续曲线。

在一个区间的端点，向量函数的极限和连续性概念，都可以和纯量函数一样，作相应的推广。

§3 向量函数的微分法

向量函数导数的概念，在形式上也和纯量函数一样．

【定义】设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在闭区间 $[t_1, t_2]$ 里连续，并设 t_0，$t_0+\Delta t$ $(\Delta t\neq 0)$ 都在闭区间 $[t_1, t_2]$ 里，若极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 可微（或可微分）．这个极限 $\boldsymbol{r}(t)$ 称为在 t_0 的导向量．用 $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}$ 或 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 表示，即

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

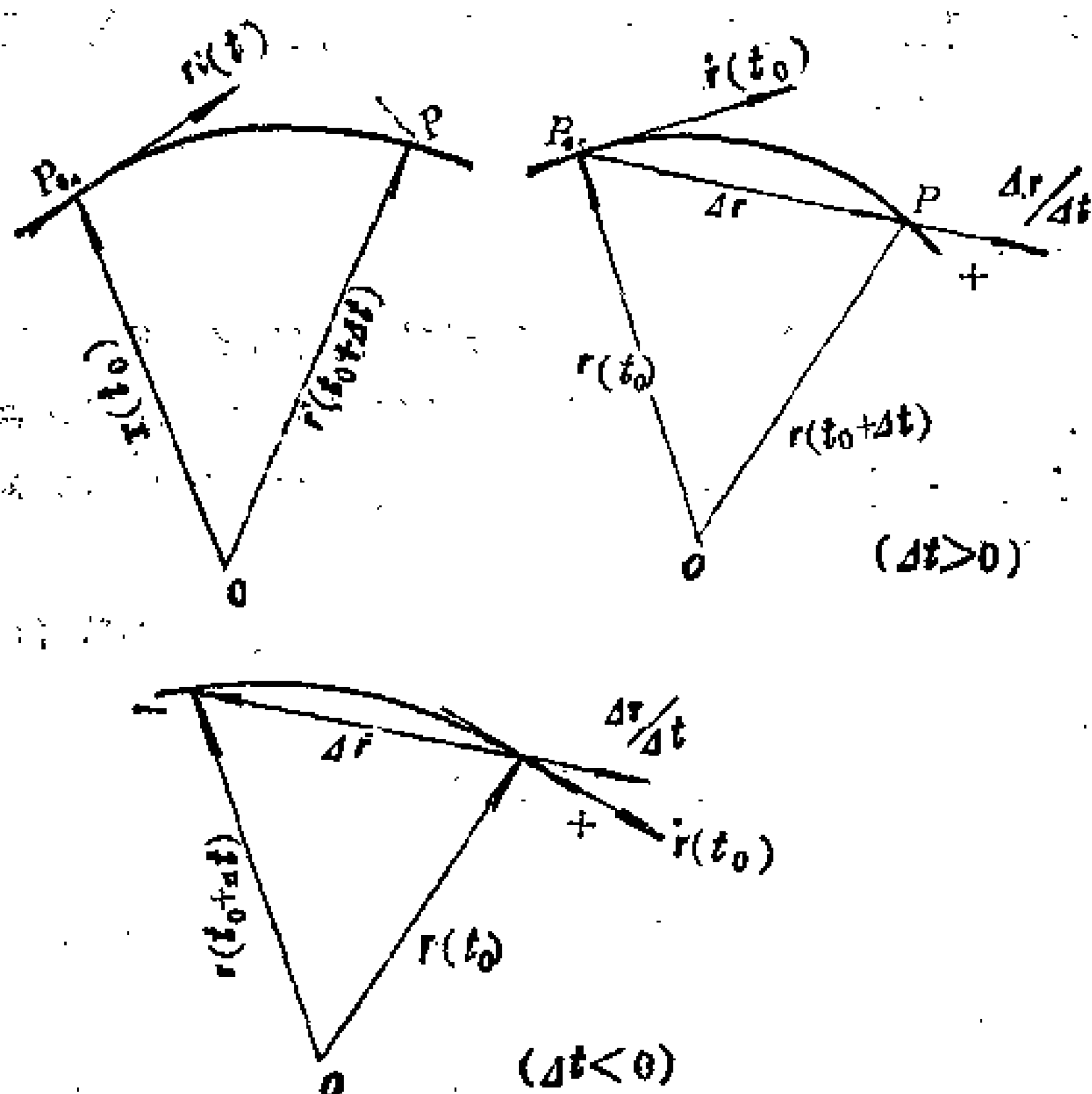
导向量有极其重要的几何意义．设 Γ 为对应于向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的连续曲线 P_0，为 Γ 上一个固定点（附图 2），又设 P 为 Γ 上在 P_0 邻近的点．若当 P 点沿曲线 Γ 趋于 P_0 时，曲线的弦 $\overline{P_0P}$ 有极限位置，则这个极限位置称为曲线 Γ 在 P_0 点的切线．现在设参数 t 对应于 P_0 的值为 t_0，对应于 P 的值为 $t_0+\Delta t$，则向量

$$\overrightarrow{P_0P}\ \boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$$

为 $\overline{P_0P}$ 弦上的一个向量．当 P 点沿 Γ 趋于 P_0 时，Δt 趋于零．同时，由于 $\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的向量，$\overrightarrow{P_0P}$ 也趋于零．不过向量

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{t\Delta}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

也是 $\overline{P_0P}$ 弦上的一个向量，当 $\Delta t\longrightarrow 0$ 时，它的极限如果不是零向量，就可以代表 Γ 在 P_0 的切线方向．由此可见，若 $\boldsymbol{r}(t)$



附图 2

$\neq 0$，曲线Γ在 P_0 点的切线存在，而这个向量就是切线上的一个非零向量．不难看出，这个非零向量的方向，和曲线Γ的参数 t的增值方向一致．事实上，当我们选定了曲线的参数 t 之后，自然地就确定了曲线的正向，即参数增加方向，这个正向在 P_0点可以用 $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ 表示．具有正向的曲线简称为**有向曲线．**

显然， $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\neq 0$是曲线 Γ在 P_0有切线的充分条件，但这个条件并不必要，例如

$$\boldsymbol{r}=\{t^2,\ t^3,\ 0\}$$

是半立方抛物线

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

的参数方程。这个曲线在原点 $t=0$ 有一个尖点，那里有切线

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

但 $\dot{\boldsymbol{r}}(0)=0$

若 $\boldsymbol{r}(t)$在一个区间里每一个 t值都是可微的，则称$\boldsymbol{r}(t)$在这个区间里是可微的，而向量函数 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$称为 $\boldsymbol{r}(t)$的**导函数**。若 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$在一个区间里连续而且不等于零，则 $\boldsymbol{r}(t)$所对应的曲线称为**光滑曲线**。

象纯量函数那样，我们也可以给出向量函数的高阶导向量和高阶导函数的定义，这里不赘述了。

向量函数微分的定义和纯量函数一样，

$$d\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)dt \quad (dt=\Delta t)$$

它是“无穷小向量” $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$的“主部”。

以下关系容易验证：

$$\frac{d}{dt}\left\{x(t),\ y(t),z(t)\right\}=\left\{\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)\right\}$$

写成微分的形状就是

$$d\boldsymbol{r}=\{dx,\ dy,\ dz\}$$

还可以验证以下的微分公式成立：如果 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，λ存在导数则

$$(\lambda\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{\cdot}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{r}+\lambda\dot{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{\cdot}}=\dot{\boldsymbol{r}}_1+\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)^{\boldsymbol{\cdot}}=\dot{\boldsymbol{r}}_1\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{7}$$

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)^{\boldsymbol{\cdot}}=\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)^{\boldsymbol{\cdot}}=(\dot{\boldsymbol{r}}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1\dot{\boldsymbol{r}}_2\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\dot{\boldsymbol{r}}_3) \tag{9}$$

特别的

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}^2=2\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}$$

对于复合函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t=\varphi(u)$ 有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{du}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)\dot{t}(u) \tag{10}$$

当然，这个关系也可以从一阶微分的性质推得。

若 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是光滑曲线，当我们利用关系 $t=\varphi(u)$ 来引进新的参数 u 时，我们总假定 $\varphi(u)$ 在一个区间里连续而且不等于零。关系（10）表明，经过参数变换，光滑曲线的切线不变，但当 $\varphi(u)<0$ 时，曲线的正向颠倒。

这里只证（5）和（9），其余各式的证明留给读者。

若已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$\lambda=\lambda(t)$，在 $t\to t_0$ 时

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{r}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t),\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\lambda(t)}{\Delta t}=\dot{\lambda}$$

则，（5）式成立，即

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{r})&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\lambda\boldsymbol{r})}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\lambda+\Delta\lambda)(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\lambda\boldsymbol{r}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}\boldsymbol{r}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\lambda\\&\quad+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\lambda\\&=\dot{\lambda}\boldsymbol{r}+\lambda\dot{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

已知 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}_1(t)}{\Delta t}=\dot{\boldsymbol{r}}_1(t)$，$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}_2(t)}{\Delta t}=\dot{\boldsymbol{r}}_2(t)$ 则有（9）式成立。

即由（7）和（8）有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)^{\cdot} &= [(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3]^{\cdot} \\
&= (\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)^{\cdot}\cdot\boldsymbol{r}_3 + (\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_3 \\
&= [(\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\boldsymbol{r}_2) + (\boldsymbol{r}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2)]\cdot\boldsymbol{r}_3 + (\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_3 \\
&= (\dot{\boldsymbol{r}}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\dot{\boldsymbol{r}}_3)
\end{aligned}
$$

若向量函数是两个或更多个变量的函数时，类似于普通数量函数的偏导数，可以得到偏导向量的概念。例如，

设 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}$

则有

$$
\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(x_u,\ y_u,\ z_u),\quad \boldsymbol{r}_v=(x_v,\ y_v,\ z_v)
$$

其中

$$
x_u=\frac{\partial x}{\partial u},\ y_u=\frac{\partial y}{\partial u},\ z_u=\frac{\partial z}{\partial u}
$$

$$
x_v=\frac{\partial x}{\partial v},\ y_v=\frac{\partial y}{\partial v},\ z_v=\frac{\partial z}{\partial v}
$$

对于复合向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),z(u,v))$，$u=u(\bar{u},\ \bar{v})$，$v=v(\bar{u},\ \bar{v})$，则成立链式法则：

$$
\boldsymbol{r}_{\bar{u}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial \bar{u}},\quad \boldsymbol{r}_{\bar{v}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}
$$

〔例〕已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是关于 t 的向量函数，试求$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$的导向量.

（解）由（8）式有

$$
\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\times\boldsymbol{c}\right)
$$

$$
+\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right)
$$

§4　特殊向量函数

我们考察在一个闭区间 $[t_1, t_2]$ 里的向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，并且假定下面出现的导函数都是存在且连续的。现在研究几种特殊向量函数。

1. 定长向量

【定义】如果一个向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，当 t 改变时，仅改变方向，而长度始终保持不变，则称其为**定长向量函数**，并简称为**定长向量**。

从几何直观可知，某曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在以原点为中心的一个球面上，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定长向量。我们知道，由于球面曲线在每一点的切线必和那里的向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 垂直，因而有：

【定理 1】 $\boldsymbol{r}(t)$ 为定长向量的充分必要条件是：

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

（证明）已知 $\boldsymbol{r}(t)$ 的长度，即

$$|\boldsymbol{r}|=\text{常数}$$

所以

$$\boldsymbol{r}^2=|\boldsymbol{r}|^2=\text{常数}$$

微分得

$$\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

反之，若 $\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}=0$

则

$$d\boldsymbol{r}^2=0$$

故

$$\boldsymbol{r}^2=\text{常数}$$

即　$$|\boldsymbol{r}|=\text{常数}$$

2. 定向向量。

【定义】如果一个向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，随变数 t 的改变，仅改变长度，方向始终保持不变，则称之为**定向向量函数**，并简称为**定向向量**。

由几何直观易见：若曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为经过原点的一条直线，则它的切线和向径到处平行。反之亦然，故有：

【定理 2】$\boldsymbol{r}(t)$为定向向量的充分必要条件是：

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

（证明）若$\boldsymbol{r}(t)$在整个区间里不是零向量，取使$\boldsymbol{r}(t)\neq 0$的一个闭区间 $[a,b]$ 无论 $\boldsymbol{r}(t)$ 的方向是否固定，我们总可以取和它平行的单位向量 $\boldsymbol{e}(t)$，并设$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}$（其中 $\lambda=\lambda(t)$ 是一纯量函数）

现在我们假定 $\boldsymbol{r}(t)$有固定方向，则可以假定$\boldsymbol{e}$为常向量，微分 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}$ 得

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{e}$$

故

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\lambda\dot{\lambda}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}=0$$

反之，设在区间$[t_1, t_2]$里 $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=0$，取定长向量 $\boldsymbol{e}(t)$，所以有 $\boldsymbol{r}=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$求导，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{e}+\lambda\dot{\boldsymbol{e}}$$

因而

$$0=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\lambda^2(\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}})$$

又

$$\lambda\neq 0$$

故有

$$\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}}=0$$

由拉格朗日恒等式和定理 1 得

$$(e\times\dot{e})^2=e^2\dot{e}^2-(e\dot{e})^2=\dot{e}^2=0$$

于是

$$\dot{e}=0$$

即 e 是常向量，这样平行于 e 的向量 $r(t)$ 有固定方向。

3. **平行于固定平面的向量**

【定义】如果一个向量函数 $r(t)$，随变量 t 的变化而变化，但始终平行于一个固定平面，则称其为**平行于固定平面的向量函数**，并简称为**平行固定平面的向量**。

从几何直观显然有：向量 $r(t)$ 平行于固定平面也就是曲线 $r=r(t)$ 在一个经过原点的平面上。所以有下面定理。

【定理 3】 $r(t)$ 平行于固定平面的充分必要条件是

$$(r\ \dot{r}\ \ddot{r})=0$$

（证明）若 $r\times\dot{r}=0$，定理显然正确。我们以下讨论 $r\times\dot{r}\neq0$ 的情形。

设 $r(t)$ 平行于固定平面，n 为垂直于这个平面的不为零的常向量，则对于一个区间里的每一个 t 值，有

$$nr(t)=0$$

微分两次得

$$n\dot{r}=0,\quad n\ddot{r}=0$$

于是向量 r，$\dot{r}$，$\ddot{r}$ 总垂直于同一个非零的向量 n，因而共面，故有

$$(r,\dot{r},\ddot{r})=0$$

反之，设在区间 $(t_1,\ t_2)$ 里 $(r\ \dot{r}\ \ddot{r})=0$，即 r，$\dot{r}$，$\ddot{r}$ 共面，由于 $r\times\dot{r}\neq0$，即 $r,\dot{r}$ 不平行，那么 $\ddot{r}$ 是它们的线性组合

设 $\ddot{r}=\lambda r+\mu\dot{r}$ （1）

其中 $\lambda(t)$，$\mu(t)$ 是纯量函数，另一方面也由于 $r\times\dot{r}\neq0$，$n=r\times\dot{r}$ 是垂直于 r 与 $\dot{r}$ 的一个非零向量（一般地，不是常向

量），而

$$\dot{n}=r\times\ddot{r} \tag{2}$$

把（1）代入（2）得

$$\dot{n}=\mu r\times\dot{r}=\mu n$$

因此，$n\times\dot{n}=0$，根据定理2，可知 n 有固定方向，所以，作为垂直固定方向的变向量 $r(t)$ 必平行于固定平面。

〔例〕试证曲线 $r=r(t)$ 为平面曲线的充分必要条件是

$$(\dot{r},\ \ddot{r},\ \dddot{r})=0$$

（证明）必要性：若已知 $r=r(t)$ 为一平面 π 上的曲线，则 $\dot{r}$ 亦在平面 π 上，任取 π 之法向量 n（常向量），必有 $n\perp\dot{r}$，即

$$\dot{r}n=0$$

两次微分得

$$\ddot{r}n=0$$

$$\dddot{r}n=0$$

同垂直于一常向量的三个向量必共面，所以有

$$(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r})=0$$

充分性：若已知 $(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r})=0$，由定理3，则有 r 平行于一面定平面 π，设 π 之法向量为 n，故有

$$\dot{r}n=0$$

而 n 为常向量，这说明曲线 $r=r(t)$ 的所有切向量皆垂直于一常向量，所以，$r=r(t)$ 必为平面曲线。

最后，补充向量代数中一个事实，以备将来之用。如果把常向量看作特殊的变向量，那么，下面我们就研究常向量中更特殊的向量—可做基底的向量。对此，有下面的充分条件：

【定理4】若 r_1，r_2，r_3 三个常向量适合下列关系

$$r_1=r_2\times r_3,\ r_2=r_3\times r_1,\ r_3=r_1\times r_2 \tag{1}$$

则只有两种可能：

或者 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_3=0$，或者 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3$ 是彼此垂直的单位向量，且按这个次序构成右旋系。

（证明）若三个向量之一为零向量，则从（1）式可知，其它两个也是零向量。

下面设所给向量都不是零向量，则从（1）可知它们是彼此垂直的，且按 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$的顺序构成右旋系，以下只须证明它们都是单位向量。取（1）中第二、三两式里各向量的长，则因 $\boldsymbol{r}_1$分别与 $\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 垂直，根据向量积定义，

$$|\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_3|\,|\boldsymbol{r}_1|,\quad |\boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2|$$

消去 $|\boldsymbol{r}_3|$ 得

$$|\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_1|^2\,|\boldsymbol{r}_2|$$

但 $|\boldsymbol{r}_2|\neq 0$，故 $|\boldsymbol{r}_1|=1$，由于 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 是完全平等的，所以 $|\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_3|=1$。

§5 圆向量函数

【定义】若已给平面上一个单位向量 $\boldsymbol{e}$，与 ox 轴正向成φ角，而依反时针方向度量。因为 $\boldsymbol{e}$ 完全由角的大小决定，故可记作

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(\varphi)$$

如此定义的向量函数，常常作为辅助工具出现，因为其图形为单位圆，故称为圆向量函数。

同 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 相伴出现的，可考虑

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{e}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

为求向量 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$，只要将$\boldsymbol{e}(\varphi)$在 xoy面上沿反时针方向旋

转一个直角即可。

圆向量函数的导数，可由几何方面考虑求得。

向量$\frac{de}{d\varphi}$显然与 e互相垂直，另一方面，

$$\left|\frac{de}{d\varphi}\right|=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta e}{\Delta\varphi}\right|$$

而 $|\Delta e|$ 为圆的弦， $\Delta\varphi$ 为圆弧，所以其比的极限为 1 ，故$\frac{de}{d\varphi}$也是单位向量．因此可得

【定理】 $\frac{de}{d\varphi}$ 是$e(\varphi)$沿 φ的增加方向旋转$\frac{\pi}{2}$的单位向量，且有

$$\frac{de(\varphi)}{d\varphi}=e_1(\varphi)$$

及

$$\frac{de_1(\varphi)}{d\varphi}=-e(\varphi)$$

容易看出， $e(\varphi)$与 $e_1(\varphi)$的坐标分解式为：

$$e(\varphi)=\cos\varphi i+\sin\varphi j$$

$$e_1(\varphi)=-\sin\varphi i+\cos\varphi j$$

利用圆向量函数，我们可以把圆柱螺线方程简写成

$$r=ae(t)+btk$$

§6 向量函数的台劳公式

类似于纯量函数的台劳公式，对向量函数我们也有相应的定理：

【定理】设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是在 t_0 与 $t_0+\Delta t$ 之间的一个 n 阶连续可微的向量函数，则有

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)(\Delta t)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1}$$

$$+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\Delta t^n+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)^n$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为无穷小向量。

（证明）设 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，因为 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 n 次连续可微，所以纯量函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 在 t_0 与 $t_0+\Delta t$ 之间也是 n 次连续可微的，由数学分析的台劳公式可知

$$x(t_0+\Delta t)=x(t_0)+\dot{x}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1}+\frac{1}{n!}x^{(n)}(t_1)(\Delta t)^n$$

$$y(t_0+\Delta t)=y(t_0)+\dot{y}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{y}(t_0)(\Delta t)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}y^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1}+\frac{1}{n!}y^{(n)}(t_2)(\Delta t)^n$$

$$z(t_0+\Delta t)=z(t_0)+\dot{z}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{z}(t_0)(\Delta t)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}z^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1}+\frac{1}{n!}z^{(n)}(t_3)(\Delta t)^n$$

其中 t_1，t_2，t_3 为三个在区间 $[t_0,t_0+\Delta t]$ 的值，它们一般不相等。依次用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 乘以上三式两端再加起来，得

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)(\Delta t)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0)\ (\Delta t)^{n-1}+\frac{1}{n!}\boldsymbol{R}_n(\Delta t)^n \quad (1)$$

其中

$$\boldsymbol{R}_n=x^{(n)}(t_1)\boldsymbol{i}+y^{(n)}(t_2)\boldsymbol{j}+z^{(n)}(t_3)\boldsymbol{k}$$

由于 $x^{(n)}(t)$，$y^{(n)}(t)$，$z^{(n)}(t)$ 都是连续的，而 t_1，t_2，t_3 又都在 t_0与 $t_0+\Delta t$之间，故

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}_n&=\lim_{\Delta t\to 0}x^{(n)}(t_1)\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}y^{(n)}(t_2)\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}z^{(n)}(t_3)\boldsymbol{k}\\&=x^{(n)}(t_0)\boldsymbol{i}+y^{(n)}(t_0)\boldsymbol{j}+z^{(n)}(t_0)\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\end{aligned}$$

公式（1）亦可写为

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)(\Delta t)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1}+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0))\Delta t)^n$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)^n \quad (1)'$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$是无穷小向量，即 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\boldsymbol{\varepsilon}|=0$。

公式（1）与（1）' 皆称做向量函数的台劳公式。

§7　向量函数的积分法

关于向量函数的积分，形式上和纯量函数积分一样。

【定义】若已给向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$是向量函数 $\boldsymbol{R}(t)$的导数，即

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\boldsymbol{r}(t).$$

则，称 $\boldsymbol{R}(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数，记作

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,dt \tag{2}$$

并称 $\int \boldsymbol{r}(t)\,dt$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的不定积分。

和纯量函数一样，若 $\boldsymbol{R}(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的任意一个固定的原函数，则任意其他的原函数和 $\boldsymbol{R}(t)$ 是差一个常向量 $\boldsymbol{c}$，即

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{c}$$

不难证明，向量函数的下列积分公式成立

已知 $\boldsymbol{r}(t)$ 是连续函数，λ 是常数，$\boldsymbol{v}$ 是常向量，则有

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{i}\int x(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int y(t)\,dt + \boldsymbol{k}\int z(t)\,dt \tag{4}$$

$$\int \lambda \boldsymbol{r}(t)\,dt = \lambda \int \boldsymbol{r}(t)\,dt \tag{5}$$

$$\int [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]\,dt = \int \boldsymbol{r}_1(t)\,dt + \int \boldsymbol{r}_2(t)\,dt \tag{6}$$

$$\int \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{v}\int \boldsymbol{r}(t)\,dt \tag{7}$$

$$\int \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{v}\times \int \boldsymbol{r}(t)\,dt \tag{8}$$

其中 λ 表示常数，$\boldsymbol{v}$ 表示常向量。

纯量函数定积分的概念及定积分的许多性质都可以推广到向量函数。

特别的，若 $\boldsymbol{R}(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

这里只证明（8）式，其余各式留给读者。

已知 $\boldsymbol{v}$ 是常向量，则有

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{v}\times \int \boldsymbol{r}(t)\,dt\right] = \boldsymbol{v}\times \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{r}(t)\,dt$$

$$=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}(t)$$

$$\int\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{v}\times\int\boldsymbol{r}(t)dt\right]=\int\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}(t)dt$$

所以

$$\int\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{v}\times\int\boldsymbol{r}(t)dt$$

〔例〕 求向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(t-t^2)\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$之不定积分。

(解) $\int\boldsymbol{r}(t)dt=\int[(t-t^2)\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}]dt$

$$=\boldsymbol{i}\int(t-t^2)dt+\boldsymbol{j}\int2t^3dt+\boldsymbol{k}\int-3dt$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+C_1\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{t^4}{2}+c_2\right)$$

$$+\boldsymbol{k}(-3t+c_3)$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\frac{t^4}{2}\boldsymbol{j}-3t\boldsymbol{k}+c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\frac{t^4}{2}\boldsymbol{j}-3t\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}$$

习　　题

1．将下列曲线写成向量函数形式。

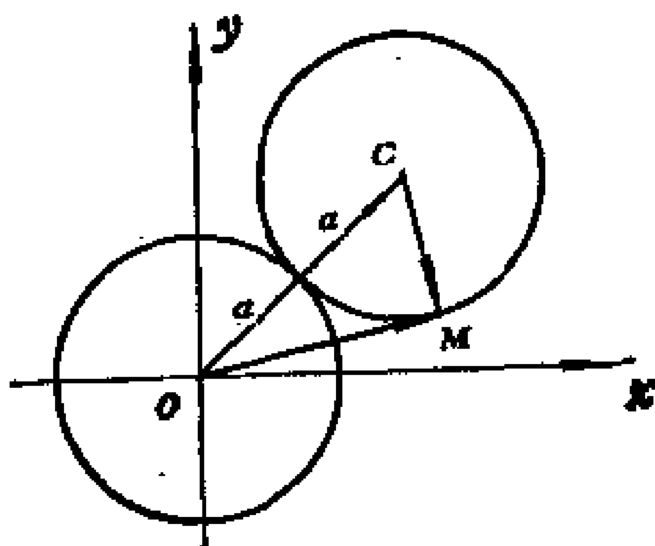
(1) $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$.

(2) $x=3\sin t,\ y=4\sin t,\ z=3\cos t$.

(3) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$.

2．设有半径均为 a一定圆O和一动圆 $\boldsymbol{c}$,动圆在定圆外相切滚动，求动圆上一定点M所描曲线的向量方程（如图）.〔提示：设开始时M点与A点重合，取$\angle AOC=\theta$ 为参数〕.

3．设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是线性无关的两个固定的向量，证明向量方程 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\sin t$ 确定一个椭圆。



附习题 2

4．证明附录Ⅰ的§2公式（1）—（3）。

5．已知

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\left\{\frac{t^2-t}{t^2-1},\ \frac{2t^3-1}{2t},\ t^3\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_2(t)=\left\{2t^2, t+1, \frac{t^2+1}{2}\right\}$$

试求极限$\lim\limits_{t\to 1}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)$和 $\lim\limits_{t\to 1}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)$。

6．试证附录 Ⅰ的公式（7）、（8）。

7．试证二重向量积的导数公式

$$(\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3))^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{r}}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)+\boldsymbol{r}_1\times(\dot{\boldsymbol{r}}_2\times\boldsymbol{r}_3)$$
$$+\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_3)$$

8．已知向量 $\boldsymbol{r}_1=2t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+(3t+1)\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}_2=a\sin t\boldsymbol{i}-a\cos t\boldsymbol{j}$$

试求：（1）$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}_1^2$；（2）$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)$；（3）$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)$。

9．求曲线 $\boldsymbol{r}=\{t,\ t^2,\ t^3\}$ 上的点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z-4=0$。

10. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为固定向量，向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\sin t+\boldsymbol{c}$满足 $\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$，试证明 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 互相垂直且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$。

11. 试求向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)=ve^{au}\boldsymbol{i}+\cos(uv)\boldsymbol{j}+uv\boldsymbol{k}$ 的一、二阶偏导向量函数。

12. 试证明：曲线 $\boldsymbol{r}=\{a\sin^2 t, a\sin t, a\cos t\}$，在球面上。

13. 证明：

$$\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha=\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)+\boldsymbol{e}(\varphi-\alpha)]$$

$$\boldsymbol{e}(\varphi)\sin\alpha=\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)-\boldsymbol{e}(\varphi-\alpha)]$$

14. 将向量函数$\boldsymbol{r}(t)=\left\{\frac{1}{1+t},\ \frac{1}{1+t^2},\ \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right\}$在$t=0$处按台劳公式展开。

15. 利用分部积分法证明下列等式成立。

(1) $\int \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}dt=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}^2+\boldsymbol{c}$。

(2) $\int \boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{c}$。

(3) $\int\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|}-\frac{\dot{|\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}^2|}\cdot\boldsymbol{r}\right)dt=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}+\boldsymbol{c}$。

16. 已知向量函数 $\boldsymbol{r}_1=\{t^2,\ -t,\ 2t+1\}$，$\boldsymbol{r}_2=\{2t-3,\ 1,\ -t\}$，试求下列定积分。

(1) $\int_0^1 \boldsymbol{r}_1^2dt$; (2) $\int_{-1}^1 \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2dt$; (3) $\int_1^0 \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2dt$。

17. 设标架向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$在平面直角坐标系下为 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，试求度量系数 g_{ij}。

18. 设向量$\boldsymbol{x}$在直角坐标下为 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，试求 $\boldsymbol{x}$ 在标架

$\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}$ 下的表示式。

19. 设 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，一曲线 c 在标架$[0; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$中的参数方程为$\boldsymbol{u}=\{\cos t, \sin t\}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，试求此曲线的直角坐标方程，并指出它是什么曲线。

附录II 历史略述

在古典的意义下，微分几何是用微分学来研究欧几里得平面曲线和空间曲线以及曲面的形状性质的一个数学分科．费马(Fermat)研究光滑平面曲线作切线而成为微积分的先驱者．从而可知平面曲线的微分几何是作为微积分在几何上的应用而发展起来的．后来这个研究逐渐扩展到曲面，于是产生了曲面内在几何的思想．因此，由高斯奠定了曲面理论的基础，这才使微分几何作为数学的一个独立分科的巩固地位．

由于对曲线和曲面的微分几何的研究，它对数学以及力学、物理学、工程力学等的影响是无法估计的．例如负曲率曲面与罗巴切夫斯基（Кобауевшкии）几何有密切的关系，极小曲面与复变函数、变分学、拓扑学有密切的联系．

欧几里得几何学是属于克莱茵（F. Klein)爱兰根纲领的一种几何．对于克莱茵意义下的几何也做了微分几何的研究．例如射影微分几何，它是研究平面或空间中的曲线、曲面在射影变换下的微分不变量系统，在这方面维尔清斯基（E. J. Wilczynski)、费比尼（G. Fubini）作了很多工作．关于仿射微分几何，保形微分几何布拉须凯（W. Blaschke）作了很多工作．

黎曼(B. Riemann)受高斯曲面内在几何的启示，于1854年提出了黎曼几何．这种几何不仅包括欧几里得几何和非欧几里得几何，而且对于进入二十世纪以来的空间概念和几何思想起

着很大的作用。尤其是在1916年爱因斯坦（A. Einsetin）把黎曼几何应用于广义相对论后，更被人们所重视。而且由列维一齐维他（T. Levi-Civita）引入平行性以后，使该几何的几何意义更为明确而易于理解。从黎曼几何中删除度量性质保留平行性，则得到仿射联络几何，从定义切向量沿本身平行移动作为测地线（也叫道路）以后，它的方程是二阶常微分方程组，由于这个方程组的系数确定了平行性，而把它叫做联络系数，在各种变换下保持联络不变的几何叫做相应的联络几何，于是产生了射影联络、仿射联络、保形联络等几何。这种几何，一般地不能看做克莱茵意义下的几何，因为在这种几何中不存在克莱茵意义下的合同变换，即或有这种变换也无传递性。

这样，几何学除以公理为基础的几何以外还存在以变换群为基础的克莱茵意义下的几何和属于黎曼思想范畴的几何。后来由嘉当（E. Cartan）以较高的观点统一了克莱茵和黎曼的思想构成嘉当联络的理论。

嘉当的思想是在空间各点都伴随以具有一定结构群G的克莱茵意义下的切空间，对于相邻的伴随空间，在群G下给出可重合的法则，把这个法则叫做联络，这种空间叫做以G为结构群的联络空间，研究这种空间结构和性质的几何叫做以G为结构群的联络几何，显然作为欧几里得空间的推广的欧氏联络空间（黎曼空间），仿射空间的推广的仿射联络空间都是它的特例，这样欧几里得空间，黎曼空间，仿射空间等都包括在他的联络空间之内，嘉当联络思想对现代微分几何有着极其深远的影响。但是这些结果都是属于在各个点邻域的研究。人们根据客观的要求开始考虑小范围的性质与空间整体性质（大范围）之间的关系。由于拓扑学的产生给大范围的研究提供有利工具。于是现代微分几何就转向了大范围的研究。

作为黎曼几何和联络几何的舞台的空间从现代的观点来看就是微分流形。1625年霍卜夫（H. Hopf）开始对黎曼空间的微分几何与拓扑之间的关系进行了研究，1944年陈省身证明了n维高斯—波涅公式和1941年赫叶（W.V.D. Hodge）对调和积分论的工作，而把黎曼几何做为非退化的二次微分形式的微分流形的理论进行研究．1950年由艾赫利斯曼（C. Eheresman）把联络几何看做微分流形M上以G为结构群的主纤维丛上线性微分形式的理论进行了研究。从而现代微分几何和拓扑学、李群、变分法、微分方程、代数几何、多复变函数论、规范场论等许多其它邻近学科联系起来共同向前发展。

由于与代数几何以及多复变函数论相联系，引起对复流形的研究。

现代微分几何可以看做是微分拓扑的组成部分，因此，微分几何可以看做是赋给一次微分形式、各种度量、复结构、联络等的特殊结构于微分流形的理论，这可以说是现代的最普遍的观点。

后　记

本书由王家彦主编，陈润瀛参加编写了第一章曲线论和学习指导；张兴汉参加编写了第二章包络论和学习指导；万福之同志参加编写了第三章曲面论和学习指导，各章习题和解答由毛东明、孙伟志、梁希泉编写。

本书在编写过程中，承蒙东北师大郭卫中、辽宁大学崔玉衡、姚婷婷仔细审阅原稿并提出很多宝贵意见，对本书质量的提高起很大作用，在此谨致谢意，但限于编者的水平，在书中不妥或误谬之处一定不少，欢迎读者批评指正。

编　者

1983年2月

[General Information]
□□=□□□□
□□=
□□=611
SS□=0
□□□□=
Vss□=54077164